Korzystając z tej obserwacji można zdefiniować cofnięcie dowolnej k-formy:

$$\varphi^*\omega(v_1,\ldots,v_k)=\omega(\mathsf{T}\varphi(v_1),\ldots,\mathsf{T}\varphi(v_k))$$

Łatwo sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że

$$\varphi^*(\alpha\wedge\beta)=\varphi^*\alpha\wedge\varphi^*\beta.$$

Jak zachowuje się cofnięcie formy względem różniczki?

Fakt 7

$$d(\varphi^*\alpha)=\varphi^*(d\alpha)$$

Dowód: Lokalnie każda forma jest sumą wyrażeń postaci

$$f\mathsf{d}g_1\wedge\cdots\wedge\mathsf{d}g_k.$$

Mamy więc

$$\varphi^*(f\mathsf{d}g_1\wedge\cdots\wedge\mathsf{d}g_k)=(f\circ\varphi)(\varphi^*\mathsf{d}g_1)\wedge\cdots\wedge(\varphi^*\mathsf{d}g_k)$$

i

$$\mathsf{d}[\varphi^*(f\mathsf{d}g_1\wedge\cdots\wedge\mathsf{d}g_k)]=\mathsf{d}(f\circ\varphi)\wedge(\varphi^*\mathsf{d}g_1)\wedge\cdots\wedge(\varphi^*\mathsf{d}g_k)=(\varphi^*\mathsf{d}f)\wedge(\varphi^*\mathsf{d}g_1)\wedge\cdots\wedge(\varphi^*\mathsf{d}g_k)$$

Z drugiej strony

$$\mathsf{d}(f\mathsf{d}g_1\wedge\cdots\wedge\mathsf{d}g_k)=\mathsf{d}f\wedge\mathsf{d}g_1\wedge\cdots\wedge\mathsf{d}g_k$$

i

$$\varphi^*\mathsf{d}(f\mathsf{d}g_1\wedge\cdots\wedge\mathsf{d}g_k)=(\varphi^*\mathsf{d}f)\wedge(\varphi^*\mathsf{d}g_1)\wedge\cdots\wedge\varphi^*(\mathsf{d}g_k).$$

□

4.3 Formy zamknięte i zupełne.

Policzmy różniczkę następującej formy różniczkowej określonej na $\mathbb{R}^2\setminus(0,0)$

$$\alpha=\frac{y\mathsf{d}x-x\mathsf{d}y}{x^2+y^2}$$

$$\mathsf{d}\alpha=\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)}\mathsf{d}y\wedge\mathsf{d}x-\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)}\mathsf{d}x\wedge\mathsf{d}y=$$
$$\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)}\mathsf{d}y\wedge\mathsf{d}x+\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)}\mathsf{d}y\wedge\mathsf{d}x=\frac{x^2-y^2+y^2-x^2}{(x^2+y^2)}\mathsf{d}y\wedge\mathsf{d}x=0$$

Okazuje się więc, że forma ewidentnie niezerowa, mająca współczynniki wyrażające się dość skomplikowanymi wzorami i nie będące stałymi funkcjami ma różniczkę równą zero. Już wiemy, że tak powinno być jeśli forma α jest zupełna, to znaczy jeśli $\alpha=\mathsf{d}f$ dla pewnej funkcji $f:\mathbb{R}^2\setminus(0,0)\to\mathbb{R}$. Spróbujmy zmaleźć taką funkcję. Dla form określonych na całym $\mathbb{R}^2$

i mających znikającą różniczkę procedura znajdowania odpowiedniej funkcji jest względnie prosta: Niech $\beta = f(x,y)\mathsf{d}x + g(x,y)\mathsf{d}y$ będzie gładką formą na $\mathbb{R}^2$ taką, że $\mathsf{d}\beta = 0$. Co to oznacza dla współczynników f i g:

$$\mathsf{d}\beta = \frac{\partial f}{\partial y}\mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}x + \frac{\partial g}{\partial x}\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y$$

