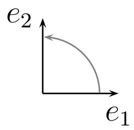
Analiza III

wykład ósmy - streszczenie

Orientacja przestrzeni wektorowej: Niech V będzie skończenie-wymiarową przestrzenią wektorową. W zbiorze baz przestrzeni V wprowadzamy relację równoważności

$$e \sim f \iff \det([\mathrm{id}_v]^f{}_e) > 0.$$

Orientacją przestrzeni wektorowej V nazywamy klasę równoważności względem powyższej relacji. Każda przestrzeń wektorowa wymiaru większego niż zero ma dwie orientacje. Zazwyczaj żadna nich nie jest wyróżniona, jednak są przestrzenie z kanoniczną orientacją, np w $\mathbb{R}^n$ wyróżniona jest orientacja, której reprezentantem jest baza kanoniczna. W szczególności w $\mathbb{R}^2$ orientację kanoniczną nazywamy często „przeciwną do ruchu wskazówek zegara”,



Orientacja kanoniczna w $\mathbb{R}^3$ nazywana jest prawoskrętną, tzn związaną z regułą śruby prawoskrętnej: jeśli kręcimy od osi $0X$ w kierunku $0Y$ śruba wkręca się w kierunku osi $0Z$.

Orientacja powierzchni: Zadanie orientacji powierzchni polega na zadaniu orientacji przestrzeni stycznych we wszystkich punktach powierzchni. Żeby jednak miało to jakiś sens, orientacja musi być zadana w sposób zgodny, tzn tak, żeby dla każdego punktu $x \in M$ istniało otoczenie $\mathcal{O}$ i lokalne pola wektorowe $(E_1, \ldots, E_k)$ takie, że ich wartości w punktach $y \in \mathcal{O}$ stanowią bazę zgodną z wybraną orientacją przestrzeni T_yM. Okazuje się, że nie na wszystkich powierzchniach orientację można w ten sposób zadać. Powierzchnie dla których jest to możliwe nazywają się *orientowalne*, pozostałe zaś *nieorientowalne*. Przykładem powierzchni nieorientowalnej jest wstęga Moebiusa. Jeśli na powierzchni M została wybrana orientacja w sposób zgodny, mówimy, że powierzchnia M jest *zorientowana*. Powierzchnia orientowalna wymiaru większego od zera ma dwie orientacje. Umawiamy się, że powierzchnia wymiaru 0 ma także dwie orientację, mimo, że zerowymiarowa przestrzeń wektorowa ma zasadniczo jedną orientację. Konwencja ta jednak będzie wygodna przy Twierdzeniu Stokes'a.

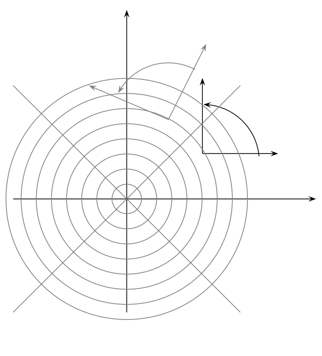
Niech M będzie powierzchnią zorientowaną. Mówimy, że układ współrzędnych

$$\phi : \mathcal{O} \ni x \to (y^1(x), \ldots y^k(x)) \in \mathbb{R}^n$$

jest zgodny z orientacją, jeżeli baza złożona z wektorów

$$(\frac{\partial}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^k})$$

jest w każdym punkcie reprezentantem wybranej orientacji. Uwaga: ważna jest kolejność współrzędnych! Na przykład jeśli $M = \mathbb{R}^2$ z kanoniczną orientacją, to biegunowy układ współrzędnych (r, φ) jest zgodny z orientacją kanoniczną:



Pojęcie orientacji jest niezbędne do zdefiniowania całki z k-formy po k-wymiarowej powierzchni. Zacznijmy od najprostszego przypadku, kiedy obszar całkowania mieści się w całości w dziedzinie jednego układu współrzędnych. Niech więc M będzie powierzchnią wymiaru k zorientowaną. Wybraną orientację oznaczmy $\imath$. Niech D oznacza obszar zwarty w całości zawarty w dziedzinie $\mathcal{O}$ układu współrzędnych ϕ. Załóżmy także, że układ współrzędnych jest zgodny z orientacją i κ jest parametryzacją związaną z ϕ, i.e. $\kappa = \phi^{-1}$. *Całkę z k-formy α po obszarze* D definiujemy wzorem

$$\int_{(D,\imath)} \alpha = \int_{\phi(D)} \alpha(y) \mathsf{d}y^1 \mathsf{d}y^2 \ldots \mathsf{d}y^k$$

gdzie

$$\kappa^* \alpha = \alpha(y) \mathsf{d}y^1 \wedge \mathsf{d}y^2 \wedge \ldots \wedge \mathsf{d}y^k.$$

Definicja ta jest poprawna, gdyż zmiana współrzędnych w k-formie sprowadza się do mnożenia przez wyznacznik jacobianu zamiany zmiennych. W całce Riemanna przy zamianie zmiennych pojawia się wartość bezwzględna wyznacznika jacobianu. Używanie układów współrzędnych zgodnych z orientacją eliminuje problem znaku. Praktyczny przepis całkowania mówi więc: (1) wybierz układ współrzędnych zgodny z orientacją, (2) zapisz formę w tym układzie współrzędnych, (3) oblicz całkę w sensie Riemanna z funkcji mnożącej k-formę bazową w wybranym układzie współrzędnych.

