Analiza III

wykład dwudziesty drugi - streszczenie

Rozkład funkcji meromorficznej na ułamki proste: Wiadomo, że funkcje wymierne mają rozkład na ułamki proste. Rozkład ten wykorzystywany był w poprzednim twierdzeniu o funkcjach meromorficznych na $\bar{\mathbb{C}}$. Powstaje pytanie, czy inne funkcje meromorficzne (tym razem już na $\mathbb{C}$, a nie na sferze Riemanna) daje się zapisać w podobny sposób? Okazuje się, że tak.

Zauważmy przede wszystkim, że funkcja meromorficzna na $\mathbb{C}$ może mieć co najwyżej przeliczalnie wiele biegunów, oraz że zbiór biegunów, jeśli jest nieskończony to jest nieograniczony. Istotnie, jeśli zbiór biegunów byłby nieprzeliczany, to musiałby mieć punkt skupienia w $\mathbb{C}$, zatem funkcja miałaby punkt istotnie osobliwy. Gdyby za to przeliczalny zbiór biegunów był ograniczony, to dawałoby się z niego wybrać ciąg zbieżny i znowu zbiór biegunów miałby punkt skupienia będący punktem istotnie osobliwym dla funkcji. Okazuje się się więc, że bieguny funkcji meromorficznej daje się ustawić w ciąg taki, że

$$0 \leqslant |b_1| \leqslant |b_2| \leqslant \ldots \leqslant |b_n| \leqslant \cdots .$$

Weźmy więc zbiór punktów $\mathbb{C}$ spełniający powyższy warunek i taki, że $b_1 \neq 0$ i skonstruujmy funkcję meromorficzną G mającą w punktach b_j bieguny o rzędach k_j. Niech g_j oznacza funkcję

$$g_j(z) = \frac{c^{(j)}_{-k_j}}{(z-b_j)^{k_j}} + \frac{c^{(j)}_{-k_j+1}}{(z-b_j)^{k_j-1}} + \cdots + \frac{c^{(j)}_{-1}}{(z-b_j)}$$

Funkcja g_j jest holomorficzna na $\mathbb{C} \setminus \{b_j\}$, ma biegun rzędu k_j w punkcie b_j. Ponadto w kole $K(0,|b_j|)$ funkcja ta jest reprezentowana niemal jednostajnie i bezwzględnie zbieżnym szeregiem

$$g_j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(j)} z^n.$$

Szereg ten jest zbieżny jednostajnie w każdym domkniętym kole o promieniu mniejszym niż $|b_j|$, w szczególności np w $\bar{K}(0, \frac{|b_j|}{2})$. W mniejszym kole mogę więc przybliżać wartość $g_j(z)$ z dowolną dokładnością. W szczególności istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\left| g_j(z) - \sum_{n=0}^{N} a_n^{(j)} z^n \right| \leqslant \frac{1}{j^2}$$

Wielomian z powyższego wzoru oznaczymy w_j. Niech teraz

$$G(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(g_j(z) - w_j(z)\right).$$

Pokażemy, że powyższy szereg funkcyjny definiuje funkcję meromorficzną o biegunach w punktach b_j rzędu k_j. Ustalmy dowolne $R > 0$ i niech r oznacza liczbę naturalną taką, że $\frac{|b_{r+1}|}{2} > R$. Możemy zapisać, dla $|z| \leqslant R$, że

$$G(z) = \sum_{j=1}^{r} \left(g_j(z) - w_j(z)\right) + \sum_{j=r+1}^{\infty} \left(g_j(z) - w_j(z)\right).$$

Wtedy nieskończona część szeregu, tzn $\sum_{j=r+1}^{\infty} \left(g_j(z) - w_j(z)\right)$ ma tę własność, że dla $|z| \leqslant R$ różnica $|g_j(z) - w_j(z)| \leqslant \frac{1}{j^2}$, gdyż mamy

$$|z| \leqslant R < \frac{|b_j|}{2} \quad \text{dla} \quad j > r.$$

Nieskończona część sumy jest więc jednostajnie zbieżna (tw. Weierstrassa) w kole $K(0,R)$ i reprezentuje funkcję holomorficzną. Skończona część sumy jest funkcją meromorficzną w kole $K(0,R)$. Ponieważ R było dowolne, wnioskujemy, że G jest funkcją meromorficzną na $\mathbb{C}$.

Niech teraz $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ będzie funkcją mającą bieguny rzędu k_j w b_j z częściami głównymi g_j. Wtedy

$$h(z) = f(z) - G(z)$$

jest funkcją holomorficzną w $\mathbb{C}$. Jeśli f ma dodatkowo biegun rzędu k_0 w $z = 0$, to funkcja

$$h(z) = f(z) - G(z) - g_0(z)$$

jest funkcją całkowitą, jeśli

$$g_0(z) = \frac{c^{(0)}_{-k_0}}{z^{k_0}} + \frac{c^{(0)}_{-k_0+1}}{z^{k_0-1}} + \cdots + \frac{c^{(0)}_{-1}}{z}$$

jest częścią główną rozwinięcia f wokół zera. Ostatecznie więc mamy

$$f(z) = h(z) + G(z) \qquad \text{lub} \qquad f(z) = h(z) + g_0(z) + G(z)$$

w zależności od istnienia bądź nie bieguna w $z = 0$. Powyższy rozkład nosi nazwę rozkładu **funkcji meromorficznej na ułamki proste**. Twierdzenie o istnieniu tego rozkładu pochodzi od Mittag-Leffler'a.

