4.2 Różniczka zewnętrzna

W poprzednich rozdziałach używaliśmy specjalnego oznaczenia na zbiór gładkich cięć wiązki stycznej $\mathcal{X}(M)$. Wygodnie jest także wprowadzić oznaczenie na zbiór gładkich cięć wiązki $\wedge^k \pi_M$ k-kowektorów: $\Omega^k(M)$. Funkcje gładkie na romaiotści M uważać będziemy za zero-formy, tzn. $\Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$ a iloczyn zewnętrzny 0-formy i k-formy to po prostu mnożenie k-formy przez funkcję.

Fakt 4 *Operator liniowy*

$$\mathsf{d} : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)$$

spełniający następujące warunki: (1) d w działaniu na 0-formy jest równy zdefiniowanej wcześniej różniczce funkcji; (2) jeśli $\alpha \in \Omega^k(M)$ i $\beta \in \Omega^l(M)$ to $\mathsf{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathsf{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \mathsf{d}\beta$; (3) $\mathsf{d}^2 = 0$, tzn $\mathsf{d}(\mathsf{d}\alpha) = 0$ dla dowolnej formy α, jest wyznaczony jednoznacznie.

Dowód: Załóżmy, że operator d istnieje. Wówczas warunek (2) pozwala go zadać jedynie na 0-formach i 1-formach, ponieważ wszystkie inne wyprodukujemy korzystając z liniowości i reguły Leibniza (czyli właśnie warunku (2)). Na 0-formach wartość d jest określona przez warunek (1). Każda 1-forma jest kombinacją liniową wyrażeń postaci $f\mathsf{d}g$, gdzie f, g są funkcjami gładkimi. Używając więc (2) i (3) dostajemy

$$\mathsf{d}(f\mathsf{d}g) = \mathsf{d}f \wedge \mathsf{d}g + f\mathsf{d}\mathsf{d}g = \mathsf{d}f \wedge \mathsf{d}g.$$

□

Fakt 5 *Operator d istnieje.*

Dowód: W dziedzinie $\mathcal{O}$ lokalnego układu współrzędnych (x^i) działanie d zadamy wzorem „we współrzędnych”. Ze względu na liniowość wystarczy wiedzieć jak działa d na formę α postaci $a(x)\mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k}$:

$$\mathsf{d}(a(x)\mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k}) = \mathsf{d}a \wedge \mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial a}{\partial x^j} \mathsf{d}x^j \wedge \mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k}.$$

Pozostaje sprawdzić własności (1)-(3). Warunek (1) jest spełniony automatycznie, warunek (2) sprawdzamy rachunkiem: Weźmy

$$\alpha = a\mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k}, \qquad \beta = b\mathsf{d}x^{j_1} \wedge \mathsf{d}x^{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{j_l},$$

gdzie a i b są funkcjami we współrzędnych (x^i), wtedy

$$\alpha \wedge \beta = ab\mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k} \wedge \mathsf{d}x^{j_1} \wedge \mathsf{d}x^{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{j_l}.$$

Aplikujemy operator d:

$$\begin{aligned}
\mathsf{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathsf{d}(ab) \wedge \mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k} \wedge \mathsf{d}x^{j_1} \wedge \mathsf{d}x^{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{j_l} = \\
(a\mathsf{d}b + b\mathsf{d}a) \wedge \mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k} \wedge \mathsf{d}x^{j_1} \wedge \mathsf{d}x^{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{j_l} = \\
a\mathsf{d}b \wedge \mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k} \wedge \mathsf{d}x^{j_1} \wedge \mathsf{d}x^{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{j_l} + \\
b\mathsf{d}a \wedge \mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k} \wedge \mathsf{d}x^{j_1} \wedge \mathsf{d}x^{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{j_l} = \\
\left(\mathsf{d}a \wedge \mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k}\right) \wedge \left(b\mathsf{d}x^{j_1} \wedge \mathsf{d}x^{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{j_l}\right) + \\
(-1)^k \left(a\mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k}\right) \wedge \left(\mathsf{d}b \wedge \mathsf{d}x^{j_1} \wedge \mathsf{d}x^{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{j_l}\right) = \\
\mathsf{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \mathsf{d}\beta
\end{aligned}$$

Pozostaje do sprawdzenia warunek (3). Wystarczy go sprawdzić dla funkcji:

$$\mathsf{dd}f \;=\; \mathsf{d}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}\mathsf{d}x^i\right) \;=\; \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\mathsf{d}x^j\wedge\mathsf{d}x^i \;=\; \sum_{i<j}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}-\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i}\right)\mathsf{d}x^j\wedge\mathsf{d}x^i \;=\; 0$$

