Okazuje się więc, że wyrażenia (4) i (5) są równe. Można więc powiedzieć, że wszystkie wyrażenia (2, 3, 4, 5) opisują tę samą wielkość, którą można nazwać całką z formy α po jednowymiarowej podrozmaitości (krzywej) będącej obrazem γ. Całkę tę obliczamy we współrzędnych i używając parametryzacji krzywej, jednak wynik nie zależy zarówno od wyboru współrzędnych jak i parametryzacji.

Oczywiście nie jest to pełna teoria całkowania form po jednowymiarowych podrozmaitościach. W szczególności nie rozważaliśmy co robić, jeśli krzywa nie mieści się w dziedzinie jednego układu współrzędnych. Pominęliśmy też kilka innych detali. Powyższe rozważania są jednak wystarczające do uzasadnienia stwierdzenia, iż *jednoformy różniczkowe służą do całkowania wzdłuż krzywych*.

Jednym ze sposobów rozpoznawania jakie narzędzie matematyczne powinno być użyte do reprezentowania danej wielkości fizycznej jest przyjrzenie się co się z tą wielkością robi. Jako przykład niech posłuży nam pojęcie siły. Siłę całkujemy wzdłuż trajektorii uzyskując pracę. W podręcznikach do mechaniki możemy znaleźć wzory podobne do $W = \int \vec{F} \mathsf{d}\vec{s}$ lub $\mathsf{d}W = \vec{F}\mathsf{d}\vec{s}$, które wskazują, że być może siłę należałoby reprezentować raczej kowektorem niż wektorem. W teorii zwanej mechaniką analityczną tak się właśnie robi.

3.5 Nawias Liego

Gładkie pole wektorowe definiuje różniczkowanie algebry $\mathcal{C}^\infty(M)$ nad identycznością jako homomorfizmem algebr. Istotnie, skoro w każdym punkcie $q \in M$ wartość $X(q)$ jest różniczkowaniem algebry $\mathcal{C}^\infty(M)$ o wartościach rzeczywistych, zbierając wartości różniczkowania punkt po punkcie i korzystając z gładkości jako wartość $X(f)$ otrzymujemy gładką funkcję $q \mapsto X(q)(f)$. Reguła Leibniza jest spełniona, gdyż jest spełniona dla $X(q)$. Można pokazać (czego nie będziemy robić), że pola wektorowe to wszystkie różniczkowania algebry $\mathcal{C}^\infty(M)$ nad identycznością. W zbiorze różniczkowań algebry nad identycznością określony jest komutator różniczkowań. Można sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że $[D_1, D_2]$ określone wzorem

$$[D_1, D_2](a) = D_1(D_2(a)) - D_2(D_1(a))$$

jest różniczkowaniem. Istotnie

$$\begin{aligned}
[D_1, D_2](ab) = D_1(D_2(ab)) - D_2(D_1(ab)) = D_1(aD_2(b) + D_2(a)b) - D_2(aD_1(b) + D_1(a)b) = \\
aD_1(D_2(b)) + D_1(a)D_2(b) + D_1(D_2(a))b + D_2(a)D_1(b) - \\
aD_2(D_1(b)) - D_2(a)D_1(b) - D_2(D_1(a))b - D_1(a)D_2(b) =
\end{aligned}$$

Jednokolorowe wyrażenia się upraszczają i otrzymujemy

$$\begin{aligned}
= aD_1(D_2(b)) + D_1(D_2(a))b + aD_2(D_1(b)) - D_2(D_1(a))b = \\
a[D_1(D_2(b)) - D_2(D_1(b))] + [D_1(D_2(a)) - D_2(D_1(a))]b = \\
a[D_1, D_2](b) + [D_1, D_2](a)b
\end{aligned}$$

