

Notatki do wykładu Geometria Różniczkowa I

7 października 2013

1 Powierzchnie zanurzone

Tegoroczna wersja wykładu z geometrii różniczkowej będzie różniła się od poprzedniej kolejnością materiału. Zgodnie z sugestiami słuchaczy zajmiemy się na początku jedynie powierzchniami zanurzonymi. Przedyskutujemy w tym kontekście przestrzenie styczne i kostyczne oraz wszelkie kwestie praktyczne związane z analizą na powierzchniach, całkowaniem i narzędziami potrzebnymi w niektórych teoriach pola, np. w elektrodynamice. Następnie przejdziemy do pojęć bardziej abstrakcyjnych, tzn. do pojęcia rozmaitości.

Zanim przypomnimy definicję powierzchni zanurzonej zastanówmy się jakie struktury przestrzeni $\mathbb{R}^n$ były dotychczas używane w trakcie zajęć z analizy. Z całą pewnością używaliśmy naturalnej topologii na $\mathbb{R}^n$, gdyż mowa była o ciągłości odwzorowań oraz o zbieżności ciągów. Nauczyliśmy się także różniczkować funkcje wielu zmiennych. Przypomnijmy definicję pochodnej funkcji $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ w punkcie $x \in \mathbb{R}^n$: Mówimy, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x jeśli istnieje odwzorowanie liniowe $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że

$$f(x+h) = f(x) + Fh + R(x,h),$$

gdzie R jest resztą, tzn. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|R(x,h)|}{\|h\|} = 0$. Do zapisania ostatniego wzoru potrzebna jest norma, czyli możliwość obliczania długości wektora. Tak długo jak używamy jedynie przestrzeni skończonego wymiaru wybór tej normy nie jest istotny - wszystkie normy są równoważne. Odwzorowanie liniowe F nazywaliśmy pochodną f w punkcie x i oznaczaliśmy $f'(x)$, albo jakoś podobnie. W dalszym ciągu istotną będzie następująca obserwacja: We wzorze definiującym pochodną przestrzeń $\mathbb{R}^n$ pojawia się w dwóch rolach. Po pierwsze jest to dziedzina funkcji f a po drugie przestrzeń zawierająca przyrosty h . W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ będącej dziedziną funkcji nie używa się struktury wektorowej, a jedynie możliwości przemieszczania się od punktu do punktu za pomocą elementów przestrzeni wektorowej. Struktura liniowa istotna jest w przestrzeni przyrostów, używamy bowiem pojęcia odwzorowania liniowego na przestrzeni przyrostów. Mówiąc językiem algebraicznym w dziedzinie funkcji f używamy jedynie struktury afinicznej. Przestrzeń afiniczna wygląda jak przestrzeń wektorowa, której ktoś "ukradł zero".

Definicja 1 *Przestrzeń afiniczną* nazywamy trójkę $(A, V, +)$, gdzie A jest zbiorem, V przestrzenią wektorową a $+$ odwzorowaniem $+: A \times V \rightarrow A$ o następujących własnościach

1. $\forall a \in A, v, w \in V \quad a + (v + w) = (a + v) + w,$
2. $\forall a \in A \quad a + 0 = a,$

3. dla każdych dwóch $a, b \in A$ istnieje dokładnie jeden wektor $v \in V$ taki, że $a + v = b$

Każda przestrzeń wektorowa jest więc w szczególności przestrzenią afiniczną. Każda zaś przestrzeń afiniczna staje się wektorowa, jeśli wyróżnimy w niej jeden punkt - wektor zerowy. W przestrzeni afinicznej wektor definiowany jest przez uporządkowaną parę punktów (własność (3), patrz szkolna definicja wektora). Wektor v o którym mowa w (3) nazywać będziemy różnicą punktów b i a . Bedziemy także pisać $v = b - a$. Mówimy, że przestrzeń afiniczna A jest *modelowana* na przestrzeni wektorowej V . Wprowadzamy także pojęcie wymiaru przestrzeni afinicznej – jest on równy wymiarowi modelowej przestrzeni wektorowej. W skończonym wymiarze struktura afiniczna w zupełności wystarcza do zdefiniowania pochodnej funkcji. Niech więc A będzie przestrzenią afiniczną skończonego wymiaru modelowaną na przestrzeni wektorowej V , niech także f oznacza funkcję na A . Powiemy, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $a \in A$ jeśli istnieje funkcjonal liniowy $F \in V^*$ taki, że

