

Analiza III

wykład dziewiąty - streszczenie

Wykład dziewiąty poświęcony jest praktycznym zastosowaniom zdobytej dotychczas wiedzy dotyczącej geometrii różniczkowej na powierzchniach zanurzonych w $\mathbb{R}^n$. W dalszym ciągu zakładamy, że nasza powierzchnia ma wymiar k i że wyposażona jest w metrykę Riemanną. Innymi słowy każda przestrzeń styczna jest przestrzenią z iloczynem skalarnym. (Przyjmujemy, że iloczyn skalarny jest dwuliniową symetryczną formą niezdegenerowaną i dodatnio określoną.)

Algebra: Na wykładzie z algebry powinniśmy się państwo byli dowiedzieć, że jeśli g jest formą biliniową symetryczną na przestrzeni wektorowej V , to istnieje także forma kwadratowa $\tilde{g}$ zdefiniowana wzorem $\tilde{g}(v) = g(v, v)$ i odwzorowanie samosprężone $G : V \rightarrow V^*$ zdefiniowane wzorem $G(v) = g(v, \cdot)$. Jeśli w przestrzeni V wybierzemy bazę e , to wszystkie trzy obiekty reprezentowane będą tą samą macierzą. Interpretacja macierzy będzie jednak inna w zależności od obiektu reprezentowanego:

- (1) forma biliniowa $g(v, w) = ([v]^e)^T [g]_e [w]^e$
- (2) forma kwadratowa $\tilde{g}(v) = ([v]^e)^T [\tilde{g}]_e [v]^e$
- (3) odwzorowanie samosprężone $G(v) = [G]^\varepsilon_e [v]^e$

$$[g]_e = [\tilde{g}]_e = [G]^\varepsilon_e.$$

Symbol ε oznacza bazę dualną do e . Macierz reprezentująca wszystkie trzy obiekty jest macierzą symetryczną. Elementy macierzowe wyrażają się wzorem

$$g_{ij} = (e_i, e_j).$$

Używając pojęcia iloczynu tensorowego iloczyn skalarny można zapisać jako

$$g_{ij} \varepsilon^i \otimes \varepsilon^j.$$

Geometria: Jeśli na powierzchni M zadany jest iloczyn skalarny to znaczy, że w każdym punkcie na powierzchni mamy wyróżniony element $g(x) \in T_x^* M \otimes T_x^* M$ (symetryczny, dodatnio określony) i zależność od punktu $x \in M$ jest gładką. Jeśli zapiszemy g w lokalnym układzie współrzędnych $(y^1, \dots, y^k)$ otrzymamy

$$g = g_{ij}(y) dy^i \otimes dy^j,$$

gdzie

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right).$$

Iloczynowi skalanemu odpowiada także odwzorowanie

$$G : TM \rightarrow T^*M.$$

Odwzorowanie to jest w każdym punkcie izomorfizmem liniowym. Forma kwadratowa odpowiadająca g też oczywiście istnieje, ale nie będzie nam potrzebna.

Gradient: Jeśli f jest funkcją gładką na powierzchni (M, g) to gradient funkcji f jest polem wektorowym na M i jest zdefiniowany wzorem

$$\text{grad } f = \nabla f = G^{-1}(df).$$

Niech $M = \mathbb{R}^3$. Na tej szczególnej powierzchni mamy globalne współrzędne kartezjańskie (x, y, z) , bazę kanoniczną w każdym punkcie przestrzeni stycznej $e = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ oraz bazę dualną w przestrzeni kostycznej $\varepsilon = (dx, dy, dz)$. W tych oznaczeniach

$$g(x, y, z) = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz$$

$$G\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = dx, \quad G\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = dy, \quad G\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = dz,$$

$$[g]_e = [G]^\varepsilon_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\nabla f = G^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{d}x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{d}y + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{d}z \right) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Podobne rachunki wykonać można w sferycznym układzie współrzędnych (bazę związaną z układem oznaczmy f):

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \sin \vartheta \\ y &= r \sin \varphi \sin \vartheta \\ z &= r \cos \vartheta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= \cos \varphi \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \varphi \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial y} + \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} &= -r \sin \varphi \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \varphi \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial \vartheta} &= r \cos \varphi \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial x} + r \sin \varphi \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial y} - r \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

$$g\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) = 1, \quad g\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) = r^2 \sin^2 \vartheta, \quad g\left(\frac{\partial}{\partial \vartheta}, \frac{\partial}{\partial \vartheta}\right) = r^2$$

$$[g]_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{bmatrix}.$$

$$g(r, \varphi, \vartheta) = \mathbf{d}r \otimes \mathbf{d}r + r^2 \sin^2 \vartheta \mathbf{d}\varphi \otimes \mathbf{d}\varphi + r^2 \mathbf{d}\vartheta \otimes \mathbf{d}\vartheta$$

$$\nabla f = G^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{d}r + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{d}\varphi + \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \mathbf{d}\vartheta \right) = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta}.$$

Powyższy wynik zapisany jest w bazie ortogonalnej f . Często używana jest też wersja ortonormalna:

$$e_r = \frac{\partial}{\partial r}, \quad e_\varphi = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad e_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta}.$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} e_r + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} e_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} e_\vartheta.$$

Widać więc, że znajomość macierzy iloczynu skalarnego w wybranym układzie współrzędnych pozwala wypisać gradient bez wykonywania skomplikowanych rachunków.

