Analiza III

wykład dwudziesty pierwszy - streszczenie

Funkcje meromorficzne: Niech $\mathcal{O}$ będzie obszarem otwartym w $\mathbb{C}$. *Funkcją meromorficzną* na $\mathcal{O}$ nazywamy funkcję, której jedynymi punktami osobliwymi w tym obszarze są bieguny. Zbiór funkcji meromorficznych na $\mathcal{O}$ oznaczamy $\mathcal{M}(\mathcal{O})$. Zauważmy, że bieguny funkcji meromorficznej nie mogą mieć punktu skupienia w $\mathcal{O}$, gdyż wówczas punkt skupienia byłby punktem istotnie osobliwym tej funkcji, a więc funkcja nie byłaby meromorficzna.

Funkcją meromorficzną na całym $\mathbb{C}$ jest na przykład $z \mapsto \operatorname{ctg} z$. Jej biegunami są zera sinusa, czyli punkty $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Jest to funkcja, która ma przeliczalnie wiele biegunów. Punkt ∞ jest punktem istotnie osobliwym funkcji $z \mapsto \operatorname{ctg} z$, czyli funkcja ta nie jest meromorficzna na sferze Riemanna.

Innym przykładem funkcji meromorficznej na $\mathbb{C}$ jest funkcja wymierna. Funkcja wymierna ma skończoną liczbę biegunów. Ponadto punkt ∞ jest punktem regularnym (jeśli stopień licznika jest nie większy niż stopień mianownika) lub biegunem (jeśli stopień licznika jest większy niż stopień mianownika), zatem funkcja wymierna jest funkcją meromorficzną także na sferze Riemanna.

Zauważmy, że jeśli $f, g \in \mathcal{O}$ to $f+g \in \mathcal{O}$, $\lambda f \in \mathcal{O}$ oraz $f \cdot g \in \mathcal{O}$. Zbiór funkcji meromorficznych na $\mathcal{O}$ jest więc przestrzenią wektorową i ma strukturę algebry względem mnożenia. Ponadto jeśli $\mathcal{O}$ jest zbiorem spójnym to także $f/g \in \mathcal{O}$, zatem $\mathcal{M}(\mathcal{O})$ jest ciałem. Spójność potrzebna jest do tego, aby wykluczyć funkcje równe zero na niektórych składowych spójnych $\mathcal{O}$,. Ich odwrotność miałaby nieizolowane punkty osobliwe.

Wzór na liczbę zer i biegunów funkcji meromorficznej: Niech $f \in \mathcal{M}(\mathcal{O})$ jest równe 0 w punkcie $z_r \in \mathcal{O}$. Wówczas f jest holomorficzna w pewnym otoczeniu z_r i możemy ją rozwinąć w szereg Taylora:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_r)^n.$$

Współczynnik c_0 jest równy 0 i być może jeszcze kilka innych początkowych współczynników. Niech c_k będzie pierwszym niezerowym współczynnikiem, wówczas:

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z - z_r)^n = (z - z_r)^k \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k} (z - z_r)^n = (z - z_r)^k g(z).$$

Funkcja g jest holomorficzna w otoczeniu z_0 i $g(z_0) \neq 0$. Mówimy w takiej sytuacji, że funkcja f ma w z_0 zero rzędu k. Pochodna funkcji f ma zatem zero rzędu $k-1$, bo naturalnie

$$f'(z) = k(z - z_0)^{k-1} g(z) + (z - z_r)^k g'(z) = (z - z_0)^{k-1} \left[k g(z) + (z - z_r) g'(z) \right].$$

Funkcja f'/f (nazywana zazwyczaj pochodną logarytmiczną) ma więc w z_0 biegun pierwszego rzędu:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{(z - z_r)^{k-1} \left[k g(z) + (z - z_r) g'(z) \right]}{(z - z_r)^k g(z)} = \frac{k g(z) + (z - z_r) g'(z)}{(z - z_r) g(z)} = \frac{k g(z)}{(z - z_r)} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Ponieważ $g(z) \neq 0$ mamy

$$Res_{z_r} \frac{f'}{f} = k.$$

Niech teraz w_s będzie biegunem rzędu l funkcji f. Wtedy można rozwinąć funkcję w szereg Laurenta w otoczeniu w_s:

$$f(z) = \sum n = -l^{\infty} c_n (z - w_s)^n = \frac{1}{(z - w_s)^l} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-l} (z - w_s)^n = \frac{1}{(z - w_s)^l} h(z).$$