Problem pojawia się wówczas, gdy obszar całkowania nie da się zmieścić w dziedzinie jednego układu współrzędnych. Musimy się wtedy odwołać do pojęcia różniczkowalnego rozkładu jedności, który wprowadzany był na potrzeby dowodu twierdzenia o lokalnej odwracalności odwzorowania. Podobny obiekt matematyczny istnieje także na powierzchni. Bez dowodu przyjmujemy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1 (O rozkładzie jedności na powierzchni)**.** *Niech U_i będzie pokryciem powierzchni M zbiorami otwartymi w M. Istnieją nieujemne funkcje gładkie (φ_i) na M i takie, że* $\mathrm{supp}\varphi_i \subset U_i$*, w otoczeniu każdego punktu x tylko skończona liczba funkcji φ_i jest różna od zera i $\sum_i \varphi_i(x) = 1$ dla każdego $x \in M$.*

Niech więc teraz U_i będzie pokryciem otwartym i (φ_i) rozkładem jedności związanym z tym pokryciem, jak w powyższym twierdzeniu. Wtedy

$$\int_{(D,\imath)} = \sum_i \int_{(D\cap U_i,\imath)} \varphi_i \alpha.$$

Powyższa definicja nie zależy od wyboru rozkładu jedności, co wynika z własności całki Riemanna.

Przykład: Policzmy powierzchnię dwuwymiarowego torusa o promieniach $0 < b < a$ zanurzonego w $\mathbb{R}^3$. W $\mathbb{R}^3$ mamy kanoniczny iloczyn skalarny, który pozwala nam liczyć objętości, powierzchnie i długości. Jeśli traktujemy $\mathbb{R}^3$ jako powierzchnię (przykład mało skomplikowany, ale praktyczny), to iloczyn skalarny jest formą dwuliniową symetryczną na wektorach stycznych w każdym punkcie. Inaczej można powiedzieć, że jest to pole form dwuliniowych symetrycznych. Forma dwuliniowa symetryczna na przestrzeni wektorowej jest (symetrycznym) elementem $V^* \otimes V^*$. Podstawiając w miejsce V przestrzeń styczną $\mathsf{T}_x M$ stwierdzamy, że iloczyn skalarny jest to pole elementów $\mathsf{T}^*_x M \otimes \mathsf{T}^*_x M$. W $M = \mathbb{R}^3$ mamy globalny układ współrzędnych kartezjańskich (x, y, z). Iloczyn skalarny w tym układzie zapisuje się jako

$$g(x, y, z) = \mathsf{d}x \otimes \mathsf{d}x + \mathsf{d}y \otimes \mathsf{d}y + \mathsf{d}x \otimes \mathsf{d}x.$$

Jego macierz w każdym punkcie jest więc macierzą jednostkową. Iloczyn skalarny można obciąć do torusa uzyskując indukowany iloczyn skalarny służący do pomiaru długości i powierzchni na torusie. Wprowadźmy parametryzację torusa

$$]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[\ni (\alpha, \beta) \mapsto ((a + b\cos\beta)\cos\alpha,\ (a + b\cos\beta)\sin\alpha,\ b\sin\beta) \in \mathbb{T} \subset \mathbb{R}^3$$

Wówczas

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\alpha} &= -(a+b\cos\beta)\sin\alpha\frac{\partial}{\partial x} + (a+b\cos\beta)\cos\alpha\frac{\partial}{\partial y}\\
\frac{\partial}{\partial\beta} &= -b\sin\beta\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + b\sin\beta\sin\alpha\frac{\partial}{\partial y} + b\cos\beta\frac{\partial}{\partial z}
\end{aligned}$$

Możemy więc obliczyć

$$g(\frac{\partial}{\partial\alpha},\frac{\partial}{\partial\alpha}) = (a+b\cos\beta)^2, \qquad g(\frac{\partial}{\partial\beta},\frac{\partial}{\partial\beta}) = b^2, \qquad g(\frac{\partial}{\partial\beta},\frac{\partial}{\partial\alpha}) = 0$$

Stąd obcięcie iloczynu skalarnego do torusa we współrzędnych (α,β) ma postać

$$g(\alpha,\beta) = (a+b\cos\beta)^2\mathsf{d}\alpha\otimes\mathsf{d}\alpha + b^2\mathsf{d}\beta\otimes\mathsf{d}\beta.$$

Wybierzmy orientację $\jmath$ na torusie zgodną z układem współrzędnych (α,β). Mając orientację i iloczyn skalarny możemy zdefiniować dwuformę ω wzorem

$$\omega = \sqrt{\det g}\;\mathsf{d}\alpha\wedge\mathsf{d}\beta,$$

gdzie $\det g$ oznacza wyznacznik macierzy formy dwuliniowej w bazie związanej z układem współrzędnych. Definicja ta nie zależy od układu współrzędnych (jeśli ograniczamy się do układów zgodnych z orientacją.) Tak zdefiniowaną formę nazywamy formą objętości związaną z iloczynem skalarnym. W naszym przypadku

$$\omega = (a+b\cos\beta)b\;\mathsf{d}\alpha\wedge\mathsf{d}\beta.$$

Całkując po całym torusie obliczymy jego powierzchnię:

$$\int_{(\mathbb{T},\jmath)}\omega = \int_0^{2\pi}\mathsf{d}\alpha\int_0^{2\pi}\mathsf{d}\beta(a+b\cos\beta)b = 2\pi b\int_0^{2\pi}(a+b\cos\beta)\mathsf{d}\beta = 4\pi^2ab.$$

Powierzchnia torusa jest więc równa powierzchni bocznej walca o promieniu podstawy b i wysokości $2\pi a$.