Skoro komutator różniczkowań jest różniczkowaniem, a wszystkie różniczkowania to pola wektorowe, to komutator pól wektorowych także jest polem wektorowym. Komutator w zastosowaniu do pól wektorowych nazywany jest *nawiasem Liego*. Jest to odwzorowanie

$$\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$$

antysymetryczne (tzn. $[X, Y] = -[Y, X]$), spełniające następujące warunki:

$$[X, fY] = f[X, Y] + X(f)Y$$

oraz

$$[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]].$$

Druga z równości nazywana jest *tożsamością Jacobiego*. Mówi ona, że odwzorowanie

$$[X, \cdot] : \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$$

samo jest różniczkowaniem algebry $(\mathcal{X}(M), [\cdot, \cdot])$. Algebra ta jest algebrą nieprzemienną (antysymetryczną), bez jedynki i bez łączności. Algebra z antysymetrycznym działaniem spełniającym tożsamość Jacobiego nazywa się *algebrą Liego*. Pierwszą równość sprawdzamy bezpośrednim rachunkiem na współrzędnych. Tożsamość Jacobiego jest charakterystyczna dla komutatora różniczkowań i także może zostać sprawdzona bezpośrednim, trochę nudnym rachunkiem.

Zapiszmy nawias pól wektorowych we współrzędnych:

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j},$$

$$\begin{aligned}[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(Y^j \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) - Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}\left(X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right) = \\ X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} + X^i Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i} - Y^j X^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} = \\ X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i} = \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial f}{\partial x^j},\end{aligned}$$

$$[X, Y]^j = X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}.$$

Postać nawiasu pól wektorowych we współrzędnych niewiele mówi o jego geometrycznej interpretacji. Wdalszym ciągu wykładu okaże się, że ta wielkość pojawia się w różnych kontekstach wielokrotnie: jest we wzorze Cartana na różniczkę formy, jest we wzorze na pochodną Liego pola wektorowego, jest w końcu we wzorze na krzywiznę koneksji. Zacznijmy jednak od prostej interpretacji w terminach krzywych całkowych pól wektorowych. Jako komutator pól wektorowych, nawias Liego mierzy różnicę w działaniu dwóch pól zastosowanych w wyjściowej i odwrotnej kolejności. Wiemy, że działanie pola wektorowego na funkcję polega na różniczkowaniu wzdłuż krzywych całkowych pola. Przeanalizujmy zatem różnicę między $\varphi(t, \psi(t, q))$ i $\psi(t, \varphi(t, q))$, gdzie φ i ψ są lokalnymi grupami dyfeomorfizmów odpowiadającymi polom wektorowym X i Y odpowiednio. Pewną techniczną trudność stanowi „zmierzenie" różnicy między dwoma punktami na rozmaitości bez dodatkowej struktury, w szczególności bez pojęcia odległości. Poradzimy sobie biorąc dowolną funkcję $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ i wyznaczając

$$f(\psi(t, \varphi(t, q))) - f(\varphi(t, \psi(t, q))).$$

Dla ustalonego q i ustalonej funkcji f różnica ta jest gładką rzeczywistą funkcją rzeczywistego argumentu. Jej definicja jest niezależna od współrzędnych, ma więc charakter geometryczny. Współczynniki rozwinięcia Taylora tej funkcji także mają znaczenie geometryczne. Wyznaczymy te współczynniki korzystając ze współrzędnych. Wynik powinien zależeć jedynie od f, q, X i Y. Oznaczmy

$$\varphi^i(t,q) := x^i(\varphi(t,q)), \qquad \psi^i(t,q) := x^i(\psi(t,q)).$$

We wspołrzędnych wielkość $f(\psi(t,\varphi(t,q))) - f(\varphi(t,\psi(t,q)))$ przyjmuje postać

$$f(\psi^i(t,\varphi^j(t,q))) - f(\varphi^i(t,\psi^j(t,q))). \tag{6}$$

Wartość w $t=0$ jest 0, gdyż $\varphi(0,q)=\psi(0,q)=q$. Liczymy pierwszą pochodną po t. Ponieważ wyrażenie jest antysymetryczne ze względu na zamianę X i Y, skoncentrujemy się na jednym członie $f(\psi^i(t,\varphi^i(t,q)))$, drugi dopiszemy później korzystając z antysymetrii:

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t} f(\psi^i(t,\varphi^k(t,q))) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(\psi^i(t,\varphi^k(t,q)))\left(\frac{\partial \psi^i}{\partial t}(t,\varphi^k(t,q))) + \frac{\partial \psi^i}{\partial x^j}(t,\varphi^k(t,q)))\frac{\partial \varphi^j}{\partial t}(t,q)\right) \tag{7}$$

Przy wszystkich funkcjach w powyższym wzorze wypisywaliśmy wszystkie argumenty, żeby teraz nie mieć wątpliwości co do wyniku, kiedy wstawimy wartość $t=0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(\psi^i(t,\varphi^i(t,q)))_{|t=0} = \frac{\partial f}{\partial x^i}(q),$$
$$\frac{\partial \psi^i}{\partial t}(t,\varphi^i(t,q)))_{|t=0} = \frac{\partial \psi^i}{\partial t}(0,q) = Y^i(q),$$
$$\frac{\partial \varphi^j}{\partial t}(t,q)_{|t=0} = X^i(q).$$

Nieco trudniejszy jest człon w kolorze czerwonym. Sięgając do definicji różniczkowania cząstkowego, które polega na różniczkowaniu wzdłuż jednej zmiennej przy ustalonych pozostałych, stwierdzamy, że wyznaczając wartość wyrażenia czerwonego należy najpierw położyć $t=0$ w pierwszym argumencie (i pozostałych poza j-tą współrzędną x) i dopiero potem różniczkować. Wstawienie wartości 0 w miejscu pierwszego t oznacza, że różniczkujemy odwzorowanie $\psi(0,\cdot)$, które jest identycznością na M.

$$\frac{\partial \psi^i}{\partial x^j}(t,\varphi^k(t,q))_{|t=0} = \delta^i_j$$

Podsumowując,

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t} f(\psi^i(t,\varphi^i(t,q)))_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x^i}(q)\left(Y^i(q) + \delta^i_j X^j(q)\right) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(q)\left(Y^i(q) + X^i(q)\right).$$

Wyrażenie to jest symetryczne ze względu na zamianę X na Y, co oznacza, że współczynnik przy t w pierwszej potędze w rozwinięciu wyrażenia (6) jest 0.

Przechodzimy do wyznaczania współczynnika przy t^2. W tym celu policzymy pochodną po t wyrażenia (7). Dla skrócenia napisów oznaczmy przez $A^i(t)$ wyrażenie występujące w nawiasie po prawej stronie we wzorze (7). Wiadomo, ze $A^i(0) = Y^i(q) + X^i(q)$. Mamy więc

$$\frac{\mathsf{d}^2}{\mathsf{d}t^2} f(\psi^i(t,\varphi^l(t,q))) = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}(\psi^i(t,\varphi^l(t,q)))A^i(t)\right) =$$
$$\frac{\partial f}{\partial x^k \partial x^i}(\psi^i(t,\varphi^l(t,q)))A^k(t)A^i(t) + \frac{\partial f}{\partial x^i}(\psi^i(t,\varphi^l(t,q)))\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}A^i(t).$$

Cześć niebieska dla $t=0$ przyjmuje postać

$$\frac{\partial f}{\partial x^k \partial x^i}(\psi^i(t,\varphi^l(t,q)))A^k(t)A^i(t)_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x^k \partial x^i}(q)A^k(0)A^i(0) = \frac{\partial f}{\partial x^k \partial x^i}(q)\left(Y^k(q)+X^k(q)\right)\left(Y^i(q)+X^i(q)\right),$$

trudność polega więc na wyznaczeniu wartości wyrażenia czerwonego.

