

Kolokwium przykładowe z Geometrii Różniczkowej I,

19 listopada 2017

Zadanie 1. W $\mathbb{R}^3$ dana jest rodzina prostych

$$\ell_p = \{(x, y, z) : x = p - y = \frac{z + p^2}{2p}, \quad p \in \mathbb{R}\}$$

Pokazać, że zbiór $\bigcup_{p \in \mathbb{R}} \ell_p$ jest gładką powierzchnią w $\mathbb{R}^3$. Znaleźć jej równanie, zaproponować jakąś parametryzację i znaleźć równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $(2, 1, 3)$

Zadanie 2. Niech ω będzie formą określoną w obszarze $\mathcal{O} = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$:

$$\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy.$$

Znaleźć różną od zera funkcję f jednej zmiennej taką, że forma $f(x^2 + y^2 + z^2)\omega$ jest zamknięta. Czy istnieje jednoforma α taka, że $d\alpha = f(x^2 + y^2 + z^2)\omega$?

Zadanie 3. W obszarze $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ zdefiniowane jest pole wektorowe

$$F(x, y) = \frac{x}{y}(1 - y^2)\partial_x + (1 + y^2)\partial_y.$$

Korzystając ze współrzędnych (u, v) zadanych wzorami $x = uv$, $y = \frac{u}{v}$ znaleźć krzywą całkową tego pola przechodzącą przez punkt $(1, 1)$.

Zadanie 4. Wyrazić dywergencję pola wektorowego i gradient funkcji we współrzędnych parabolicznych w $\mathbb{R}^3$ (ξ, η, φ) .

$$x = \sqrt{\xi\eta} \cos \varphi$$

$$y = \sqrt{\xi\eta} \sin \varphi$$

$$z = \frac{1}{2}(\xi - \eta)$$

Zadanie dodatkowe. *Uwaga: rachunkowo łatwe, koncepcyjnie może okazać się trudne. Na kolokwium nie będzie zadania dodatkowego. To zadanie ma charakter ogólnorozwojowego ćwiczenia przygotowującego do kolokwium.*

Niech M będzie rozmaitością gładką. Na rozmaitości T^*M zdefiniowana jest jednoforma θ_M wzorem

$$\langle \theta_M, v \rangle = \langle \tau_{T^*M}(v), T\pi_M(v) \rangle,$$

gdzie v jest wektorem stycznym do T^*M , czyli elementem $T(T^*M)$, $\tau_{T^*M}(v)$ oznacza punkt zaczepienia tego wektora a $T\pi_M(v)$ obraz tego wektora względem odwzorowania stycznego do $\pi_M : T^*M \rightarrow M$.

Zapisać θ_M we współrzędnych (x^i, p_j) w T^*M i korzystając zapisu we współrzędnych wykazać, że dla każdej jednoformy α na M zachodzi wzór

$$\alpha^* \theta_M = \alpha.$$

W powyższym wzorze, po lewej stronie równości patrzymy na jednoformę jako na odwzorowanie $M \rightarrow T^*M$.