Dywergencja: Definicja dywergencji wymaga ustalenia orientacji na rozmaitości. W ostatecznym rozrachunku sama dywergencja nie zależy od orientacji (co oznacza, że można ją zdefiniować bardziej elegancko!), ale do celów rachunkowych przyjmijmy, że M jest wyposażona w iloczyn skalarny i orientację. Można zatem wprowadzić formę objętości zorientowanej

$$\Omega = \sqrt{\det g} \, \mathbf{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}y^k$$

w układzie współrzędnych zgodnym z orientacją. Dla pola wektorowego A na powierzchni M definiujemy

$$\mathbf{d}(\iota(A)\Omega) = (\operatorname{div} A)\Omega.$$

Policzmy tak jak poprzednio w $\mathbb{R}^3$ w układzie kartezjańskim i sferycznym:

$$\Omega = \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z = r^2 \sin \vartheta \, \mathbf{d}r \wedge \mathbf{d}\vartheta \wedge \mathbf{d}\varphi$$

$$A = A^x \frac{\partial}{\partial x} + A^y \frac{\partial}{\partial y} + A^z \frac{\partial}{\partial z} = A^r \frac{\partial}{\partial r} + A^\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + A^\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta}$$

W układzie kartezjańskim:

$$\begin{aligned} d(\iota(A)\Omega) &= d(A^x dy \wedge dz + A^y dz \wedge dx + A^z dx \wedge dy) = \\ &= \frac{\partial A^x}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial A^y}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial A^z}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy = \\ &= \left(\frac{\partial A^x}{\partial x} + \frac{\partial A^y}{\partial y} + \frac{\partial A^z}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

Zatem

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial A^x}{\partial x} + \frac{\partial A^y}{\partial y} + \frac{\partial A^z}{\partial z}.$$

W układzie sferycznym

$$\begin{aligned} d(\iota(A)\Omega) &= d\left(r^2 \sin \vartheta A^r d\vartheta \wedge d\varphi + r^2 \sin \vartheta A^\varphi dr \wedge d\vartheta + r^2 \sin \vartheta A^\vartheta d\varphi \wedge dr\right) = \\ &= \left(r^2 \sin \vartheta \frac{\partial A^r}{\partial r} + 2r \sin \vartheta A^r\right) dr \wedge d\vartheta \wedge d\varphi + r^2 \sin \vartheta \frac{\partial A^\varphi}{\partial \varphi} d\varphi \wedge dr \wedge d\vartheta + \\ &+ \left(r^2 \sin \vartheta \frac{\partial A^\vartheta}{\partial \vartheta} + r^2 \cos \vartheta A^\vartheta\right) d\vartheta \wedge d\varphi \wedge dr = \\ &= \left(\frac{\partial A^r}{\partial r} + \frac{2}{r} A^r + \frac{\partial A^\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A^\vartheta}{\partial \vartheta} + \operatorname{ctg} \vartheta A^\vartheta\right) r^2 \sin \vartheta dr \wedge d\vartheta \wedge d\varphi \end{aligned}$$

Zatem

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial A^r}{\partial r} + \frac{2}{r} A^r + \frac{\partial A^\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A^\vartheta}{\partial \vartheta} + \operatorname{ctg} \vartheta A^\vartheta$$

Porównując powyższy wynik z tablicami matematycznymi należy zwrócić uwagę, że zazwyczaj w tablicach pole wektorowe w układzie sferycznym zapisywane jest w rozkładzie względem bazy ortonormalnej $(e_r, e_\vartheta, e_\varphi)$ tak jak w przypadku gradientu, natomiast w powyższym rachunku użyto naturalnej bazy związanej z układem współrzędnych, która jest ortogonalna ale wektory bazowe mają różne długości. Rachunki w bazie ortonormalnej proszę wykonać samodzielnie.

Laplasjan: Niezależna od układu współrzędnych definicja laplasjanu ma postać:

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f,$$

czyli

$$d(\iota(G^{-1}(df))\Omega) = (\Delta f)\Omega.$$

Rachunki każdy może przeprowadzić we własnym zakresie i przekonać się, że korzystanie z definicji jest prostsze niż zamiana współrzędnych w wyrażeniu różniczkowym.

Rotacja: Niech teraz M będzie powierzchnią wymiaru 3, wyposażoną w g i orientację ι . Niech także Ω oznacza formę objętości zorientowanej na M . Wówczas dla pola wektorowego A definiujemy pole wektorowe $\operatorname{rot} A$ wzorem:

$$dG(A) = \iota(\operatorname{rot} A)\Omega.$$

Wykonując rachunki dla sferycznego układu współrzędnych musimy zdecydować się, czy używamy bazy naturalnej czy ortonormalnej.