$$f(a + v) = f(a) + Fv + R(a, v),$$

gdzie $R(a, v)$ ma własność reszty, tzn $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{|R(a, v)|}{\|v\|} = 0$. Długość $\|v\|$ liczona może być w dowolnej normie na przestrzeni V . Funkcjonał F możemy nazywać pochodną funkcji f w punkcie a . Dzięki oczywistym różnicom między A i V , a tym bardziej V^* , łatwo zidentyfikować obiekty geometryczne odpowiadające funkcji, pochodnej, przyrostowi itd. W sytuacji, kiedy wszystkie przestrzenie to $\mathbb{R}^n$ łatwo o pomyłkę. Na przestrzeni A zdefiniować możemy także wyższe pochodne, rozważać klasy funkcji ciągłych, różniczkowalnych, różniczkowalnych k razy czy gładkich. najłatwiejsze praktyczne kryterium sprawdzania różniczkowalności odwzorowań między przestrzeniami afinicznymi jest zapisanie ich w układzie współrzędnych. Zauważmy, że wybranie punktu $a_0 \in A$ oraz bazy e w V definiuje bijekcję

$$\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow A, \quad \Phi(x^1, \dots, x^n) = a_0 + \sum_i x^i e_i.$$

Bijekcja ta jest odwzorowaniem afinicznym a więc gładkim. Φ traktujemy jako afiniczny układ współrzędnych w A . Ponieważ zmiana układu współrzędnych prowadzi do afinicznego (także gładkiego) odwzorowania z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$ różniczkowalność, czy stopień gładkości można badać w dowolnym układzie współrzędnych. Od tej pory będziemy uważali, że potrafimy różniczkować funkcje na przestrzeni afinicznej i odwzorowania między przestrzeniami afinicznymi. W praktyce będziemy pewnie i tak używali $\mathbb{R}^n$. Warto jednak wiedzieć z której z rozlicznych struktur $\mathbb{R}^n$ właśnie korzystamy definiując jakiś obiekt, czy wykonując rachunki.

Żeby się przekonać o przydatności pojęcia przestrzeni afinicznej spójrzmy jeszcze na dwie dodatkowe definicje:

Definicja 2 *Czasoprzestrzeni Newtona* nazywamy przestrzeń afiniczną N modelowaną na czterowymiarowej przestrzeni wektorowej V wyposażonej w niezerową jednoformę τ oraz niezdegenerowaną, dodatnio-określoną dwuliniową formę symetryczną g (iloczyn skalarny) zdefiniowaną na przestrzeni $E_0 = \ker \tau$. Punkty N nazywamy *zdarzeniami*. Dwa zdarzenia x, y są *jednoczesne* jeśli $\tau(x - y) = 0$. Forma τ służy do pomiaru różnicy czasu między zdarzeniami, zaś forma kwadratowa odpowiadająca g służy do pomiaru odległości między zdarzeniami jednoczesnymi.

Definicja 3 *Czasoprzestrzeń Minkowskiego* nazywamy przestrzeń afiniczną M modelowaną na czterowymiarowej przestrzeni wektorowej V wyposażonej w dwuliniową symetryczną formę o sygnaturze $(+, -, -, -)$. Elementy przestrzeni M nazywamy *zdarzeniami*.

Pojęcia fizyczne z mechaniki nierelatywistycznej oraz ze szczególnej teorii względności znalazły swoje matematyczne modele. A co z czasoprzestrzenią z ogólnej teorii względności? Nad tym musimy trochę popracować!