$$\mathsf{d}\beta = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

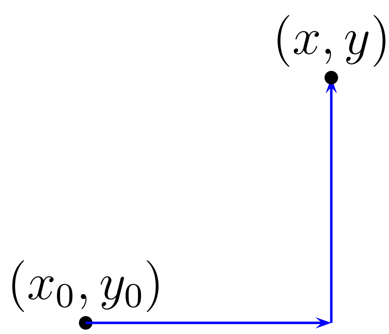
Niech teraz (x_0, y_0) będzie dowolnym punktem $\mathbb{R}^2$. Funkcja

$$h(x,y) = \int_{x_0}^{x} f(t,y_0)\mathsf{d}t + \int_{y_0}^{y} g(x,t)\mathsf{d}t$$

jest gładką funkcją na $\mathbb{R}^2$, ponadto

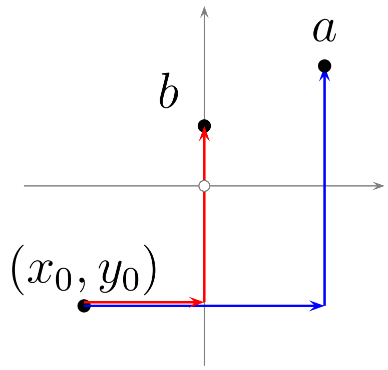
$$\begin{aligned}
\mathsf{d}h(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{x_0}^{x} f(t,y_0)\mathsf{d}t + \int_{y_0}^{y} g(x,t)\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{x_0}^{x} f(t,y_0)\mathsf{d}t + \int_{y_0}^{y} g(x,t)\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}y = \\
\left(f(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}x + g(x,y)\mathsf{d}y = \\
\left(f(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}x + g(x,y)\mathsf{d}y = \\
\left(f(x,y_0) + f(x,y) - f(x,y_0)\right)\mathsf{d}x + g(x,y)\mathsf{d}y = \beta
\end{aligned}$$

W powyższym rachunku skorzystaliśmy z równości pochodnych cząstkowych funkcji f i g. O powyższej procedurze można myśleć jak o całkowaniu formy β po łamanej składającej się z odcinków od (x_0, y_0) do (x, y_0) i dalej od (x, y_0) do (x, y). Na kolejnych wykładach mówić będziemy o całkowaniu form i wtedy okaże się, że jest to dokładnie to. Na razie jednak powyższe całki można całkować jako całki z parametrem. Wynik całkowania jest funkcją punktu końcowego. Ponieważ przepis dotarcia do punktu końcowego jest jednoznacznie określony (Rys. 24) dostajemy dobrze określoną funkcję. Własności całek zapewniają gładkość tej funkcji. Funk-



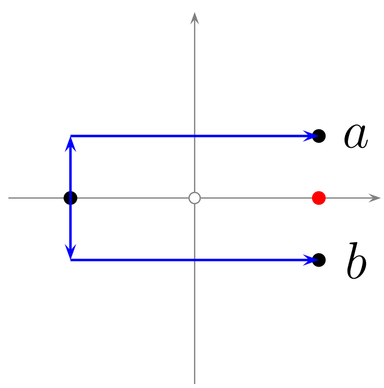
Rys. 24: Konstrukcja funkcji pierwotnej

cję h nazwiemy *funkcją pierwotną* formy β. Ze względu na dowolność wyboru (x_0, y_0) funkcji pierwotnych jest wiele. Dwie funkcje pierwotne tej samej formy β różnią się o funkcję, której różniczka jest równa 0, czyli o funkcję stałą.



Rys. 25: Problemy z konstrukcją funkcji pierwotnej.