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}A^i(t) = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\left(\frac{\partial \psi^i}{\partial t}(t,\varphi^l(t,q))) + \frac{\partial \psi^i}{\partial x^j}(t,\varphi^l(t,q)))\frac{\partial \varphi^j}{\partial t}(t,q)\right) = \frac{\partial^2 \psi^i}{\partial t^2}(t,\varphi^l(t,q))) + \frac{\partial^2 \psi^i}{\partial x^k \partial t}(t,\varphi^l(t,q)))\frac{\partial \varphi^k}{\partial t}(t,q) + \frac{\partial^2 \psi^i}{\partial t \partial x^j}(t,\varphi^l(t,q)))\frac{\partial \varphi^j}{\partial t}(t,q) + \frac{\partial^2 \psi^i}{\partial x^k \partial x^j}(t,\varphi^l(t,q)))\frac{\partial \varphi^j}{\partial t}(t,q)\frac{\partial \varphi^k}{\partial t}(t,q) + \frac{\partial \psi^i}{\partial x^j}(t,\varphi^l(t,q)))\frac{\partial^2 \varphi^j}{\partial t^2}(t,q).$$

W powyższych rachunkach wstawiamy $t=0$ i otrzymujemy dla części czerwonej

$$\frac{\partial^2 \psi^i}{\partial t^2}(t,\varphi^i(t,q)))_{|t=0} = \frac{\partial^2 \psi^i}{\partial t^2}(0,q).$$

Części niebieska i zielona są równe, jeśli weźmiemy pod uwagę symetrię drugich pochodnych cząstkowych

$$\frac{\partial^2 \psi^i}{\partial x^k \partial t}(t,\varphi^i(t,q)))\frac{\partial \varphi^k}{\partial t}(t,q)_{|t=0} = X^k(q)\frac{\partial Y^i}{\partial x^k}(q).$$

Część szara znika, gdyż znika druga pochodna identyczności. Obliczając wartość części czarnej także bierzemy pod uwagę, że $\frac{\partial \psi^i}{\partial x^j}(t,\varphi^i(t,q)))_{|t=0} = \delta^i_j$ i otrzymujemy

$$\frac{\partial \psi^i}{\partial x^j}(t,\varphi^i(t,q)))\frac{\partial^2 \varphi^j}{\partial t^2}(t,q)_{|t=0} = \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial t^2}(0,q).$$

Podsumowując

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}A^i(t)_{|t=0} = \frac{\partial^2 \psi^i}{\partial t^2}(0,q) + \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial t^2}(0,q) + 2X^k(q)\frac{\partial Y^i}{\partial x^k}(q).$$

Podwojony współczynnik przy t^2 otrzymujemy antysymetryzując:

$$\frac{\mathsf{d}^2}{\mathsf{d}t^2}\left[f(\psi^i(t,\varphi^i(t,q))) - f(\varphi^i(t,\psi^i(t,q)))\right]_{t=0} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i}(q)\left(Y^k(q)+X^k(q)\right)\left(Y^i(q)+X^i(q)\right) + \frac{\partial f}{\partial x^i}\left(\frac{\partial^2 \psi^i}{\partial t^2}(0,q) + \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial t^2}(0,q) + 2X^k(q)\frac{\partial Y^i}{\partial x^k}(q)\right) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^k}(q)\left(X^k(q)+Y^k(q)\right)\left(X^i(q)+Y^i(q)\right) - \frac{\partial f}{\partial x^i}\left(\frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial t^2}(0,q) + \frac{\partial^2 \psi^i}{\partial t^2}(0,q) + 2Y^k(q)\frac{\partial X^i}{\partial x^k}(q)\right)$$

Czerwone, niebieskie i zielone składniki się upraszczają pozostawiając

$$\frac{\mathsf{d}^2}{\mathsf{d}t^2}\Big[f(\psi^i(t,\varphi^i(t,q))) - f(\varphi^i(t,\psi^i(t,q)))\Big]_{t=0} = 2\frac{\partial f}{\partial x^i}\left(X^k(q)\frac{\partial Y^i}{\partial x^k}(q) - Y^k(q)\frac{\partial X^i}{\partial x^k}(q)\right)$$