Ostatnia równość wynika z równości drugich pochodnych cząstkowych mieszanych dla funkcji gładkich. Zachowania za względu na zamianę zmiennych nie musimy sprawdzać, gdyż mamy jednoznaczność □

Zanim zagłębimy się dalej w teorię zróbmy kilka przykładów:

Przykład 15 Znaleźć $\mathsf{d}A$, jeśli $A\in\Omega^1(\mathbb{R}^3)$

$$A = A_x\mathsf{d}x + A_y\mathsf{d}y + A_z\mathsf{d}z$$

$$\begin{aligned}\mathsf{d}A = \mathsf{d}(A_x\mathsf{d}x + A_y\mathsf{d}y + A_z\mathsf{d}z) &= \mathsf{d}(A_x\mathsf{d}x) + \mathsf{d}(A_y\mathsf{d}y) + \mathsf{d}(A_z\mathsf{d}z) = \\ &\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\mathsf{d}x + \frac{\partial A_x}{\partial y}\mathsf{d}y + \frac{\partial A_x}{\partial z}\mathsf{d}z\right)\wedge\mathsf{d}x + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x}\mathsf{d}x + \frac{\partial A_y}{\partial y}\mathsf{d}y + \frac{\partial A_y}{\partial z}\mathsf{d}z\right)\wedge\mathsf{d}y + \\ &\left(\frac{\partial A_z}{\partial x}\mathsf{d}x + \frac{\partial A_z}{\partial y}\mathsf{d}y + \frac{\partial A_z}{\partial z}\mathsf{d}z\right)\wedge\mathsf{d}z = \\ &\color{gray}{\frac{\partial A_x}{\partial x}\mathsf{d}x\wedge\mathsf{d}x} + \color{red}{\frac{\partial A_x}{\partial y}\mathsf{d}y\wedge\mathsf{d}x} + \color{blue}{\frac{\partial A_x}{\partial z}\mathsf{d}z\wedge\mathsf{d}x} + \\ &\color{red}{\frac{\partial A_y}{\partial x}\mathsf{d}x\wedge\mathsf{d}y} + \color{gray}{\frac{\partial A_y}{\partial y}\mathsf{d}y\wedge\mathsf{d}y} + \frac{\partial A_y}{\partial z}\mathsf{d}z\wedge\mathsf{d}y + \\ &\color{blue}{\frac{\partial A_z}{\partial x}\mathsf{d}x\wedge\mathsf{d}z} + \frac{\partial A_z}{\partial y}\mathsf{d}y\wedge\mathsf{d}z + \color{gray}{\frac{\partial A_z}{\partial z}\mathsf{d}z\wedge\mathsf{d}z} =\end{aligned}$$

Wyrazy szare znikają, gdyż zawierają iloczyn zewnętrzny powtarzających się kowektorów. Pozostałe wyrazy jednokolorowe można dodać, zmieniając ewentualnie kolejność mnożenia zewnetrznego. Otrzymujemy więc

$$\mathsf{d}A = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathsf{d}x\wedge\mathsf{d}y + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathsf{d}z\wedge\mathsf{d}x + \left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathsf{d}y\wedge\mathsf{d}z.$$

Czy współczynniki przy 2-kowektorach bazowych czegoś nie przypominają? ♣

Przykład 16 Znaleźć $\mathsf{d}\omega$, jeśli $\omega\in\Omega^1(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\})$

$$\omega = \frac{x\mathsf{d}y - y\mathsf{d}x}{x^2+xy+y^2}$$

$$\mathsf{d}\omega = \mathsf{d}\left(\frac{1}{x^2+xy+y^2}\right)\wedge(x\mathsf{d}y - y\mathsf{d}x) + \frac{1}{x^2+xy+y^2}\mathsf{d}(x\mathsf{d}y - y\mathsf{d}x) =$$

$$= \frac{(-1)}{(x^2+xy+y^2)^2}[(2x+y)\mathsf{d}x + (2y+x)\mathsf{d}y)]\wedge(x\mathsf{d}y - y\mathsf{d}x) +$$

$$+ \frac{1}{x^2+xy+y^2}(\mathsf{d}x\wedge\mathsf{d}y - \mathsf{d}y\wedge\mathsf{d}x) =$$

$$= \frac{(-1)}{(x^2+xy+y^2)^2}[(2x^2+xy)\mathsf{d}x\wedge\mathsf{d}y - (2y^2+xy)\mathsf{d}y\wedge\mathsf{d}x] + \frac{2}{x^2+xy+y^2}\mathsf{d}x\wedge\mathsf{d}y =$$

$$= \left(\frac{(-1)(2x^2+2xy+2y^2)}{(x^2+xy+y^2)^2} + \frac{2}{x^2+xy+y^2}\right)\mathsf{d}x\wedge\mathsf{d}y = 0$$