Spróbujmy tak samo znaleźć funkcję pierwotną formy α. Napotkamy tutaj problem przedstawiony na rysunku 25. Do punktu b nie możemy dojść „według przepisu” ponieważ musielibyśmy przejść przez punkt w którym forma nie jest określona. Nie da się więc policzyć jednej z całek występujących we wzorze. Można spróbować obejść ten problem definiując bardziej skomplikowane przepisy dochodzenia do każdego z punktów. Jeśli np. $(x_0, y_0) = (-1, 0)$ możemy ustanowić następującą zasadę: do punktów w górnej półpłaszczyźnie dochodzimy idąc najpierw w górę potem poziomo, a w dolnej najpierw w dół, potem poziomo (Rys. 26). Co



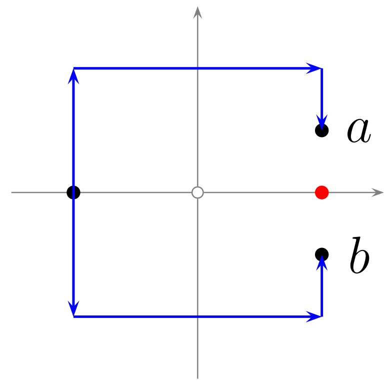
Rys. 26: A może tak?

jednak zrobić z punktami na dodatniej półosi poziomej? Okazuje się, że nie da się wymyśleć takiego przepisu, żeby funkcja pierwotna określona była także w punktach półosi poziomej dodatniej i jednocześnie była ciągła. Jeśli na przykład $a = (1, \epsilon)$ a $b = (1, -\epsilon)$, to zgodnie opisanym powyżej przepisem

$$h(a) = \arctan(\epsilon) + 2\arctan(1/\epsilon), \qquad h(b) = -\arctan(\epsilon) - 2\arctan(1/\epsilon).$$

Gdy ϵ dąży do zera granica „od góry” jest π a od dołu $-\pi$. Może jednak tak jest źle, bo zmniejszanie epsilona oznacza, że trzeba w granicy przejść przez niedozwolony punkt. Co zmieni się, jeśli droga będzie wyglądała tak jak na rysunku 27? Droga od góry to

$$h(a) = \arctan(1) + \arctan(1) - \arctan(-1) - \arctan(\epsilon) + \arctan(1) = \pi - \arctan(\epsilon)$$



Rys. 27: Jeszcze jedna próba.

a droga od dołu

$$h(b) = -\arctan(1) - \arctan(1) + \arctan(-1) + \arctan(\epsilon) - \arctan(1) = -\pi + \arctan(\epsilon)$$

Gdy zmniejszamy epsilon droga od góry daje w granicy wartość π, a od dołu $-\pi$. Konstruując funkcję pierwotną do β napotykamy wciąż na trudności. Uzasadnijmy ostatecznie, że zrobić się tego nie da. Najłatwiej będzie użyć dwóch układów współrzędnych typu biegunowego. Proste rachunki pokazują, że w układzie współrzędnych (r, φ) takim, że $r > 0$ i $\varphi \in]0, 2\pi[$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ określonym na obszarze $\mathbb{R}^2 \setminus \{(t,0), t \geqslant 0\}$ otrzymujemy $\beta = -\mathsf{d}\varphi$. Jedna z możliwych funkcji pierwotnych (w tym obszarze) to $h_0(r, \varphi) = -\varphi$. Podobny układ współrzędnych możemy zadać tymi samymi wzorami zastępując r przez $\tilde{r}$ i φ przez $\tilde{\varphi}$ w obszarze $\mathbb{R}^2 \setminus \{(t,0), t \leqslant 0\}$ dla $\tilde{\varphi} \in]-\pi, \pi[$. Znowu $\beta = -\mathsf{d}\tilde{\varphi}$ i jedna z możliwych funkcji pierwotnych ma postać $h_1(\tilde{r}, \tilde{\varphi}) = -\tilde{\varphi}$. Załóżmy teraz, że istnieje funkcja pierwotna f określona na całej dziedzinie formy β. Funkcja ta może różnić się od h_0 i h_1 w obszarze ich określoności co najwyżej o stałą. Niech więc $f = h_0 + \varphi_0$ i $f = h_1 + \varphi_1$. Porównajmy wartości funkcji w punktach $p = (0, 1)$ i $q = (0, -1)$.

