Analiza III

wykład dwudziesty - streszczenie

Całka po kości: Rzecz dotyczy obliczania następującej całki:

$$\int_a^b (x-a)^p (b-x)^q Q(x) \mathsf{d}x, \qquad p+q=k\in\mathbb{Z},$$

gdzie Q jest wymierną funkcją nie mającą biegunów na odcinku $[a,b]$, $p,q>-1$. Całkę tę możemy obliczyć korzystając z twierdzenia o residuach. Zapiszmy następujące przekształcenia:

$$(x-a)^p(b-x)^q Q(x) = \left(\frac{x-a}{b-x}\right)^p (b-x)^k Q(x) = (h(x))^p\,(b-x)^k Q(x)$$

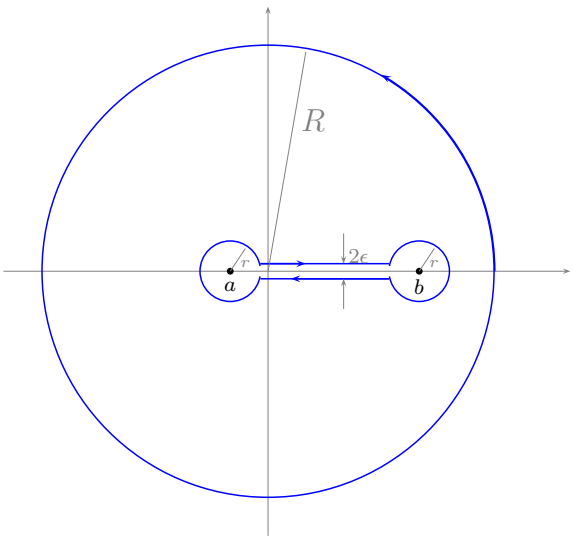
dla homografii

$$h(x)=\frac{x-a}{b-x}.$$

Wiadomo, że zastępowanie zmiennej rzeczywistej x zmienną zespoloną z w wyrażeniach zawierających pierwiastki wymaga namysłu, ponieważ wkraczamy zazwyczaj w funkcje wieloznaczne. Interpretacja napisu:

$$f(z)=(h(z))^p\,(b-x)^k Q(z)$$

nie jest więc na pierwszy rzut oka oczywista. Całkować będziemy po następującym konturze:



Zamiast zajmować się sytuacją ogólną rozwiążemy konkrety przykład: Obliczyć całkę

$$\int_1^2 (x+1)\sqrt[6]{\frac{x-1}{2-x}}\mathsf{d}x$$

Całkować będziemy funkcję $f(z)=(z+1)\sqrt[6]{\dfrac{z-1}{2-z}}$ ze stosownie zdefiniowanym pierwiastkiem. Oznaczmy $h(z)=\dfrac{z-1}{2-z}$. Jest to homografia, która zachowuje oś rzeczywistą, a wewnętrzną część konturu całkowania „kość" przekształca na kontur typu „dziurka od klucza". Istotnie,

$$h(1)=0,\quad h(2)=\infty,\quad h([1,2[)=[0,\infty[$$

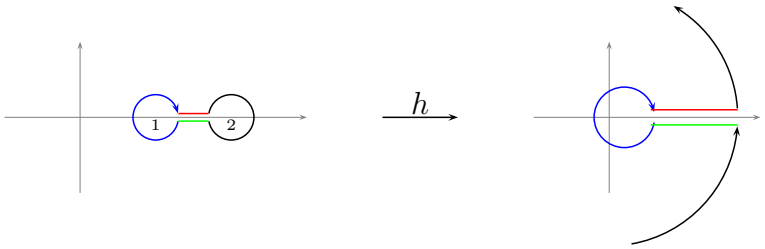
ponadto jeśli

$$C_r(a)=\{|z-a|=r\}$$

jest okręgiem o środku w a i promieniu r to dla $C_1(r)$ mamy

$$h(C_r(1))=C_{\frac{r}{1-r^2}}\left(\frac{r}{1-r^2}\right).$$

Okrąg $C_r(2)$ o środku w $z=2$ i promieniu r przechodzi przy odwzorowaniu h na okrąg o środku w -1 i promieniu $\frac{1}{r}$. Ostatecznie na obrazku wygląda to tak:



Widzimy więc, że $h(\mathbb{C}\setminus[1,2]) = \mathbb{C}\setminus[1,\infty[$. Możemy więc ujednoznacznić funkcję $z \mapsto \sqrt[6]{\frac{z-1}{2-z}}$ pisząc