W dalszym ciągu wykładu zajmować się będziemy powierzchniami zanurzonymi w $\mathbb{R}^n$ (afinicznym). Mówiąc nieprecyzyjnie, powierzchnia jest to taki podzbiór $\mathbb{R}^n$, który w otoczeniu każdego punktu wygląda jak kawałek $\mathbb{R}^k$ (afinicznego) dla $k \leq n$. Oczywiście musimy doprecyzować co to znaczy "wygląda jak...". Skojarzenia możemy jednak czerpać z otoczenia. Powierzchnia ziemi (jeśli nie badać jej ze zbyt dużą dokładnością) wygląda w pobliżu nas na kawałek płaszczyzny. Dopiero kiedy patrzymy daleko widzimy różne dziwne zjawiska, np czubek masztu żaglowca wystający nad horyzont.

Definicja 4 Zbiór $S \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy *powierzchnią wymiaru $k \leq n$* jeśli dla każdego punktu $x \in S$ istnieje otwarte otoczenie $\mathcal{U}$ punktu x w $\mathbb{R}^n$, otwarte otoczenie $\mathcal{O}$ punktu $0 \in \mathbb{R}^n$ oraz homeomorfizm $\Phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{O}$, $\Phi(x) = 0$, $\Phi(y) = (\varphi^1(y), \dots, \varphi^n(y))$ takie, że warunek $y \in S \cap \mathcal{U}$ jest równoważny warunkowi $\varphi^{k+1}(y) = \dots = \varphi^n(y) = 0$. S jest powierzchnią klasy C^r jeśli Φ jest dyfeomorfizmem klasy C^r .

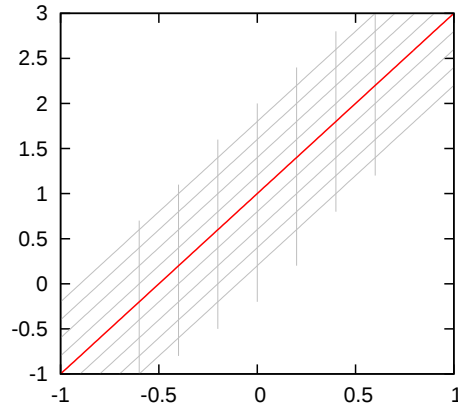
Innymi słowy w otoczeniu każdego punktu powierzchni istnieje układ współrzędnych taki, że przynależność punktu do powierzchni oznacza znikanie pewnej liczby ostatnich współrzędnych punktu. Przypominamy, że *dyfeomorfizm* klasy C^r jest to bijekcja różniczkowalna r razy w sposób ciągły i taka, że odwzorowanie odwrotne też jest różniczkowalne r razy w sposób ciągły. W dalszym ciągu zakładamy będziemy, że pracujemy z powierzchniami klasy C^∞ . Istnieje twierdzenie, które mówi, że jeśli na powierzchni istnieje struktura klasy C^1 to istnieje także C^r z $r = \infty$ włącznie. W powyższej definicji struktura wektorowa $\mathbb{R}^n$ nie jest istotna. Struktura afiniczna jest w zupełności wystarczająca. Warunek $\Phi(x) = 0$ jest wybrany dla wygody. Moglibyśmy użyć dowolnego innego punktu w $\mathbb{R}^n$, tylko wtedy ciąg dalszy definicji miałby trudniejszą do zapamiętania postać.