Wyrażenie w nawiasie okrągłym jest i-tą współrzędną $[X,Y]$. Rozwinięcie do wyrazów kwadratowych różnicy $f(\psi(t,\varphi(t,q))) - f(\varphi(t,\psi(t,q)))$ przyjmuje więc postać

$$f(\psi(t,\varphi(t,q))) - f(\varphi(t,\psi(t,q))) = t^2([X,Y]f)(q) + \mathcal{O}(t^3).$$

Wyrażenie $([X,Y]f)(q)$ to działanie pola wektorowego $[X,Y]$ na funkcję f obliczone w punkcie q. Tak jak się spodziewaliśmy, wynik nie zależy od współrzędnych w których prowadziliśmy rachunki.

Powyższy rachunek daje geometryczną interpretację nawiasu pól wektorowych. Nawias ten jest miarą niedokładności, jaką otrzymujemy zamieniając kolejność „podróżowania” wzdłuż krzywych całkowych obu pól wektorowych. Niedokładnosć tę widać dopiero w drugim rzędzie względem parametru krzywych całkowych.

Wiadomo, że dla każdego pola wektorowego X można dobrać układ współrzędnych w taki sposób, że krzywe całkowe tego pola są liniami współrzędnościowymi jednej ze współrzędnych. Rachunek, który właśnie przeprowadziliśmy pokazuje, że dla dwóch pól wektorowych może to być niemożliwe. Przeszkodą jest z całą pwenością nieznikający komutator tych pól wektorowych. Oczywiście udowodnienie, że gdy pola wektorowe komutują, odpowiedni układ współrzędnych istnieje, to oddzielny problem, który poruszony jest w dowodzie Twierdzenia Frobeniusa w późniejszych rozdziałach. W szczególności, istnienie takiego układu wspołrzędnych oznacza, że znika nie tylko współczynnik przy t^2 w rozwinięciu badanej przez nas funkcji, ale wszystkie współczynniki. Tak istotnie jest - pozostałe współczynniki wyrażają się przez nawias $[X,Y]$ oraz jego wielokrotne iteracje: $[X,[X,Y]]$, $[Y,[X,[X,Y]]]$ itd. Jeśli więc $[X,Y]$ znika, znikają też wszystkie inne współczynniki. Zainteresowani konkretną postacią rozwinięcia powinni poszukać informacji związanych ze wzorem Campbell'a-Baker'a-Hausdorffa.

3.6 Czy przyspieszenie jest wektorem?

Ucząc się fizyki w szkole średniej czy też mechaniki klasycznej w czasie wykładów uniwersyteckich, posługujemy się często pojęciem „wektor przyspieszenia”. Czy jednak przyspieszenie na pewno jest wektorem? Dotychczasowe doświadczenia z tego kursu geometrii różniczkowej wskazują, że warto dobrze przemyśleć jakie byty matematyczne powinny reprezentować różne wielkości fizyczne.

Rozważania będziemy prowadzić przy założeniu, że pracujemy w ramach mechaniki klasycznej, nierelatywistycznej. Przestrzeń położeń układu klasycznego zazwyczaj jest rozmaitością. Oznaczmy ją M. Na przykład jeśli analizujemy ruch monety toczącej się prostopadle po stole, położenie monety określamy podając położenie punktu styczności ze stołem ($(x,y)\in\mathbb{R}^2$), położenie monety względem osi przechodzącej przez środek monety prostopadle do płaszczyzny monety (S^1, współrzędna φ) i położenie względem osi obrotu prostopadłej do stołu i przechodzącej przez środek monety (S^1, współrzędna θ). Przestrzeń położeń zatem to $M=\mathbb{R}^2\times S^1\times S^1$, a we współrzędnych czwórka (x,y,φ,θ). Kiedy natomiast rozważamy ruch bryły sztywnej i oprócz położenia środka masy ($\mathbb{R}^3$) uwzględniamy obroty bryły w przestrzeni, jako rozmaitość