♣

Przykład 17 Znaleźć $\mathsf{d}\beta$, jeśli $\beta\in\Omega^1(\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\})$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(xz\mathsf{d}x + yz\mathsf{d}y + (x^2+y^2)\mathsf{d}z\right)$$

$$\mathsf{d}\beta = \mathsf{d}\left(\frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathsf{d}x\right) + \mathsf{d}\left(\frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathsf{d}y\right) + \mathsf{d}(\sqrt{x^2+y^2}\mathsf{d}z) =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathsf{d}z\wedge\mathsf{d}x + \frac{-2xyz}{\sqrt{x^2+y^2}^3}\mathsf{d}y\wedge\mathsf{d}x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathsf{d}z\wedge\mathsf{d}y + \frac{-2xyz}{\sqrt{x^2+y^2}^3}\mathsf{d}x\wedge\mathsf{d}y +$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}(2x\mathsf{d}x + 2y\mathsf{d}y)\wedge\mathsf{d}z =$$

czerwone składniki się upraszczają i otrzymujemy

$$\mathsf{d}\beta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}(\mathsf{d}z\wedge\mathsf{d}x + \mathsf{d}x\wedge\mathsf{d}z) + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}(\mathsf{d}z\wedge\mathsf{d}y + \mathsf{d}y\wedge\mathsf{d}z) = 0.$$

♣

Przy okazji powyższych rachunków okazało się, że istnieją niezerowe (i całkiem skomplikowane) formy, których różniczka jest zero. Używać będziemy następujących nazw: jeśli $\mathsf{d}\alpha = 0$, to α nazywa się formą *zamkniętą*, jeśli $\alpha = \mathsf{d}\beta$, to α jest formą *zupełną*. Każda forma zupełna jest zamknięta. Czy jest też odwrotnie? Odpowiedź na to pytanie odkładamy na nieodległą przyszłość.

Oprócz wzoru „na współrzędnych” oraz niekonstruktywnej definicji poprzez własności, mamy także wzór na różniczkę formy wyrażoną za pomocą jej wartości na układzie pól wektorowych. Wzór ten pokazuje związek różniczkowania form z nawiasem Liego pól wektorowych:

Fakt 6 (Wzór Cartana) *Jeśli $X_1, X_2, \dots, X_{k+1}\in\mathcal{X}(M)$ oraz $\omega\in\Omega^k(M)$, to*

$$d\omega(X_1, X_2, \dots, X_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-1}X^i\omega(X_1,\dots\check{X}_i\dots,X_{k+1}) +$$

$$+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,\dots\check{X}_i\dots\check{X}_j\dots,X_{k+1})$$

Symbol $\check{X}_i$ oznacza „opuszczony” element układu pól wektorowych.

Dowód: Sprawdźmy przede wszystkim, czy powyższy wzór na $\mathsf{d}\omega$ określa rzeczywiście $k+1$-formę. Na oko widać, że wyrażenie po prawej stronie jest liniowe ze względu na każdy z argumentów, antysymetrię też dość łatwo sprawdzić. Trzeba jeszcze jednak zwrócić uwagę na to, czy wartość prawej strony zależy jedynie od wartości pól w punkcie a nie na przykład także od pochodnych tych pól. Na pierwszy rzut oka pochodne mogą być zaangażowane, gdyż we wzorze występuje nawias pól a także działanie pola na funkcję skonstruowaną z formy i pozostałych pól. Sprawdzić to można na przykład badając jak zachowuje się prawa strona, kiedy jedno z pól pomnożymy przez funkcję. Ze względu na antysymetrię wystarczy pomnożyć pierwsze pole. Jeśli rzeczywiście wzór określa $(k+1)$-formę, to powinniśmy otrzymać wzór

$$\mathsf{d}\omega(fX_1, X_2, \ldots, X_{k+1}) = f\mathsf{d}\omega(X_1, X_2, \ldots, X_{k+1}),$$

