

GR I PYTANIA EGZAMINACYJNE

1. Definicja powierzchni zanurzonej. Sposoby opisu powierzchni zanurzonej. Czy każda powierzchnia jest poziomiką jakiegoś odwzorowania różniczkowalnego?
2. Przestrzeń styczna do powierzchni zanurzonej, baza zwierzana z układem współrzędnych. Zapisać pole wektorowe $\partial\varphi + \sin\varphi\partial\varphi$ (dane na S^2 we współrzędnych sferycznych) we współrzędnych stereograficznych.
3. Definicja przestrzeni stycznej w punkcie x do rozmaitości M . Jak wprowadzić w $T_x M$ strukturę wektorową?
4. Jak wprowadzić na TM i T^*M strukturę rozmaitości różniczkowalnej?
5. Przestrzeń kosmiczna do powierzchni zanurzonej w punkcie x . Baza zwierzana z układem współrzędnych. Na powierzchni $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - x^2 - y^2 = 1, z > 0\}$ wprowadzić współrzędne i zapisać w tych współrzędnych różniczkę funkcji będącej odcięciem $f(x, y, z) = x^2 + z^2 - xz$ do S .
6. Co to jest gradient funkcji? Wyznaczyć gradient w wybranych współrzędnych na powierzchni $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - x^2 - y^2 = 1, z > 0\}$ względem iloczynu skalarnego obciętego z $\mathbb{R}^3$.
7. Udowodnić, że istnieje jednoznaczna odpowiedniość między różniczkowaniami algebry $C^\infty(M)$ względem homomorfizmu będącego ewaluacją w $x \in M$ a elementami $T_x M$.
8. Zdefiniować nawias Liego pól wektorowych i omówić jego własności.
9. Co to jest odwzorowanie styczne? Niech $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$. Dla ustalonego $(a, b) \in M$ definiujemy $L(a, b) : M \rightarrow M$
$$L(a, b)(x, y) = (ax, ay + \frac{b}{x})$$

Niech $\vec{v} = \partial_x$ zasiepiiony w $(1, 0)$. Zapisać we współrzędnych pole wektorowe $F(x, y) = TL_{(x, y)}(\vec{v})$
10. Co to jest cofnięcie formy? Niech $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$. Dla ustalonego $(a, b) \in M$ definiujemy $L(a, b) : M \rightarrow M$
$$L(a, b)(x, y) = (ax, ay + \frac{b}{x})$$

Znaleźć $L(a, b)^* dx$ i $L(a, b)^* dy$
11. Przestrzeń odwzorowań wieloliniowych na przestrzeni wektorowej: definicje, wymiar, baza, podprzestrzeń odwzorowań antysymetrycznych.

12. Iloczyn zewnętrzny: definicje, własności. Niech $\alpha \in \wedge^2 V^*$, $\beta \in V^*$. Wyrazić $(\alpha \wedge \beta)(v_1, v_2, v_3)$ przez wartości α i β na wektorach v_1, v_2, v_3 .
13. Różnice zewnętrzne: definicje i własności. Formy zamknięte i zupełne.
14. Wzór Cartana na różniczkę k-formy. Wzór Tulczyjewa na różniczkę 1-formy.
15. Forme pierwotne. Lemat Poincaré - sformułowanie i szkic dowodu.
16. Obliczyć całkę 2 formy $dy \wedge dz$ po fragmencie sfery S^2 dla którego $x \geq 0$ i $z \geq 0$ z wybraną orientacją. Sformułować definicję całki z formy. Przedyskutować rolę orientacji.
17. Co to jest forma objętości? Związek istnienia formy objętości z orientowalnością.
18. Sformułować tw. Stokes'a i podać szkic dowodu.
19. Twierdzenie Stokes'a w analizie wektorowej: wzory i wybrany dowód.
20. Divergencja, rotacja i dylatacja na powierzchni z iloczynem skalarnym. Własności, wzory...
21. Gwiazdka Hodge'a - definicje i własności. Obliczyć $*d\vec{v}$ i $*d\vec{r} \wedge d\vec{v}$ w $\mathbb{R}^3$.
22. Jednoparametrowe grupy dyfeomorfizmów. Związek z polami wektorowymi. Wyznaczyć Φ_t dla $x\partial_y - y\partial_x$ na $\mathbb{R}^2$.
23. pochodne Liego form różniczkowych: definicje, własności, wzory. Wykazać wzór

$$\mathcal{L}_X \alpha = i_X d\alpha + di_X \alpha \quad \text{dla } \alpha \in \Omega^1(M)$$
24. Pochodne kowariantne na powierzchni zanurzonej. Symbole Christoffela. Korzystając z własności pochodnej kowariantnej wyprowadzić wzór na pochodną pola tensorowego $f = f^i_j(x) dx^j \otimes \partial_i$ (we współrzędnych), tzn wzór na

$$(\nabla_k f)^i_j$$
25. Co to jest przesunięcie równoległe na powierzchni zanurzonej w przestrzeni Euklidesowej.