Analiza III

wykład dwudziesty trzeci - streszczenie

Rozpoczynamy obecnie pracę nad tak zwaną **teorią dystrybucji**, zwaną inaczej teorią funkcji uogólnionych. Poszukując literatury dotyczącej tego tematu trzeba mieć na uwadze, że słowo „dystrybucja" ma w matematyce przynajmniej dwa znaczenia. W analizie funkcjonalnej dystrybucja oznacza (najogólniej mówiąc) odwzorowanie liniowe określone na zbiorze funkcji, natomiast w geometrii różniczkowej dystrybucja oznacza rozmaitość wraz z wyróżnioną w każdym punkcie podprzestrzenią wektorową w przestrzeni stycznej. Oba byty matematyczne są używane w fizyce. Przez najbliższe kilka wykładów zajmować sie będziemy dystrybucjami w sensie analizy funkcjonalnej.

O czym będzie mowa: na wykładach z fizyki spotkali się już Państwo zapewne z tak zwaną deltą Diraca. Mówi się o niej często jako o „funkcji delta Diraca", oznacza się symbolem δ_0 i używa w następujący sposób: Jeśli f jest funkcją rzeczywistą to

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_0(x)\mathsf{d}x = f(0). \tag{1}$$

Funkcja delta Diraca powinna mieć zatem własność $\delta_0(x) = 0$ dla wszystkich $x \neq 0$ i ponadto powinna mieć całkę równą 1, tzn

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_0(x)\mathsf{d}x = 1.$$

Oczywiście taka *funkcja* nie istnieje, (jeśli słowo *funkcja* mamy tu traktować poważnie). Tym nie mniej jakiś obiekt matematyczny mający powyższe własności jednak istnieje. Weźmy na przykład funkcję (tym razem prawdziwą) schodkową Heaviside'a:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geqslant 0 \end{cases}$$

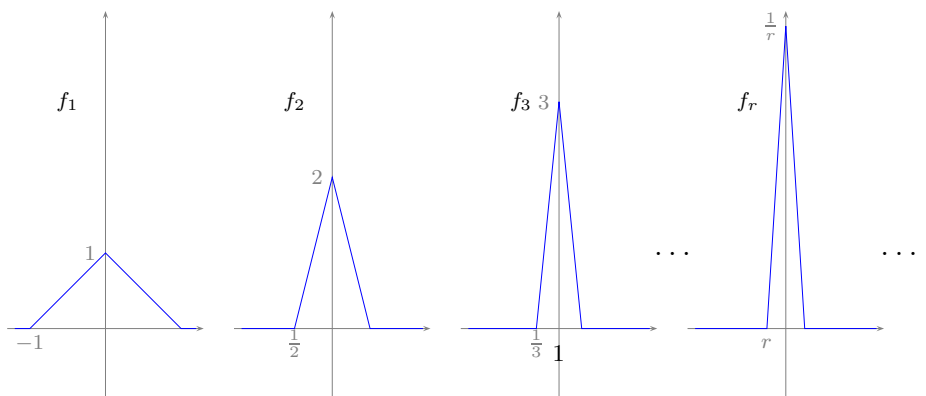
Spróbujmy policzyć pochodną θ' w pewien szczególny sposób. Niech f będzie różniczkowalną funkcją rzeczywistą znikającą w nieskończoności, wówczas (całkujemy przez części):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\theta'(x)\mathsf{d}x = f(x)\theta(x)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\theta(x)\mathsf{d}x =$$
$$= \int_{0}^{\infty} f'(x)\mathsf{d}x = -f(x)|_{0}^{\infty} = f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_0(x)\mathsf{d}x$$

Okazało się, że po scałkowaniu z funkcją θ' daje δ. Funkcja Heaviside'a jest kawałkami stała, więc jej pochodna (tam gdzie istnieje w normalnym sensie) jest zero. W punkcie nieciągłości pochodna w sensie różniczkowania funkcji nie istnieje, ale zapisany powyżej rachunek pokazuje, że być może warto rozszerzyć zakres rozumienia tego pojęcia tak, żeby można było napisać:

$$\theta' = \delta_0. \tag{2}$$

Jeszcze inne spojrzenie na δ_0, które często stosuje się w praktyce to podejście przez przybliżenie: bierzemy ciąg funkcji o tej własności, że ich nośnik „dąży do zbioru jednopunktowego $\{0\}$" i całka z tej funkcji po całym $\mathbb{R}$ jest stale równa 1, na przykład:



Dla funkcji (ciągłej) φ obliczmy

$$\lim_{r\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f_r(x)\varphi(x)\mathsf{d}x$$

gdzie f_r jest jak na powyższym rysunku, tzn

$$f_r(x)=\begin{cases} 0 & x\leqslant -r \\ \dfrac{1}{r^2}x+\dfrac{1}{r} & -r<x\leqslant 0 \\ -\dfrac{1}{r^2}x+\dfrac{1}{r} & 0<x\leqslant r \\ 0 & x>r \end{cases}$$

Liczymy:

$$(3)\quad \int_{-\infty}^{\infty} f_r(x)\varphi(x)\mathsf{d}x=\int_{-r}^{0}\left(\frac{1}{r^2}x+\frac{1}{r}\right)\varphi(x)\mathsf{d}x+\int_{0}^{r}\left(-\frac{1}{r^2}x+\frac{1}{r}\right)\varphi(x)\mathsf{d}x= \\ \frac{1}{r^2}\left(\int_{-r}^{0}x\varphi(x)\mathsf{d}x-\int_{0}^{r}x\varphi(x)\mathsf{d}x\right)+\frac{1}{r}\int_{-r}^{r}\varphi(x)\mathsf{d}x$$