Przykład: Skonstruujemy teraz rozkład na ułamki proste dla funkcji $f(z) = \dfrac{1}{\sin z}$. Funkcja ta jest meromorficzna z biegunami rzędu 1 w punktach $b_k = k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$. Części główne $g_k(z)$ w otoczeniu biegunów mają postać

$$g_k = (-1)^k \frac{1}{z - k\pi}.$$

Każda z funkcji g_k rozwija się w kole $K(0, |k|\pi)$ w szereg Taylora

$$(-1)^k \frac{1}{z - k\pi} = \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{k\pi}\right)^n.$$

Okazuje się, że w roli wielomianu w_k można brać zerowe przybliżenie, czyli

$$w_k(z) = \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi}.$$

Istotnie, dla $k > 0$ mamy

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{z - k\pi} - \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{k\pi}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{z}{k\pi(z - k\pi)}.$$

Ustalmy $R > 0$ i weźmy, jak w powyższych rozważaniach k_0 takie, że $R < \frac{(k_0+1)\pi}{2}$. Wtedy mamy

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{z}{k\pi(z - k\pi)} = \sum_{k=1}^{k_0} (-1)^k \frac{z}{k\pi(z - k\pi)} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} (-1)^k \frac{z}{k\pi(z - k\pi)}$$

i nieskończona część szeregu jest zbieżna jednostajnie, gdyż dla $|z| \leqslant R \leqslant \frac{(k_0+1)\pi}{2}$ mamy

$$\left|(-1)^k \frac{z}{k\pi(z - k\pi)}\right| = \left|\frac{z}{k\pi(z - k\pi)}\right| = \frac{|z|}{k\pi|z - k\pi|} \leqslant \frac{R}{k\pi\frac{k\pi}{2}} = \frac{2R}{k^2\pi^2}.$$

Nieskończona część szeregu zadaje więc w $K(0, R)$ funkcję holomorficzną. Część skończona jest meromorficzna, zatem, ostatecznie, funkcja $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{z}{k\pi(z-k\pi)}$ jest meromorficzna na $K(0, R)$. Z dowolności R wynika, że funkcja ta jest meromorficzna na $\mathbb{C}$. Podobnie zrobić możemy dla ujemnej części zbioru biegunów otrzymując funkcję meromorficzną na $\mathbb{C}$ zadaną wzorem:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{-k} \frac{1}{z + k\pi} - \frac{(-1)^{-k+1}}{-k\pi} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{-k} \left[\frac{1}{z + k\pi} - \frac{1}{k\pi}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{-k} \frac{z}{k\pi(z + k\pi)}.$$

Dołączając biegun w $z = 0$ otrzymujemy rozkład f na ułamki proste postaci:

$$f(z) = \frac{1}{\sin z} = h(z) - \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{z - k\pi} - \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{-k} \frac{1}{z + k\pi} - \frac{(-1)^{-k+1}}{-k\pi}$$

Zapisując oba szeregi pod wspólną sumą (co można zrobić, gdyż na każdym domkniętym kole są one jednostajnie zbieżne po pominięciu paru początkowych wyrazów) otrzymujemy

$$\frac{1}{\sin z} = h(z) + \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \left[\frac{1}{z-k\pi} + \frac{1}{k\pi} + \frac{1}{z+k\pi} - \frac{1}{k\pi}\right] =$$

$$h(z) + \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \left[\frac{1}{z-k\pi} + \frac{1}{z+k\pi}\right] =$$

$$h(z) + \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2}$$

Do znalezienia pełnego rozkładu na ułamki proste musimy znaleźć jeszcze funkcję h. Zauważmy, że h musi być okresowa z okresem 2π, bo

$$h(z) = \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2}$$

co można inaczej zapisać jako

$$= \frac{1}{\sin z} - \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{z-k\pi}$$

a przesunięcie argumentu o 2π nie zmienia zarówno funkcji sin jak i sumy szeregu. Wartości funkcji h na $\mathbb{C}$ są więc takie same jak wartości w pasku $-\pi \leqslant \Re(z) \leqslant \pi$. Twierdzę, że h jest ograniczona. Sprawdźmy to rozpatrując oddzielnie obszary

$$D_1 = \{z : \ -\pi \leqslant \Re(z) \leqslant \pi, \ -\pi \leqslant \Im(z) \leqslant \pi\}$$

i

$$D_2 = \{z : \ -\pi \leqslant \Re(z) \leqslant \pi, \ |\Im(z)| > \pi\}.$$

W D_1 funkcję h zapisujemy jako

$$h(z) = \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z} + \frac{1}{z-\pi} + \frac{1}{z+\pi} - \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{z-k\pi} + (-1)^{-k}\frac{1}{z+k\pi}$$

zapisując oddzielnie części osobliwe w D_1. Sprawdzamy, że granice przy $z \to 0, \pm\pi$ funkcji h są równe 0. W D_1 cześć nieskończona jest jednostajnie zbieżna, można więc wejść z granicą pod znak sumy. Dostajemy wtedy przy $h \to 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z} + \frac{1}{z-\pi} + \frac{1}{z+\pi} - \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{z-k\pi} + (-1)^{-k}\frac{1}{z+k\pi} =$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{-\pi} + \frac{1}{+\pi} - \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{-k\pi} + (-1)^{-k}\frac{1}{+k\pi} = 0 + 0$$