$$h_0(p) = \frac{\pi}{2}, \quad h_0(q) = \frac{3\pi}{2}, \quad h_1(p) = \frac{\pi}{2}, \quad h_1(q) = -\frac{\pi}{2}$$

$$f(p) = \frac{\pi}{2} + \varphi_0 = \frac{\pi}{2} + \varphi_1 \quad \Rightarrow \varphi_0 = \varphi_1,$$

$$f(q) = \frac{3\pi}{2} + \varphi_0 = -\frac{\pi}{2} + \varphi_1 \quad \Rightarrow 2\pi + \varphi_0 = \varphi_1$$

Porównanie wartości funkcji f w punktach q i p prowadzi do sprzeczności. Funkcja f pierwotna do β na całej dziedzinie tej formy nie istnieje! Powyższy przykład pokazuje też, że problem leży nie tyle w formie, co w obszarze na którym ta forma jest określona.

Definicja 17 Mówimy, że rozmaitość M jest *ściągalna do punktu* $x_0 \in M$ jeśli istnieje gładkie odwzorowanie

$$H : M \times [0, 1] \longrightarrow M$$

takie, że

$$\forall x \in M \;\; H(x, 1) = x, \qquad \forall x \in M \;\; H(x, 0) = x_0.$$

Płaszczyzna $\mathbb{R}^2$ jest ściągalna do zera: $H(x,y,t) = (tx, ty)$ (i do każdego innego punktu), zaś $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ nie jest ściągalna do żadnego punktu. Związek istnienia formy pierwotnej z kształtem obszaru wypowiedziany jest w poniższym twierdzeniu nazywanym *Lematem Poincaré*:

Twierdzenie 4 *Każda forma zamknięta na rozmaitości ściągalnej jest zupełna.*

Dowód: Zanim przejdziemy do właściwego dowodu twierdzenia potrzebujemy kilku ogólnych obserwacji. Weźmy odcinek I otwarty, zawierający $[0,1]$, rozmaitość M i rodzinę odwzorowań

$$i_t : M \to M \times I, \qquad i_t(x) = (x,t).$$

Niech ω będzie jednoformą na $M \times I$. Wiadomo, że $\mathsf{T}(M \times I) = \mathsf{T}M \times \mathsf{T}I$ oraz $\mathsf{T}^*(M \times I) = \mathsf{T}^*M \times \mathsf{T}^*I$. Jednoformę ω można więc zapisać jako sumę

$$\omega = \tilde{\omega} + f\mathsf{d}t,$$

gdzie $\tilde{\omega}$ to odwzorowanie $M \times I \to \mathsf{T}^*M$ zachowujące projekcję na M a f to funkcja na $M \times I$. Odnotujmy także, że

$$i_t^*\omega = \tilde{\omega}(t, \cdot).$$

Uzasadnimy teraz, że jeśli $\mathsf{d}\omega = 0$ to $i_1^*\omega - i_0^*\omega$ jest zupełna. Różniczkę $\mathsf{d}\omega$ wyrazić można za pomocą różniczkowania w kierunku M i kierunku I oddzielnie. $\mathsf{d}\omega = \mathsf{d}_M\omega + \mathsf{d}_I\omega = \mathsf{d}_M\tilde{\omega} + \mathsf{d}_I\tilde{\omega} + \mathsf{d}_M f \wedge \mathsf{d}t$. Różniczka $\mathsf{d}_M\tilde{\omega}$ nie zawiera czynnika $\mathsf{d}t$. Różniczkę $\mathsf{d}_I\tilde{\omega}$ interpretować można następująco. Skoro $\tilde{\omega}$ jest odwzorowaniem z $M \times I$ w T^*M zachowującym rzut na M, to dla ustalonego $x \in M$ odwzorowanie $t \mapsto \tilde{\omega}(x,t)$ jest krzywą w przestrzeni wektorowej T^*_xM. Wektor styczny do tej krzywej dla każdej wartości parametru może być interpretowany jako element tej samej przestrzeni wektorowej. Oznaczmy ten wektor przez $\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial t}$. Różniczka

$$\mathsf{d}_I\tilde{\omega} = \mathsf{d}t \wedge \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial t}.$$