$$\sqrt[6]{\frac{z-1}{2-z}} = e^{\frac{1}{6}\log h(z)}$$

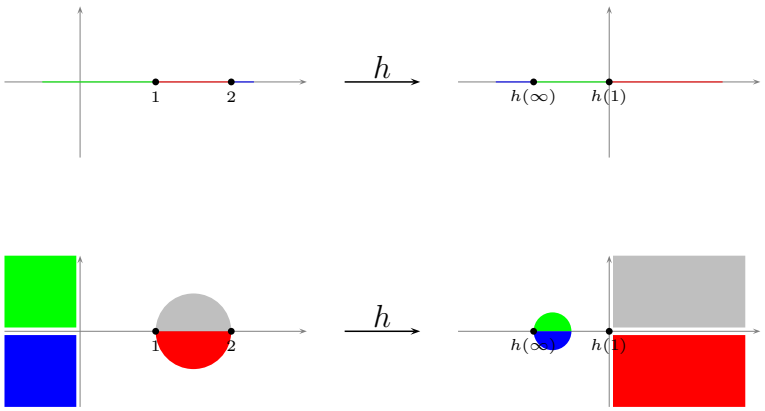
i wybierając jednoznaczną gałąź logarytmu $\mathbb{C}\setminus[0,\infty[$ gdzie $\log \rho e^{i\varphi} = \log\rho + i\varphi$ dla $\varphi \in]0,2\pi[$. Przy takiej definicji otrzymujemy dla funkcji $z \mapsto \sqrt[6]{\frac{z-1}{2-z}}$ wartości

$$0 \mapsto \sqrt[6]{h(0)} = \left(-\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{6}} = \tfrac{1}{\sqrt[6]{2}} e^{i\pi/6}$$

$$3 \mapsto \sqrt[6]{h(3)} = (-2)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{2} e^{i\pi/6}$$

$$i \mapsto \sqrt[6]{h(i)} = \left(-\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{6}} = \tfrac{\sqrt[12]{2}}{\sqrt[6]{5}} e^{i\pi/8}$$

Pomocny może być jeszcze jeden rysunek ilustrujący działanie h:



Zapiszmy teraz całki po poszczególnych fragmentach krzywej i oszacujmy ich wartość dla $r \to 0$ i $\epsilon \to 0$. Zacznijmy od całki po $C_r(1)$:

$$\left|\int_{C_r 1} f(z)\mathsf{d}z\right| = \left|\int_0^{2\pi} f(1+re^{i\varphi}) ire^{i\varphi}\mathsf{d}\varphi\right| \leqslant \int_0^{2\pi} \left|f(1+re^{i\varphi})\right| r\mathsf{d}\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} \left|(1+(1+re^{i\varphi}))\sqrt[6]{h}(1+re^{i\varphi})\right| r\mathsf{d}\varphi \leqslant$$

$$2\pi(2+r) \sup_{\varphi\in[0,2\pi]} \left|\exp(\frac{1}{6}\log\left[\frac{r^2}{1-r^2} + \frac{r}{1-r^2}e^{i\varphi}\right])\right| r =$$

$$2\pi(2+r) \sup_{\varphi\in[0,2\pi]} \left|\exp(\frac{1}{6}\log\left[\frac{r}{1-r^2}(r+e^{i\varphi})\right])\right| r =$$

$$2\pi(2+r) \sup_{\varphi\in[0,2\pi]} \sqrt[6]{\frac{r}{1-r^2}} \left|\exp(\frac{1}{6}\log\left[r+e^{i\varphi}\right])\right| r \leqslant$$

$$2\pi(2+r)\sqrt[6]{\frac{r}{1-r^2}}\sqrt[6]{(r+1)r} \longrightarrow 0$$

Bardzo podobny rachunek można zrobić dla $C_r(2)$

$$\left|\int_{C_r 2} f(z)\mathsf{d}z\right| = \left|\int_{-\pi}^{\pi} f(2+re^{i\varphi})ire^{i\varphi}\mathsf{d}\varphi\right| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi}\left|f(2+re^{i\varphi})\right| r\mathsf{d}\varphi =$$
$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|(2+(1+re^{i\varphi}))\sqrt[6]{h}(2+re^{i\varphi})\right| r\mathsf{d}\varphi \leqslant 2\pi(3+r)\sup_{\varphi\in[0,2\pi]}\left|\exp(\frac{1}{6}\log\left[-1+\frac{1}{r}e^{-i\varphi}\right])\right| r =$$
$$2\pi(3+r)\sup_{\varphi\in[0,2\pi]}\left|\exp(\frac{1}{6}\log\left[\frac{1}{r}(-r+e^{-i\varphi})\right])\right| r =$$
$$2\pi(3+r)\frac{1}{\sqrt[6]{r}}\sqrt[6]{(r+1)r} \longrightarrow 0$$

Na czerwono zostały zaznaczone czynniki odpowiadające za znikanie całek. Widać więc skąd bierze się założenie dotyczące ułamkowych potęg $p, q > -1$. Ze względu na zamianę zmiennych funkcja podcałkowa mnoży się przez r. Aby całka po małym okręgu znikała ostateczna potęga promienia musi być dodatnia. Całka po „górnej części odcinka $[1,2]$" w granicy dąży do całki I, którą mamy policzyć, zaś całka po „dolnej części" do $-Ie^{2\pi i/6}$ ze względu na zmianę argumentu logarytmu. Ostatecznie całka po kości to

$$I(1-e^{2\pi i/6})$$

co można przekształcić nieco uzyskując

$$I(1-e^{2\pi i/6}) = Ie^{\pi i/6}(e^{-\pi i/6}-e^{\pi i/6}) = -Ie^{\pi i/6}2i\sin(\pi/6) = -iIe^{\pi i/6}.$$

