Analiza III

wykład siedemnasty - streszczenie

Przedłużenie analityczne i funkcje wieloznaczne:

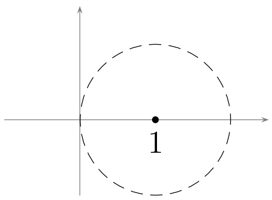
(1) Funkcja $z \mapsto \sqrt{z}$. Dla rzeczywistego $x \geqslant 0$ funkcja $x \mapsto \sqrt{x}$ jest dobrze określona. Ponadto jest ona różniczkowalna dla $x > 0$. Okazuje się, że w otoczeniu $x = 1$ funkcję tę można rozwinąć w szereg potęgowy. Używamy rozwinięcia Taylora. Oznaczając

$$\binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdot\dots\cdot\left(\frac{1}{2}-n+1\right)\frac{1}{n!}$$

otrzymujemy szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(x-1)^n$$

Łatwo sprawdzić, że szereg ten ma promień zbieżności równy 1. Można więc zdefiniować nim holomorficzną funkcję argumentu zespolonego określoną w $K(1,1)$:

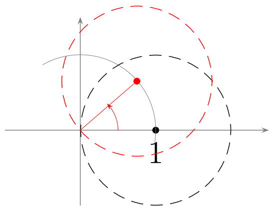


$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(z-1)^n$$

Jest faktem natury algebraicznej, że $f(z)^2 = z$. Istotnie:

$$\left(1+\frac{1}{2}(z-1)-\frac{1}{8}(z-1)^6+\frac{3}{48}(z-1)^3-\cdots\right)\cdot$$
$$\cdot\left(1+\frac{1}{2}(z-1)-\frac{1}{8}(z-1)^6+\frac{3}{48}(z-1)^3-\cdots\right) =$$
$$1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)(z-1)+\left(-2\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\right)(z-1)^2+\left(2\frac{3}{48}-2\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\right)(z-1)^3+\cdots =$$
$$1+(z-1) = z$$

Wynika z tego, że wartość w $e^{i\varphi}$ (dla $\varphi \in]-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}[$ tzn wewnątrz koła zbieżności) może być $e^{i\frac{\varphi}{2}}$ lub $-e^{i\frac{\varphi}{2}}$. Funkcja zadana szeregiem musi być ciągła, tzn właściwa jest wartość $f(e^{i\varphi}) = e^{i\frac{\varphi}{2}}$. Spróbujmy przedłużyć analitycznie tę funkcję znajdując rozwinięcie wokół $e^{i\varphi}$. Okazuje się, że jest to szereg, który też ma promień zbieżności równy 1:

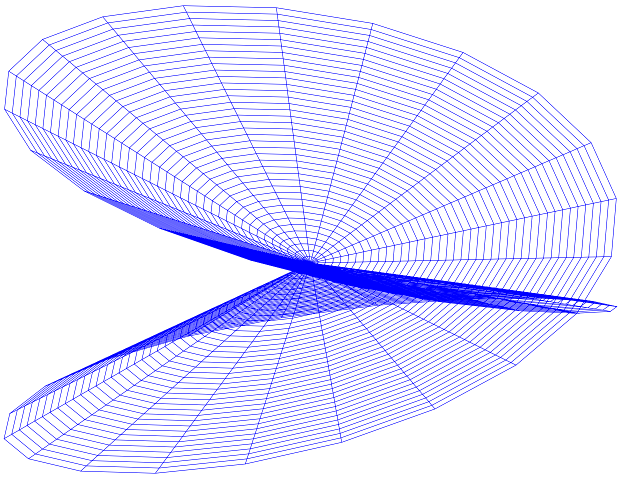


$$f(z) = e^{i\frac{\varphi}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}\left(\frac{z-e^{i\varphi}}{e^{i\varphi}}\right)^n$$

Przedłużając dalej wzdłuż okręgu jednostkowego dochodzimy znowu do punktu $z = 1$, ale rozwinięcie ma postać

$$f(z) = e^{i\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(z-1)^n.$$

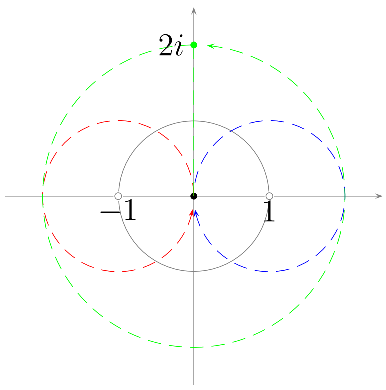
W stosunku do wyjściowej wartości w punkcie $z = 1$ funkcja zmieniła znak. Okazuje się więc, że (podobnie jak logarytm) funkcja $\sqrt{\cdot}$ jest funkcją wieloznaczną. Można ją ujednoznacznić zmniejszając dziedzinę i przyjmując podobnie jak dla logarytmu, że funkcja ta jest określona (i holomorficzna) na np. $\mathbb{C}\setminus]-\infty, 0]$, lub zdefiniować ją na odpowiedniej powierzchni Riemanna, którą można sobie wyobrażać np. tak:



(2) Funkcja $z \mapsto \sqrt{1-z^2}$. W dziedzinie rzeczywistej rozważać możemy funkcję $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$. Jest ona określona na przedziale domkniętym $[-1, 1]$ i różniczkowalna w przedziale otwartym $]-1, 1[$. Mamy nawet więcej: w przedziale otwartym $]-1, 1[$ jest to funkcja analityczna. Szereg potęgowy, który ją definiuje ma promień zbieżności równy 1, więc możemy rozszerzyć funkcję na $K(0, 1) \subset \mathbb{C}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-1)^n z^{2n}$$

Możemy próbować rozszerzać analitycznie wzdłuż krzywych zaznaczonych na rysunku:



Sprawdźmy zachowanie na krzywej czerwonej:

$$\varphi \longmapsto -1 + e^{i\varphi}, \qquad \varphi \in [0, 2\pi]$$

Skorzystamy ze znanych już własności pierwiastka

$$\sqrt{1-(-1+e^{i\varphi})^2} = \sqrt{2-e^{i\varphi}}\sqrt{e^{i\varphi}} = \dots$$

Dla $\varphi = 0$ wartość funkcji jest 1 i musi się zmieniać w sposób ciągły:

$$\dots = \sqrt{2-e^{i\varphi}}e^{i\frac{\varphi}{2}}$$

Krzywa $\varphi \mapsto 2 - e^{i\varphi}$ leży cała w jednej gałęzi pierwiastka, zatem powraca do tej samej wartości po obejściu kąta pełnego. Znak zmienia za to $\varphi \mapsto e^{i\frac{\varphi}{2}}$. Ostatecznie po obejściu osobliwości w -1 wzdłuż czerwonej krzywej funkcja zmienia wartość z 1 na -1. Podobnie stanie się po obejściu osobliwości w 1 wzdłuż krzywej niebieskiej.

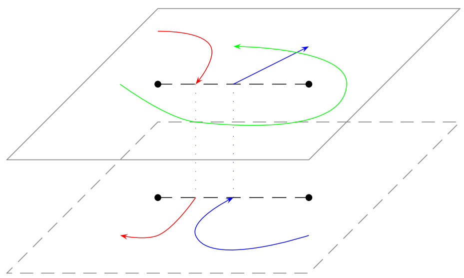
Interesujące jest zachowanie na krzywej zielonej. Od punktu $z = 0$ do punktu $z = 2i$ funkcja ma rzeczywiste wartości i $f(2i) = \sqrt{5}$. Na krzywej

$$\varphi \longmapsto 2e^{i\varphi}, \qquad \varphi \in [\frac{\pi}{2}, 2\pi + \frac{\pi}{2}]$$

mamy

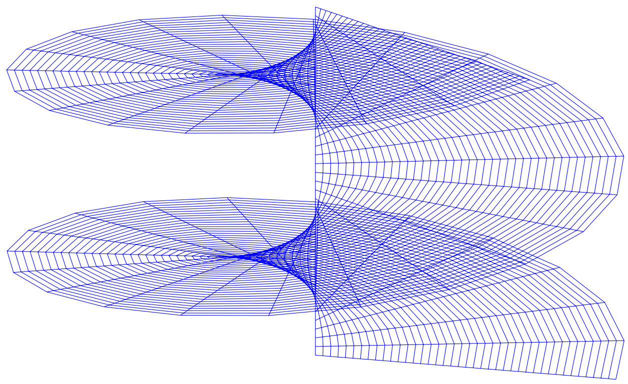
$$1 - z^2 = (1 - 2e^{i\varphi})(1 + 2e^{i\varphi}), \qquad \sqrt{1 - z^2} = \sqrt{(1 - 2e^{i\varphi})}\sqrt{(1 + 2e^{i\varphi})}$$

Tym razem obie krzywe znajdujące się pod pierwiastkami obchodzą osobliwość w 0, zatem oba pierwiastki zmieniają znak - wartość funkcji pozostaje więc bez zmian. Odpowiednia powierzchnia Riemanna ma dwa płaty połączone wzdłuż cięcia między punktami -1 a 1:



Wzdłuż czerwonej krzywej przechodzimy z góry na dół, wzdłuż niebieskiej z dołu do góry a wzdłuż zielonej zostajemy cały czas na górze.

(3) Jeszcze o logarytmie: Odpowiednia dla logarytmu powierzchnia Riemanna może wyglądać na przykład tak:



Część wykładu dotycząca szeregu Laurent'a znajdzie się w następnym streszczeniu.