Przykład 1 Najprostszym przykładem powierzchni jednowymiarowej w $\mathbb{R}^2$ jest prosta (Rys 1):

$$L = \{(x, y) : y = 2x + 1\}.$$

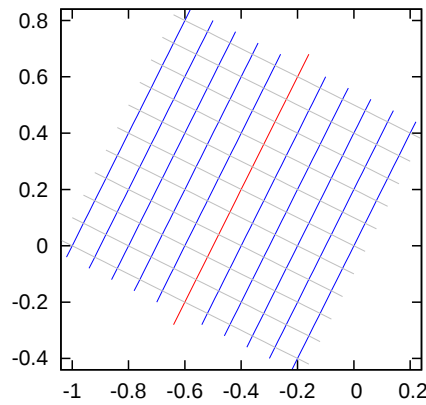
Żeby pokazać, że jest to powierzchnia jednowymiarowa musimy wprowadzić w otoczeniu każdego punktu układ współrzędnych taki, żeby prosta L zadana była warunkiem znikania drugiej współrzędnej. Ze względu na szczególnie nieskomplikowaną powierzchnię układ współrzędnych może być globalny, tzn. zdefiniowany na całym $\mathbb{R}^2$ a nie tylko w otoczeniu jednego punktu. Istnieje wiele odpowiednich układów współrzędnych. Siatka współrzędnych związana z jednym z nich zaznaczona jest na rysunku. Nowe współrzędne punktu $p = (x, y)$ oznaczymy (ξ, η) . Współrzędna ξ jest identyczna z x . Współrzędna η punktu p obliczymy znajdując punkt przecięcia prostej równoległej do L i przechodzącej przez p z osią pionową. Wartości przesuniemy tak, aby 0 odpowiadało właśnie prostej L . Takie określenie układu współrzędnych prowadzi do wzorów:

$$\begin{cases} \xi = x \\ \eta = y - 2x - 1 \end{cases}$$



Rys. 1: "Najprostsza" powierzchnia - prosta.

Możliwy jest także inny układ współrzędnych. Jeśli zażądamy, aby druga współrzędna zmieniała się wzdłuż prostych prostopadłych do L otrzymamy odpowiednie odwzorowanie $\Psi : (x, y) \mapsto$



Rys. 2: Inne współrzędne.

$(s(x, y), t(x, y))$ zapisuje się wzorami:

$$\begin{cases} s = 2y + x \\ t = y - 2x - 1 \end{cases}$$

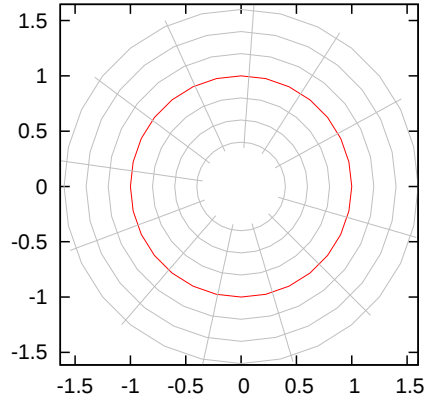


Przykład 2 Drugi standardowy przykład to okrąg:

$$S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}.$$

W tym przypadku najłatwiej użyć biegunowego układu współrzędnych: Wzory są nam znane od dawna. Żeby zachować warunek „druga współrzędna równa zero” musimy zmienić kolejność współrzędnych i przesunąć wartości r . Wzory definiujące (r, φ) za pomocą (x, y) nie są wygodne w użyciu. Znacznie łatwiej zapisać odwzorowanie odwrotne:

$$\Phi_1(\varphi, r) = (x(\varphi, r), y(\varphi, r)), \quad \varphi \in]0, 2\pi[, \quad r \in]-1, 1[$$



Rys. 3: Okrąg

$$\begin{cases} x = (r + 1) \cos \varphi \\ y = (r + 1) \sin \varphi \end{cases}$$

