Kolokwium

Zadanie 1. Wprowadzamy w $\mathbb{R}^3$ standardową strukturę rozmaitości gładkiej. Niech $\{dx|_p, dy|_p, dz|_p\}$ będzie bazą w przestrzeni kostycznej $\mathrm{T}_p^*\mathbb{R}^3$ stowarzyszoną ze współrzędnymi kartezjańskimi w punkcie $p \in \mathbb{R}^3$. Ustal postać elementów bazy $\{du|_p, dv|_p, dz|_p\}$ przestrzeni wektorowej $\mathrm{T}_p^*\mathbb{R}^3$ jako liniowe kombinacje $dx|_p, dy|_p, dz|_p$ dla lokalnego układu współrzędnych $\{u, v, z\}$ postaci

$$x := a \cosh u \cos v, \qquad y := a \sinh u \sin v, \qquad z := z,$$

gdzie $u \in]0, \infty[, v \in]0, 2\pi[, z \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Niech $\mathrm{T}_p\mathbb{R}^3$ będzie przestrzenią dualną do $\mathrm{T}_p^*\mathbb{R}^3$ i niech $\{\partial_u|_p, \partial_v|_p, \partial_z|_p\}$ będzie bazą dualną do $\{du|_p, dv|_p, dz|_p\}$. Napisz postać $\{\partial_u|_p, \partial_v|_p, \partial_z|_p\}$ jako liniowe kombinacje $\{\partial_x|_p, \partial_y|_p, \partial_z|_p\}$. *(Uwaga: Współczynniki kombinacji liniowej można wyrazić w dowolnym układzie współrzędnych.)*

Zadanie 2. Oblicz przestrzeń styczną w dowolnych punktach podrozmaitości $\mathbb{R}^4$ postaci

$$\mathbb{S}^3 := \left\{ (x^1, \ldots, x^4) : \sum_{i=1}^{4} (x^i)^2 = 1 \right\}, \ \mathbb{H}^3 := \left\{ (x^1, \ldots, x^4) \neq 0 : \sum_{i=1}^{4} (-1)^i (x^i)^2 = 0 \right\},$$

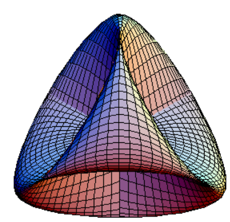
Oblicz anihilator do przestrzeni stycznej do podrozmaitości $\mathbb{S}^3 \cap \mathbb{H}^3$ w dowolnym punkcie $(a_1, \ldots, a_4) \in \mathbb{S}^3 \cap \mathbb{H}^3$. Podaj niezerujące się pole wektorowe styczne do $\mathbb{S}^3 \cap \mathbb{H}^3$.

Zadanie 3. Niech $\mathbb{R}P^2$ będzie przestrzenią projektywną $\mathbb{R}^3$, tj. rodzina podzbiorów $[(x, y, z)] := \{\lambda(x, y, z) : \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\}$ dla $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\backslash\{(0, 0, 0)\}$. Zbiór $\mathbb{R}P^2$ posiada strukturę rozmaitości gładkiej względem atlasu postaci

$$\varphi_1 : ([(x^1, x^2, x^3)] \in U_1 \subset \mathbb{R}P^2 \mapsto (x^2/x^1, x^3/x^1) \in \mathbb{R}^2,$$

$$\varphi_2 : ([(x^1, x^2, x^3)] \in U_2 \subset \mathbb{R}P^2 \mapsto (x^1/x^2, x^3/x^2) \in \mathbb{R}^2,$$

$$\varphi_3 : ([(x^1, x^2, x^3)] \in U_3 \subset \mathbb{R}P^2 \mapsto (x^1/x^3, x^2/x^3) \in \mathbb{R}^2,$$



gdzie $U_i := \{[(x^1, x^2, x^3)] \in \mathbb{R}P^1 : x^i \neq 0)\}$ dla $i = 1, 2, 3$. Niech $\phi : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^3$ będzie miał postać $\phi([(x, y, z)]) := (yz, xz, xy)/(x^2 + y^2 + z^2)$, dla każdego $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\backslash\{0\}$. Sprawdź w których punktach ϕ jest immersją. Obraz ϕ nazywa się powierzchnią rzymską.

Zadanie 4. Niech $0 < r < 1$. Pokaż, że odwzorowanie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ postaci

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + r^2 - z^2 - 1)^2 - 4(x^2 + y^2)(r^2 - z^2)$$

jest submersją w punktach $f^{-1}(0)$. Wykaż, że $f^{-1}(0)$ jest torusem.