# Analiza III

wykład szesnasty - streszczenie

Zajmiemy się teraz rozwinięciem funkcji holomorficznej w szereg Taylora. Przypomnijmy podstawowe fakty związane z szeregami potęgowymi o wyrazach rzeczywistych. Napis postaci:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n, \tag{1}$$

gdzie $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ jest ciągiem liczbowym o wartościach rzeczywistych, nazywaliśmy szeregiem potęgowym. Liczba rzeczywista $R$ zdefiniowana wzorem

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|c_n|}$$

nazywana jest *promieniem zbieżności* szeregu (1). Twierdzenia dotyczące zbieżności szeregów funkcyjnych gwarantują, że wewnątrz odcinka $]a-R, a+R[$ szereg jest zbieżny bezwzględnie i niemal jednostajnie, definiuje zatem pewną funkcję. Dowodziliśmy także, że funkcje będące sumami szeregów potęgowych są gładkie wewnątrz obszaru zbieżności, ponadto pochodną i funkcję pierwotną można uzyskać różniczkując i całkując szereg wyraz po wyrazie. Te same zasady obowiązują dla szeregów o wyrazach zespolonych. Oto stosowne twierdzenie (które pozostawimy bez dowodu):

**Twierdzenie 1.** *Funkcja określona wzorem*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

*w kole $\{|z-a| < R\}$, dla $R$ takiego, że $\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|c_n|}$ jest funkcją holomorficzną, ponadto*

$$f^{(n)}(a) = n!c_n$$

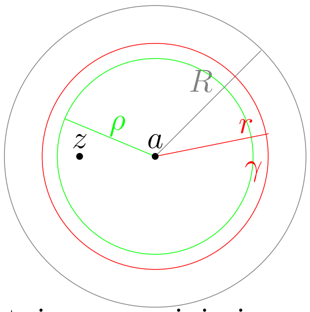
Okazuje się, że zachodzi także odwrotne twierdzenie:

**Twierdzenie 2.** *Niech $f \in \mathcal{A}(\mathcal{O})$ i niech ponadto $K(a,R) \subset \mathcal{O}$ wówczas szereg*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(z-a)^n$$

*jest niemal jednostajnie zbieżny do funkcji $f$ w kole $K(a,R) \subset \mathcal{O}$.*

**Dowód:** Skorzystamy ze wzoru całkowego Cauchy'ego dla krzywej $\gamma$ leżącej wewnątrz koła zbieżności i $z$ należącego do obszaru ograniczanego krzywą:




$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathsf{d}\xi$$

korzystając z rozwinięcia

$$\frac{1}{1-w} = 1 + w + w^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} w^n$$

dla $|w| < 1$ otrzymujemy:

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - a + a - z} = \frac{1}{(\xi - a)(1 - \frac{(z-a)}{(\xi - a)})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\xi - a)^{n+1}}$$

dla $|\frac{(z-a)}{(\xi-a)}| < 1$, czyli $|z-a| < |\xi - a| = r$ co wstawiamy do wzoru Cauchy'ego:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathsf{d}\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}\mathsf{d}\xi$$

Szacujemy teraz wyraz szeregu pod całką: funkcja $f$ na okręgu $\gamma$ jest ograniczona: $|f| \leqslant M$, ($|z-a| < \rho$, zatem

$$\left|\frac{f(\xi)(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}\right| \leqslant \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \frac{M}{r}.$$

Ponieważ $\rho < r$ szereg pod całką jest zbieżny jednostajnie (kryterium Weierstrassa) i można zamieniać kolejność całkowania i sumowania:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\mathsf{d}\xi = \sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Powyższy szereg jest zbieżny jednostajnie w kole $|z-a| \leqslant \rho$. Ponieważ $r, \rho$ były dowolne, takie że $0 < \rho < r < R$, to szereg jest zbieżny niemal jednostajnie w $|z-a| < R$.

□

Oto kilka wniosków z Twierdzenia Taylora:

**(1)** Niech $f \in \mathcal{A}(\mathcal{O})$ dla spójnego obszaru $\mathcal{O}$. Niech także $a \in \mathcal{O}$ będzie takie, że $f^{(n)}(a) = 0$ dla $n \geqslant 0$, wówczas $f$ jest równa 0 na całym $\mathcal{O}$. W szczególności jeśli dwie funkcje mają jednakowe wszystkie pochodne, w pewnym punkcie, to są równe na składowej spójnej obszaru holomorficzności.

**(2)** Załóżmy, że $a$ jest punktem skupienia zbioru $A = \{z : f(z) = 0\}$. Oznacza to, że istnieje ciąg $(a_n)$ elementów $A$ zbieżny do $a$, taki, że $a_n \neq a$. Z ciągłości funkcji $f$ wynika, że $a \in A$. Załóżmy, że $f^{(k)}(a)$ jest pierwszą nieznikającą pochodną $f$ w punkcie $a$. Wtedy z rozwinięcia Taylora mamy

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n = (z-a)^k \sum_{l=0}^{\infty} \frac{f^{(k+l)}(a)}{(k+l)!}(z-a)^l = (z-a)^k g(z)$$

gdzie $g$ jest pewną funkcją holomorficzną. Skoro $f(a_n) = 0$ to także $g(a_n) = 0$ i w konsekwencji $g(a) = 0$. Z drugiej strony $g(a) = f^{(k)}(a)\frac{1}{k!}$ co z założenia jest różne od zera. Okazało się więc, że przyjęcie założenia o istnieniu niezerowej pochodnej $f$ w punkcie $a$ doprowadziło nas do sprzeczności. Wnioskujemy zatem, że $f$ ma wszystkie pochodne równe zero w punkcie $a$, zatem jest stała i równa zero w składowej spójności obszaru holomorficzności zawierającej $a$. Okazało się, że funkcja holomorficzna albo jest równa zero na obszarze otwartym albo jej zera są izolowane, tzn zbiór miejsc zerowych nie ma punktu skupienia.

**(3)** Punkt pierwszy pozwala uzupełnić lukę w dowodzie twierdzenia o własnościach modułu funkcji holomorficznej: jeśli moduł ma lokalne maksimum to funkcja jest stała na otoczeniu maksimum. Jeśli jest stała to ma wszystkie pochodne poza zerową równe zero w punkcie $a$, zatem jest też równa tej samej stałej na całej składowej spójności obszaru holomorficzności zawierającej $a$.

Funkcję, którą można lokalnie przedstawić jako sumę zbieżnego szeregu potęgowego nazywamy *funkcją analityczną*. Twierdzenie Taylora mówi zatem, że wszystkie funkcje holomorficzne są analityczne. Funkcję holomorficzną można też zdefiniować poprzez szereg potęgowy. Wzór taki obowiązuje wewnątrz promienia zbieżności. Z drugiej strony wiadomo na przykład, że szereg

$$(z-1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \frac{(z-1)^4}{4} + \cdots$$

jest zbieżny w kole $K(1,1)$ i jest równy (wiemy to przynajmniej dla rzeczywistych wartości $z$) funkcji logarytm. Wiemy również, że logarytm zdefiniowany jest na obszarze istotnie większym niż $K(1,1)$. Dochodzimy tutaj do problemu rozszerzenia analitycznego funkcji. Więcej na ten temat w następnym wykładzie.