Znikanie $\mathsf{d}\omega$ oznacza, że

$$0 = \mathsf{d}\omega = \mathsf{d}_M\tilde{\omega} + \mathsf{d}t \wedge \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial t} + \mathsf{d}_M f \wedge \mathsf{d}t = \mathsf{d}_M\tilde{\omega} + \left(\mathsf{d}_M f - \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial t}\right) \wedge \mathsf{d}t$$

Pierwszy składnik nie zawiera $\mathsf{d}t$, więc znikanie różniczki oznacza znikanie każdego ze składników oddzielnie. W szczególności

$$\mathsf{d}_M f = \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial t}.$$

Z definicji całki z funkcji o wartościach wektorowych mamy, że

$$i_1^*\omega(x) - i_0^*\omega(x) = \tilde{\omega}(x,1) - \tilde{\omega}(x,0) = \int_0^1 \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial t} dt = \int_0^1 (\mathsf{d}_M f)(x,t) dt = \mathsf{d}(\int_0^1 f(\cdot,t)dt)(x)$$

Oznaczając

$$g(x) = \int_0^1 f(x,t)dt$$

mamy

$$i_1^*\omega(x) - i_0^*\omega(x) = \mathsf{d}g(x).$$

Identyczny rachunek przeprowadzić można dla k-formy ω.

$$\omega = \tilde{\omega} + \mathsf{d}t \wedge \eta,$$

gdzie $\tilde{\omega}$ to rodzina k-form na M parametryzowana t a η to podobna rodzina $(k-1)$-form.

$$\mathsf{d}\omega = \mathsf{d}_M\tilde{\omega} + \mathsf{d}t \wedge \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial t} - \mathsf{d}t \wedge \mathsf{d}_M\eta = \mathsf{d}_M\tilde{\omega} + \mathsf{d}t \wedge \left(\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial t} - \mathsf{d}_M\eta\right).$$

$$\mathsf{d}\omega = 0 \quad \text{oznacza} \quad \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial t} = \mathsf{d}_M\eta.$$

Niech teraz $I : \Omega^k(M \times I) \to \Omega^{k-1}(M)$ dane będzie wzorem

$$I(\omega)(x) = \int_0^1 \eta(x,t)dt.$$

W szczególności

$$I(\mathsf{d}\omega) = \int_0^1 \left(\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial t} - \mathsf{d}_M\eta\right) dt = \int_0^1 \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial t} - \int_0^1 (\mathsf{d}_M\eta)dt = \tilde{\omega}(1,\cdot) - \tilde{\omega}(0,\cdot) - \mathsf{d}\left(\int_0^1 \eta dt\right).$$

$$I(\mathsf{d}\omega) + \mathsf{d}(I(\omega)) = i_1^*\omega(x) - i_0^*\omega(x)$$

Oczywiście gdy $\mathsf{d}\omega = 0$ to

$$i_1^*\omega(x) - i_0^*\omega(x) = \mathsf{d}(I(\omega)).$$

Przejdźmy teraz do właściwego dowodu lematu. Niech M będzie rozmaitością ściągalną do punktu x_0 i niech H będzie odpowiednim odwzorowaniem ściągnięcia

$$H : M \times I \to M.$$

Weźmy także zamkniętą formę α. Oczywiście skoro $\mathsf{d}\alpha = 0$ to także $\mathsf{d}H^*\alpha = 0$. Zgodnie więc powyższymi rachunkami

$$i_1^*H^*\alpha - i_0^*H^*\alpha = \mathsf{d}(I(H^*\alpha)).$$

Pierwszy ze składników to

$$i_1^*H^*\alpha = (H \circ i_1)^*\omega = \omega,$$

bo H złożone z i_1 jest identycznością. W drugim składniku złożenie $(H \circ i_0)$ jest odwzorowaniem stałym: $(H \circ i_0)(x) = x_0$. Cofnięcie formy odwzorowaniem stałym jest zerowe, zatem

$$i_0^*H^*\alpha = (H \circ i_0)^*\omega = 0.$$

Ostatecznie

$$\omega = \mathsf{d}(I(H^*\alpha)).$$

□