Przy $h \to \pi$ mamy

$$\lim_{h\to \pi} \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z} + \frac{1}{z-\pi} + \frac{1}{z+\pi} - \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{z-k\pi} + (-1)^{-k}\frac{1}{z+k\pi} =$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z-\pi}\right) - \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} - \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{\pi-k\pi} + (-1)^{-k}\frac{1}{\pi+k\pi} =$$

$$0 - \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} - \frac{1}{3\pi} - \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{4\pi} + \cdots = 0$$

Podobny rachunek można wykonać dla $z \to -\pi$ (lub skorzystać z okresowości h). Poza $z = 0$ i $z = \pm\pi$ funkcja jest ciągła w D_1, powyższy rachunek pokazał, że jest też ciągła w wyróżnionych punktach zatem ograniczona gdyż D_1 jest zwarty. Teraz musimy zająć się D_2.

Obszar D_2 jest nieco bardziej kłopotliwy. Zauważmy najpierw, że

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y}$$

W obszarze D_2 funkcja sin nie ma zera zatem jej odwrotność jest ciągła. Gdy y dąży do $+\infty$ moduł $\sin z$ dąży do $+\infty$, zatem odwrotność sinusa dąży do zera. Gdy y dąży do $-\infty$ również moduł $\sin z$ dąży do $+\infty$, zatem odwrotność sinusa dąży do zera. Gwarantują to własności funkcji hiperbolicznych. Podobnie rzecz się ma z funkcją $\frac{1}{z}$ – w obszarze D_2 jest ona ograniczona. Zajmijmy się teraz funkcją

$$z \longmapsto \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2}$$

Zapiszmy oddzielnie część rzeczywistą i urojoną dla $z = x + iy$ w obszarze D_2, czyli dla $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ i $|y| \geqslant \pi$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2} &= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \left[\frac{1}{x - k\pi + iy} + \frac{1}{x + k\pi + iy}\right] = \\
&\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \left[\frac{x - k\pi - iy}{(x - k\pi)^2 + y^2} + \frac{x + k\pi - iy}{(x + k\pi)^2 + y^2}\right] = \\
&\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \left[\frac{x - k\pi}{(x - k\pi)^2 + y^2} + \frac{x + k\pi}{(x + k\pi)^2 + y^2}\right] + \\
&\qquad i \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k y \left[\frac{-1}{(x - k\pi)^2 + y^2} + \frac{-1}{(x + k\pi)^2 + y^2}\right]
\end{aligned}$$

Szeregi definiujące część urojoną i rzeczywistą są w interesującym nas obszarze jednostajnie zbieżne. Korzystamy z kryterium Dirichleta. Szereg $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$ (rozbieżny) ma ograniczoną sumę częściową, a ciągi funkcyjne

$$f_k(x,y) = \frac{x - k\pi}{(x - k\pi)^2 + y^2} + \frac{x + k\pi}{(x + k\pi)^2 + y^2}, \qquad g_k(x,y) = \frac{-1}{(x - k\pi)^2 + y^2} + \frac{-1}{(x + k\pi)^2 + y^2}$$

są monotoniczne w normie jednostajnej i dążą do zera. Możemy zatem analizować granicę pod znakiem sumy. Zarówno część urojona jak i rzeczywista dąży do zera gdy $|y|$ dąży do nieskończoności. Funkcja zdefiniowana badanym przez nas szeregiem jest ciągła (granica jednostajna funkcji ciągłych) i w nieskończoności ma granicę 0, zatem jest ograniczona. Wszystkie trzy składniki funkcji h okazały się więc ograniczone na D_2, zatem sama funkcja h jest ograniczona w tym obszarze.

Biorąc pod uwagę wyniki dotychczasowych rachunków stwierdzamy, że funkcja h jest funkcją całkowitą. Jest bowiem okresowa względem x z okresem 2π, i ograniczona w pasie $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, zatem ograniczona na całym $\mathbb{C}$. Ewentualne bieguny okazały się osobliwościami usuwalnymi, zatem funkcja h jest holomorficzna. Z twierdzenia Liouville'a wynika więc, że jest to funkcja stała. Wiemy także, że $h(0) = 0$, zatem $h = 0$ na $\mathbb{C}$. Ostatecznie rozkład funkcji $\frac{1}{\sin z}$ na ułamki proste ma postać:

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2}.$$