czyli żadnego różniczkowania funkcji !!! Sprawdzamy: Gdy w pierwszej sumie weźmiemy $i=1$, otrzymamy

$$fX_1\omega(X_2, \ldots, X_{k+1}),$$

gdy $i>1$

$$\begin{aligned}(-1)^{i-1}X_i\omega(fX_1, \ldots \check{X}_i \ldots, X_{k+1}) = \\ (-1)^{i-1}X_if\omega(X_1, \ldots \check{X}_i \ldots, X_{k+1}) = \\ (-1)^{i-1}\Big((X_if)\omega(X_1, \ldots \check{X}_i \ldots, X_{k+1}) + fX_i\omega(X_1, \ldots \check{X}_i \ldots, X_{k+1})\Big).\end{aligned}$$

Składnik zaznaczony na czerwono jest niepożądany, gdyż zwiera różniczkowanie funkcji f. Sprawdzamy kolejne składniki. W drugiej sumie, gdy $i \neq 1$ mamy

$$(-1)^{i+j}\omega([X_i, X_j], fX_1, \ldots \check{X}_i \ldots \check{X}_j \ldots, X_{k+1}) = (-1)^{i+j}f\omega([X_i, X_j], X_1, \ldots \check{X}_i \ldots \check{X}_j \ldots, X_{k+1})$$

Jeśli jednak $i=1$ to nawias przyjmuje postać

$$[fX_1, X_j] = f[X_1, X_j] - (X_jf)X_1,$$

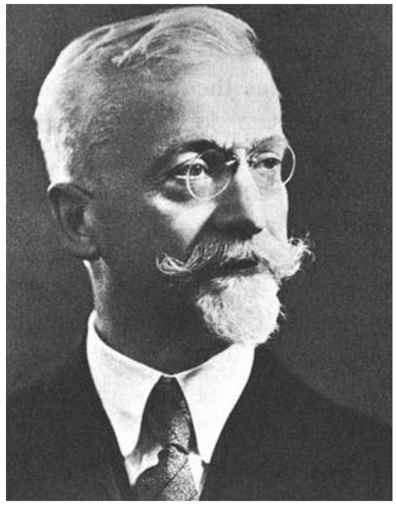
co po wstawieniu „pod ω" daje

$$\begin{aligned}(-1)^{1+j}\omega(f[X_1, X_j] - (X_jf)X_1, X_2, \ldots \check{X}_j \ldots, X_{k+1}) = \\ (-1)^{1+j}f\omega([X_1, X_j], X_2, \ldots \check{X}_j \ldots, X_{k+1}) - (-1)^{1+j}(X_jf)\omega(X_1, X_2 \ldots \check{X}_j \ldots, X_{k+1})\end{aligned}$$

Kolejne wyrażenie na czerwono też jest niepożądane, gdyż zawiera różniczkowanie funkcji. Jednak oba czerwone składniki różnią się znakiem (dla $i=j$) zatem uproszczą się w wyrażeniu po prawej stronie wzoru Cartana. Wyrażenie to zależy więc tylko od wartości pól w punkcie a nie w pewnym otoczeniu. Teraz wystarczy tylko sprawdzić, czy wzór ten daje to co trzeba we współrzędnych. W tym celu trzeba obliczyć prawą stronę na polach współrzędnościowych $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$. Jest to bardzo proste, ponieważ pola współrzędnościowe komutują, znika więc druga suma we wzorze. Dalszy rachunek jest już oczywisty.□

Zobaczmy, jak wygląda różniczka funkcji f, jednoformy η i dwuformy postaci $\mathsf{d}\eta$ według wzoru Cartana:

$$\mathsf{d}f(X) = Xf$$



Rys. 23: Élie Cartan (1869-1951).

$$\mathsf{d}\eta(X,Y) = X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X,Y])$$

Policzmy teraz $\mathsf{dd}\eta(X,Y,Z)$. Oczywiście powinno wyjść zero:

$$\begin{aligned}
0 = \mathsf{dd}\eta(X,Y,Z) = \\
X\mathsf{d}\eta(Y,Z) - Y\mathsf{d}\eta(X,Z) + Z\mathsf{d}\eta(X,Y) - \mathsf{d}\eta([X,Y],Z) + \mathsf{d}\eta([X,Z],Y) - \mathsf{d}\eta([Y,Z],X) = \\
X\left(Y\eta(Z) - Z\eta(Y) - \eta([Y,Z])\right) \\
-Y\left(X\eta(Z) - Z\eta(X) - \eta([X,Z])\right) \\
+Z\left(X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X,Y])\right) \\
-[X,Y]\eta(Z) + Z\eta([X,Y]) + \eta([[X,Y],Z]) \\
+[X,Z]\eta(Y) - Y\eta([X,Z]) - \eta([[X,Z],Y]) \\
-[Y,Z]\eta(X) + X\eta([Y,Z]) + \eta([[Y,Z],X]) =
\end{aligned}$$