We wnętrzu konturu całkowania nie ma osobliwości funkcji f zatem całka po całym (dwuczęściowym) konturze jest zero:

$$-iIe^{\pi i/6} + \int_{C_R(0)} f(z)\mathsf{d}z = 0$$

Mamy więc:

$$I = \frac{1}{ie^{\pi i/6}}\int_{C_R(0)} f(z)\mathsf{d}z. \tag{1}$$

Całkę po dużym okręgu policzymy wykorzystując pojęcie residuum w ∞. Jeśli $C_R(0)$ jest zorientowany kanonicznie względem 0, to

$$\int_{C_R(0)} f(z)\mathsf{d}z = -2\pi i Res_\infty f = 2\pi i a_1, \tag{2}$$

gdzie a_1 jest współczynnikiem przy pierwszej potędze rozwinięcia funkcji $g(z) = f(\frac{1}{z})$ wokół zera. Funkcja $z \mapsto \sqrt[6]{\frac{z-1}{2-z}}$ jest holomorficzna w otoczeniu ∞, gdyż ∞ jest punktem regularnym homografii h. Zapiszmy rozwinięcie wokół zera funkcji $z \mapsto \sqrt[6]{h(\frac{1}{z})}$:

$$\sqrt[6]{h\left(\frac{1}{z}\right)} = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \cdots$$

wówczas

$$\left(1+\frac{1}{z}\right)\sqrt[6]{h\left(\frac{1}{z}\right)} = \left(1+\frac{1}{z}\right)(b_0+b_1 z+b_2 z^2+b_3 z^3\cdots) = b_0\frac{1}{z}+(b_0+b_1)+(b_1+b_2)z+(b_2+b_3)z^3+\cdots$$

Szukanym wyrazem a_1 jest więc b_1+b_2. Funkcja $z \mapsto \sqrt[6]{h\left(\frac{1}{z}\right)}$ jest holomorficzna wokół zera i przyjmuje w zerze (zgodnie z przyjętymi konwencjami) wartość $e^{i\pi/6}$. Oznaczmy teraz

$$k(z) = h\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1-z}{2z-1}$$

wtedy

$$k(0) = -1 = e^{i\pi} \qquad k'(0) = \frac{-1}{(2z-1)^2} =_{|z=0} -1 \qquad k''(0) = \frac{4}{(2z-1)^3} =_{|z=0} -4$$

Rozwijamy teraz w szereg $\exp(\frac{1}{6}\log k(z))$ wokół zera. Mamy

$$b_1 = \left[\exp\left(\frac{1}{6}\log k(z)\right)\right]'_{|z=0}$$
$$b_2 = 2\left[\exp\left(\frac{1}{6}\log k(z)\right)\right]''_{|z=0}$$

Obliczamy pierwszą pochodną:

$$\left[\exp\left(\frac{1}{6}\log k(z)\right)\right]' = \exp\left(\frac{1}{6}\log k(z)\right)\frac{1}{6}\frac{k'(z)}{k(z)} =_{|z=0} \frac{1}{6}e^{i\pi/6}$$

i drugą

$$\left[\exp\left(\frac{1}{6}\log k(z)\right)\right]'' = \left[\exp\left(\frac{1}{6}\log k(z)\right)\frac{1}{6}\frac{k'(z)}{k(z)}\right]' =$$
$$\exp\left(\frac{1}{6}\log k(z)\right)\frac{1}{36}\left(\frac{k'(z)}{k(z)}\right)^2 + \exp\left(\frac{1}{6}\log k(z)\right)\frac{1}{6}\frac{k''(z)k(z)-k'(z)k'(z)}{k^2(z)} =$$
$$\frac{1}{6}\exp\left(\frac{1}{6}\log k(z)\right)\frac{\frac{1}{6}k'(z)k'(z)+k''(z)k(z)-k'(z)k'(z)}{k^2(z)} =$$
$$\frac{1}{6}\exp\left(\frac{1}{6}\log k(z)\right)\frac{-\frac{5}{6}k'(z)k'(z)+k''(z)k(z)}{k^2(z)} =_{|z=0}$$
$$\frac{1}{6}e^{i\pi/6}\frac{-\frac{5}{6}+4}{1} = \frac{1}{36}e^{i\pi/6}(-5+24) = e^{i\pi/6}\frac{19}{36}.$$

Zatem

$$b_1 = \frac{1}{6}e^{i\pi/6}, \qquad b_2 = \frac{1}{2}e^{i\pi/6}\frac{19}{36} = e^{i\pi/6}\frac{19}{72}.$$

Otrzymane wyniki podstawiamy do (1) z wykorzystaniem (2):

$$I = \frac{1}{ie^{\pi i/6}}2\pi i\left(\frac{1}{6}e^{i\pi/6} + e^{i\pi/6}\frac{19}{72}\right) = \pi\frac{31}{36}.$$