Funkcja h jest holomorficzna w otoczeniu w_s. Pochodna funkcji f ma postać:

$$f'(z) = (-l)\frac{1}{(z-w_s)^{l+1}}h(z) + \frac{1}{(z-w_s)^l}h'(z),$$

zatem pochodna logarytmczna opisana jest wzorem

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{(-l)\frac{1}{(z-w_s)^{l+1}}h(z) + \frac{1}{(z-w_s)^l}h'(z)}{\frac{1}{(z-w_s)^l}h(z)} = \frac{-l}{(z-w_s)} + \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

Pochodna logarytmiczna ma więc w w_s biegun rzędu pierwszego i

$$Res_{w_s}\frac{f'}{f} = -l.$$

Jeśli więc krzywa γ jest brzegiem zwartego obszaru D zawartego w spójnym obszarze $\mathcal{O}$ i funkcja f jest meromorficzna w $\mathcal{O}$ i na γ nie leży żadne zero ani żaden biegun funkcji f, to

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\mathsf{d}z = \sum_r k_r - \sum_s l_s,$$

gdzie k_r jest rzędem zera w punkcie z_r i r przebiega wszystkie zera w obszarze D, natomiast l_s jest rzędem bieguna w punkcie w_s i indeks s przebiega wszystkie bieguny zawarte w obszarze D. Powyższy wzór nosi nazwę **wzoru na liczbę zer i biegunów funkcji meromorficznej.** Może on posłużyć do alternatywnego dowodu Podstawowego Twierdzenia Algebry. Patrz skrypt P.U.

Funkcje meromorficzne na $\bar{\mathbb{C}}$: Wróćmy teraz do funkcji meromorficznych na sferze Riemanna. Wiemy już, że funkcje wymierne służą za przykłady takich funkcji. Okazuje się, że jest nawet więcej:

Twierdzenie 1. *Każda funkcja meromorficzna na sferze Riemanna jest funkcją wymierną*

Dowód: Zauważmy najpierw, że zbiór biegunów funkcji f meromorficznej na $\bar{\mathbb{C}}$ musi być skończony. Zastanówmy się co by było, gdyby był nieskończony. W takiej sytuacji ze zbioru biegunów dałoby się wybrać ciąg. Jeśli ciąg ten byłby ograniczony, tzn wszystkie wyrazy tego ciągu zawarte byłyby w pewnej domkniętej (a więc zwartej) $\bar{K}(0,R)$, to ciąg ten musiałby mieć punkt skupienia (*każdy ciąg elementów ze zbioru zwartego zawiera podciąg zbieżny do elementu tego zbioru, granica podciągu jest punktem skupienia ciągu*), punkt skupienia byłby punktem istotnie osobliwym funkcji f. Jeśli ciąg biegunów jest nieograniczony, to znaczy, że każde otoczenie nieskończoności zawiera nieskończenie wiele wyrazów tego ciągu, a więc punkt w nieskończoności jest istotnie osobliwy dla funkcji f.

Niech więc $\{a_1, a_2, \dots a_m\}$ będzie zbiorem biegunów funkcji f różnych od ∞. Niech $k_1, \dots k_m$ oznacza rzędy tych biegunów. Oznaczmy także przez g_j część główną rozwinięcia funkcji f w szereg Laurenta otoczeniu punktu a_j. W tej sytuacji funkcja:

$$f - \sum_{j=1}^{m} g_j(z)$$

nie ma biegunów w $\mathbb{C}$, jest więc funkcją całkowitą. Funkcja całkowita mająca w nieskoczoności biegun, a nie punkt istotnie osobliwy jest wielomianem. Oznacza to, że f jest sumą wielomianu i funkcji wymiernej, jest więc wymierna.$\square$