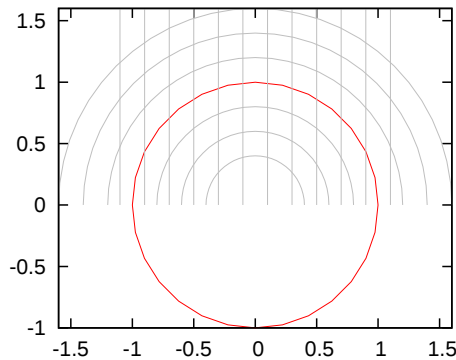
Zauważmy, że tym razem do zdefiniowania powierzchni nie wystarcza jeden układ współrzędnych. Ten przedstawiony powyżej jest dobry dla każdego punktu oprócz punktu $(1, 0)$ (we współrzędnych kartezjańskich). W otoczeniu $(1, 0)$ możemy wziąć odwzorowanie zadane tymi samymi wzorami, ale określone na innej dziedzinie:

$$\Phi_2(\varphi, r) = (x(\varphi, r), y(\varphi, r)), \quad \varphi \in]-\pi, \pi[, \quad r \in]-1, 1[.$$

Dla okręgu także można wybierać inne układy współrzędnych. Na przykład taki:

$$\begin{cases} \xi = x \\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2} - 1 \end{cases}$$

określony w otoczeniu części okręgu położonego w górnej półpłaszczyźnie: Odwzorowanie od-



Rys. 4: Okrąg - inne współrzędne.

wrotne

$$\begin{cases} x = \xi \\ y = \sqrt{(\rho + 1)^2 - \xi^2} \end{cases}$$

określone jest w obszarze

$$\mathcal{V} = \{(\xi, \rho) : \rho > -1, -\rho - 1 < \xi < \rho + 1\}$$

Do opisanego całego okręgu potrzebujemy więcej niż dwóch tego rodzaju układów współrzędnych.

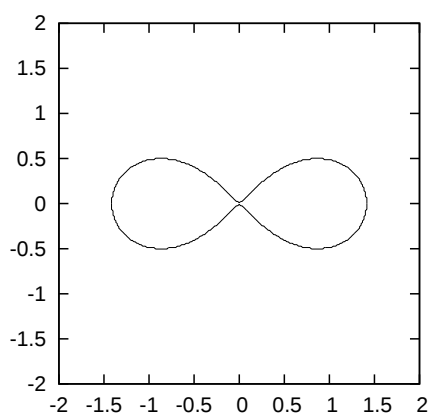
♣

Zobaczmy teraz co może powodować problemy:

Przykład 3 Powierzchnią nie jest tzw. *lemniskata Bernoulliego* zadana równaniem

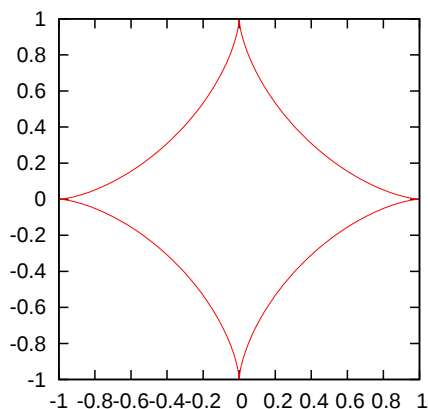
$$(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$$

Problemy są w otoczeniu punktu $(0, 0)$. Samoprzecięcia nie są dozwolone. ♣



Rys. 5: Lemniskata Bernoulliego

Przykład 4 Powierzchnią nie jest też. *hipocykloida*, czyli krzywa zakreślona przez punkt okręgu toczący się wewnątrz większego okręgu. Problemy są w otoczeniu punktów $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$. Nie są dozwolone także dzióbki: ♣

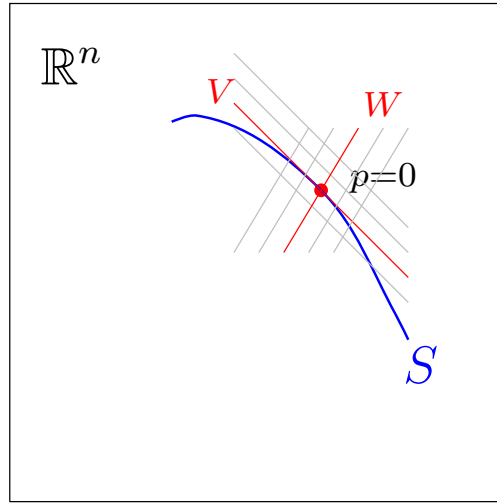


Rys. 6: Hipocykloida, stosunek promieni 1:4.