Do całek w nawiasie stosujemy całkowanie przez części:

$$\int_{-r}^{0}x\varphi(x)\mathsf{d}x=x\int_{0}^{x}\varphi(t)\mathsf{d}t\Big|_{-r}^{0}-\int_{-r}^{0}\left(\int_{0}^{x}\varphi(t)\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}x=r\int_{0}^{-r}\varphi(t)\mathsf{d}t-\int_{-r}^{0}\left(\int_{0}^{x}\varphi(t)\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}x$$
$$\int_{0}^{r}x\varphi(x)\mathsf{d}x=x\int_{0}^{x}\varphi(t)\mathsf{d}t\Big|_{0}^{r}-\int_{0}^{r}\left(\int_{0}^{x}\varphi(t)\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}x=r\int_{0}^{r}\varphi(t)\mathsf{d}t-\int_{0}^{r}\left(\int_{0}^{x}\varphi(t)\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}x$$

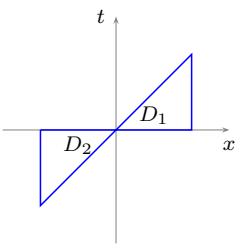
Wyrażenie w nawiasie przyjmuje więc postać:

$$\int_{-r}^{0}x\varphi(x)\mathsf{d}x-\int_{0}^{r}x\varphi(x)\mathsf{d}x= \\ r\int_{0}^{-r}\varphi(t)\mathsf{d}t-\int_{-r}^{0}\left(\int_{0}^{x}\varphi(t)\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}x-r\int_{0}^{r}\varphi(t)\mathsf{d}t+\int_{-r}^{0}\left(\int_{0}^{x}\varphi(t)\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}x= \\ -r\int_{-r}^{r}\varphi(t)\mathsf{d}t-\int_{-r}^{0}\left(\int_{0}^{x}\varphi(t)\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}x+\int_{0}^{r}\left(\int_{0}^{x}\varphi(t)\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}x$$

Wstawmy otrzymany wynik do (3):

$$(4)\quad \int_{-\infty}^{\infty} f_r(x)\varphi(x)\mathsf{d}x= \\ \frac{1}{r^2}\left(-r\int_{-r}^{r}\varphi(t)\mathsf{d}t-\int_{-r}^{0}\left(\int_{0}^{x}\varphi(t)\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}x+\int_{0}^{r}\left(\int_{0}^{x}\varphi(t)\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}x\right)+\frac{1}{r}\int_{-r}^{r}\varphi(x)\mathsf{d}x \\ =-\frac{1}{r}\int_{-r}^{r}\varphi(t)\mathsf{d}t+\frac{1}{r^2}\left(-\int_{-r}^{0}\left(\int_{0}^{x}\varphi(t)\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}x+\int_{0}^{r}\left(\int_{0}^{x}\varphi(t)\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}x\right)+\frac{1}{r}\int_{-r}^{r}\varphi(x)\mathsf{d}x$$

Wyrażenia niebieskie w (4) się upraszczają. Całki iterowane interpretujemy jako całki po pewnym obszarze w $\mathbb{R}^2$.



Pierwsza całka w nawiasie w wyrażeniu (4) jest całką po obszarze D_2, zaś druga po obszarze D_1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_r(x)\varphi(x)\mathsf{d}x=\frac{1}{r^2}\left(\int_{D_2}\varphi(t)\mathsf{d}x\mathsf{d}t+\int_{D_1}\varphi(t)\mathsf{d}x\mathsf{d}t\right)=\frac{1}{r^2}\int_{D_1\cup D_2}\varphi(t)\mathsf{d}x\mathsf{d}t.$$

Szacujemy:

$$\frac{1}{r^2}r^2 \inf_{t\in[-r,r]} \varphi(t) \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} f_r(x)\varphi(x)\mathsf{d}x \leqslant \frac{1}{r^2}r^2 \sup_{t\in[-r,r]} \varphi(t)$$

$$\inf_{t\in[-r,r]} \varphi(t) \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} f_r(x)\varphi(x)\mathsf{d}x \leqslant \sup_{t\in[-r,r]} \varphi(t)$$

i przechodzimy do granicy z $r \to 0$:

$$\varphi(0) \leqslant \lim_{r\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f_r(x)\varphi(x)\mathsf{d}x \leqslant \varphi(0)$$

Ostatecznie

$$\lim_{r\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f_r(x)\varphi(x)\mathsf{d}x = \varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_0(x)\varphi(x)$$

i dalej chciałoby się napisać

$$\lim_{r\to 0} f_r = \delta_0. \tag{5}$$

Granica musi być jednak w innym sensie niż zwykle dla (uogólnionych) ciągów funkcyjnych. Punktowa granica w $x = 0$ nie istnieje, w każdym innym punkcie jest równa 0.

Zauważmy, że wszystkie omawiane dzisiaj przez nas równości, takie jak (1), (2), (5) zostały wyprowadzone w działaniu na funkcję. Tajemnicze obiekty typu δ_0 działając na funkcję dawały liczbę. Działanie to ma charakter liniowy (czego bezpośrednio nie zaobserwowaliśmy w omawianych przykładach). Powyższe obserwacje uzasadniają definicje, które szczegółowo omawiać będziemy na następnym wykładzie, a które można by podsumować następująco: *Dystrybucje są to odwzorowania liniowe na przestrzeni funkcji.* Zazwyczaj nakładamy na dystrybucje warunek ciągłości, ale oczywiście żeby to miało sens, przestrzeń funkcji musi być wyposażona w topologię. Od tego jaką przestrzeń funkcji z jaką topologią wybierzemy, zależy jak duży będzie zbiór dystrybucji będący przestrzenią dualną do wybranej przestrzeni funkcji.