Jednokolorowe wyrażenia się upraszczają i zostaje

$$\begin{aligned}
= -X\eta([Y,Z]) + Y\eta([X,Z]) - Z\eta([X,Y]) \\
+ Z\eta([X,Y]) + \eta([[X,Y],Z]) - Y\eta([X,Z]) - \eta([[X,Z],Y]) + X\eta([Y,Z]) + \eta([[Y,Z],X]) =
\end{aligned}$$

Jednokolorowe znowu się upraszczają, teraz zostaje

$$= \eta([[X,Y],Z] - [[X,Z],Y] + [[Y,Z],X])$$

Znikanie drugiej różniczki jest więc równoważne tożsamości Jacobiego.

Niech $\varphi : M \to N$ będzie odwzorowaniem gładkim. Dyskutowaliśmy już cofnięcie różniczki funkcji określone wzorem

$$\varphi^*\mathsf{d}f = \mathsf{d}(f\circ\varphi).$$

Zauważmy, że zachodzi

$$(\varphi^*\mathsf{d}f)(v) = \mathsf{d}f(\mathsf{T}\varphi(v)).$$

Korzystając z tej obserwacji można zdefiniować cofnięcie dowolnej k-formy:

$$\varphi^*\omega(v_1, \ldots, v_k) = \omega(\mathsf{T}\varphi(v_1), \ldots, \mathsf{T}\varphi(v_k))$$

Łatwo sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że

$$\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = \varphi^*\alpha \wedge \varphi^*\beta.$$

Jak zachowuje się cofnięcie formy względem różniczki?

Fakt 7

$$d(\varphi^*\alpha) = \varphi^*(d\alpha)$$

Dowód: Lokalnie każda forma jest sumą wyrażeń postaci

$$f\mathsf{d}g_1 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}g_k.$$

Mamy więc

$$\varphi^*(f\mathsf{d}g_1 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}g_k) = (f \circ \varphi)(\varphi^*\mathsf{d}g_1) \wedge \cdots \wedge (\varphi^*\mathsf{d}g_k)$$

i

$$\mathsf{d}[\varphi^*(f\mathsf{d}g_1 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}g_k)] = \mathsf{d}(f \circ \varphi) \wedge (\varphi^*\mathsf{d}g_1) \wedge \cdots \wedge (\varphi^*\mathsf{d}g_k) = (\varphi^*\mathsf{d}f) \wedge (\varphi^*\mathsf{d}g_1) \wedge \cdots \wedge (\varphi^*\mathsf{d}g_k)$$

Z drugiej strony

$$\mathsf{d}(f\mathsf{d}g_1 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}g_k) = \mathsf{d}f \wedge \mathsf{d}g_1 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}g_k$$

i

$$\varphi^*\mathsf{d}(f\mathsf{d}g_1 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}g_k) = (\varphi^*\mathsf{d}f) \wedge (\varphi^*\mathsf{d}g_1) \wedge \cdots \wedge \varphi^*(\mathsf{d}g_k).$$

□

4.3 Formy zamknięte i zupełne.

Policzmy różniczkę następującej formy różniczkowej określonej na $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$

$$\alpha = \frac{y\mathsf{d}x - x\mathsf{d}y}{x^2 + y^2}$$

$$\mathsf{d}\alpha = \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)}\mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}x - \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)}\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y =$$
$$\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)}\mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}x + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)}\mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}x = \frac{x^2 - y^2 + y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)}\mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}x = 0$$

Okazuje się więc, że forma ewidentnie niezerowa, mająca współczynniki wyrażające się dość skomplikowanymi wzorami i nie będące stałymi funkcjami ma różniczkę równą zero. Już wiemy, że tak powinno być jeśli forma α jest zupełna, to znaczy jeśli $\alpha = \mathsf{d}f$ dla pewnej funkcji $f : \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \to \mathbb{R}$. Spróbujmy zmaleźć taką funkcję. Dla form określonych na całym $\mathbb{R}^2$