Zastanówmy się teraz jak można opisywać powierzchnię. W niemal wszystkich powyższych przykładach powierzchnia opisana była równaniem, czyli przedstawiona jako poziomica zerowa jakiejś funkcji. O tym jakie warunki powinna spełniać funkcja, żeby jej poziomica zerowa była powierzchnią mówi twierdzenie o maksymalnym rzędzie:

Twierdzenie 1 (O maksymalnym rzędzie) *Niech $F : \mathbb{R}^n \supset \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $m < n$ będzie odwzorowaniem różniczkowalnym w sposób ciągły. Niech także $S = F^{-1}(0, \dots, 0)$ będzie zawarte w $\mathcal{O}$. Wówczas jeśli w każdym punkcie $p \in S$ pochodna $F'(p)$ ma maksymalny rząd (czyli równy m) to S jest powierzchnią w $\mathbb{R}^n$ wymiaru $k = n - m$.*

Dowód: Dla dowodu możemy przyjąć, że $p = 0 \in \mathbb{R}^n$ (bo i tak istotna jest afiniczna struktura $\mathbb{R}^n$, więc to gdzie „postawimy” zero żeby zidentyfikować afiniczne $\mathbb{R}^n$ z wektorowym $\mathbb{R}^n$ nie ma znaczenia). Oznaczmy teraz $V = \ker F'(0)$. Z założeń twierdzenia wynika, że $\dim V = n - m = k$. Wybierzmy także dowolną podprzestrzeń W dopełniającą do V , tzn $\mathbb{R}^n = V \oplus W$. Zauważmy,



Rys. 7: TFU

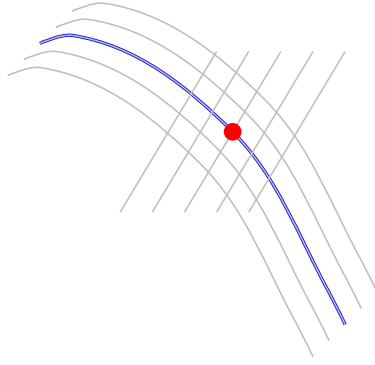
że F spełnia w $p = 0$ założenia TFU (Twierdzenia o Funkcji Uwikłanej). Istotnie $F'(0)|_W$ jest odwracalne, co wynika z rachunku wymiarów. Korzystając z TFU znajdujemy więc otoczenie $\mathcal{U}$ punktu zerowego w V oraz odwzorowanie $T : \mathcal{U} \rightarrow W$ klasy $\mathcal{C}^1$ takie, że $F(v, w) = 0$ jest równoważne $w = T(v)$. Kawałek powierzchni S przedstawiliśmy jako wykres odwzorowania T . Pozostaje teraz znaleźć współrzędne pojawiające się w definicji powierzchni. W tym celu wybierzmy w $\mathbb{R}^n$ bazę $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ zgodną z rozkładem $\mathbb{R}^n = V \oplus W$. Niech ξ^i będą współrzędnymi związanymi z tą bazą. Szukany układ współrzędnych $\Phi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)$ definiujemy następująco: Dla $i = 1 \dots k$

$$\varphi^i(x) = \xi^i(x),$$

dla $j = k + 1, \dots, n$

$$\varphi^j(x) = \xi^j(x) - \xi^j(T(P_W^V(x))),$$

gdzie P_W^V jest rzutem na V wzdłuż W . Gdy więc $x \in S$, czyli $x = T(P_W^V(x))$ to współrzędne φ^j znikają. Siatkę współrzędnych związaną z Φ można sobie wyobrażać mniej więcej tak:



Rys. 8: Współrzędne

Wniosek 1 Żeby pokazać, że dany zbiór jest (lokalnie) powierzchnią wystarczy pokazać, że jest (lokalnie) wykresem odwzorowania klasy C^1 . Często definiuje się powierzchnię w ten właśnie sposób nie używając pojęcia układu współrzędnych.

Używanie twierdzenia o stałym rzędzie jest bardzo wygodne, ponieważ daje odpowiedź natury globalnej. Powierzchnię można także zadawać poprzez parametryzację, tzn. obraz odwzorowania

$$\kappa : \mathbb{R}^k \supset \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

gdzie $\mathcal{V}$ jest otwartym obszarem w $\mathbb{R}^k$. Okrąg o promieniu 1 można sparametryzować następująco

$$\kappa :]0, 2\pi[\ni \varphi \longmapsto (\cos \varphi, \sin \varphi) \in \mathbb{R}^2.$$

Obrazem tej parametryzacji jest okrąg bez jednego punktu. Zazwyczaj nie da się sparametryzować całej powierzchni za pomocą jednego odwzorowania. Parametryzacja musi także spełniać pewne warunki. Musi to być różniczkowalna injekcja, której pochodna w każdym punkcie ma maksymalny rząd. Oto stosowne twierdzenie:

Twierdzenie 2 Niech $\kappa : \mathbb{R}^k \supset \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $k < n$ będzie odwzorowaniem różniczkowalnym. Wówczas jeśli $p_0 \in \mathcal{V}$ i $\kappa'(p_0)$ jest rzędu k to istnieje otoczenie $\mathcal{O}$ punktu p_0 takie, że $\kappa(\mathcal{O})$ jest powierzchnią k -wymiarową w $\mathbb{R}^n$.

Dowód: Dla dowodu możemy założyć dla ułatwienia, że $p_0 = 0 \in \mathbb{R}^k$ oraz $\kappa(p_0) = 0 \in \mathbb{R}^n$. Oznaczmy także $V = \text{im } \kappa'(0)$ oraz wybierzmy przestrzeń W dopełniającą V tak, że $\mathbb{R}^n = V \oplus W$. Z założeń twierdzenia wynika, że $\dim V = k$. Pokażemy, że w pewnym otoczeniu punktu 0 obraz odwzorowania κ jest wykresem odwzorowania. Niech K_1 i K_2 oznaczają odwzorowania

$$K_1 : \mathbb{R}^k \rightarrow V, \quad K_1 = P_V^W \circ \kappa, \quad K_2 : \mathbb{R}^k \rightarrow W, \quad K_2 = P_W^V \circ \kappa,$$

gdzie P_V^W i P_W^V są rzutami związanymi z rozkładem $\mathbb{R}^n = V \oplus W$. Odwzorowanie K_1 spełnia warunki twierdzenia o lokalnej odwracalności. Istotnie, skoro $\kappa(x) = K_1(x) + K_2(x)$ to $\kappa'(0) = K_1'(0) + K_2'(0)$. Jednak obrazem $\kappa'(0)$ jest V , obraz $K_1'(0)$ zawarty jest w V a obraz $K_2'(0)$ zawarty jest w W , zatem $K_1'(0) = 0$ oraz $\kappa'(0) = K_1'(0)$. wnioskujemy stąd, że $K_1'(0)$ jest maksymalnego rzędu. Zgodnie z twierdzeniem o lokalnej odwracalności istnieje otoczenie $\mathcal{U}$

punktu 0 w V takie, że $K_1^{-1} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^k$ jest dobrze określone i klasy przynajmniej C^1 . Teraz możemy zapisać odwzorowanie T , którego wykresem jest (lokalnie) obraz κ :

$$T : V \supset \mathcal{U} \longmapsto W, \quad T = K_2 \circ K_1^{-1}.$$

Zgodnie z wnioskiem z poprzedniego twierdzenia wykres T jest powierzchnią wymiaru K . $\square$