

**Zadanie 4.** Poszukujemy wielomianu  $\varphi$  takiego, że  $\varphi(A) = I$  i  $\varphi(B) = 0$ . Wielomiany charakterystyczne  $A$  i  $B$  są odpowiednio  $w_A(t) = (1-t)^2$  i  $w_B(t) = (2-t)^2$ . Oznacza to w szczególności, że są względnie pierwsze. Wiadomo więc z ogólnej teorii pierścieni Euklidesowych, że istnieją wielomiany  $q_A$  i  $q_B$  takie, że

$$q_A w_A + q_B w_B = 1.$$

Wielomiany  $q_A$  i  $q_B$  można znaleźć korzystając z algorytmu Euklidesa. Dokonujemy dzielenia z resztą:

$$(1-t)^3 = (-t-1)(2-t)^2 + (-3t+5)$$

oraz

$$(2-t)^2 = \left(-\frac{1}{3}t + \frac{7}{9}\right)(-3t+5) + \frac{1}{9}$$

Mamy więc w algorytmie Euklidesa tabelkę:

$$\left[ \begin{array}{cccc} (1-t)^3 & (2-t)^2 & (-3t+5) & \frac{1}{9} \\ & (-t-1) & \left(\frac{1}{3}t + \frac{7}{9}\right) & \end{array} \right]$$

Dopisujemy odpowiednio ostatnią linię:

$$\left[ \begin{array}{cccc} (1-t)^3 & (2-t)^2 & (-3t+5) & \frac{1}{9} \\ & (-t-1) & \left(\frac{1}{3}t + \frac{7}{9}\right) & \\ \frac{1}{3}t^2 - \frac{4}{9}t + \frac{2}{9} & -\frac{1}{3}t + \frac{7}{9} & 1 & 0 \end{array} \right]$$

I stwierdzamy na podstawie tabelki i znanych jej własności, że

$$(1-t)^3 \left(-\frac{1}{3}t + \frac{7}{9}\right) - (2-t)^2 \left(\frac{1}{3}t^2 - \frac{4}{9}t + \frac{2}{9}\right) = -\frac{1}{9}$$

Po mnożeniu obu stron przez  $-9$

$$-(1-t)^3(-3t+7) + (2-t)^2(3t^2-4t+2) = 1$$

Zatem szukany wielomian to

$$\varphi(t) = -(2-t)^2(3t^2-4t+2) + 1 = (1-t)^3(3t-7)$$

Po rachunkach

$$\varphi(t) = -3t^4 + 16t^3 - 24t^2 + 24t - 7$$

**Zadanie 5.** Macierz operatora  $T$  jest  $4 \times 4$  zatem bezpośrednie rachunki są trudne. Uprościmy je nieco. Widać, że  $\text{im } T = \langle v_1, v_2 \rangle$ , ponadto  $\ker T \cap \text{im } T = \{0\}$ . Wynika z tego, że  $\mathbb{R}^4 = \ker T \oplus \text{im } T$ . Istnieje zatem baza  $\omega = (u_1, u_2, v_1, v_2)$  dostosowana do struktury sumy prostej. Na przykład  $u_1 = [1 \ 0 \ -1 \ 0]$ ,  $u_2 = [0 \ 1 \ 0 \ -1]$ . W tej bazie macierz  $T$  ma postać

$$[T]^\omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie} \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Zatem  $\text{Sp}(T) = \{0, -2, 10\}$ , bo  $\text{Sp}(A) = \{-2, 10\}$ . Ponadto  $T$  jest diagonalizowalny. Wielomian aproksymacyjny może więc być drugiego stopnia:

$$\varphi(t) = at^2 + bt + c$$

Podstawiając  $t = 0$ ,  $t = -2$ ,  $t = 10$  otrzymujemy

$$a = \frac{1}{16}, \quad b = -\frac{7}{24}, \quad c = -\frac{25}{12}.$$

W ten sposób obliczyć możemy  $\varphi(T)$  według wzoru:

$$\varphi(T) = \frac{1}{16}T^2 - \frac{7}{24}T - \frac{25}{12}I.$$

Wyliczenie tego do końca jest zadaniem nieprzyjemnym rachunkowo, dlatego nie domagam się tego w ostatecznym rozwiązaniu. Można też policzyć najpierw w bazie  $\omega$  otrzymując:

$$[\varphi(T)]^\omega_\omega = \begin{bmatrix} -\frac{25}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{25}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} & 0 \end{bmatrix}.$$

Zamiana bazy też wymaga mnożenia dużych macierzy, zatem też się nie domagam robienia tego do końca:

$$[id]^e_\omega \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\varphi(T) = [id]^e_\omega [T]^\omega_\omega [id]^{\omega_e} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} -15 & 5 & 35 & 5 \\ 25 & -35 & 25 & 15 \\ 15 & 25 & -35 & 25 \\ 5 & 35 & 5 & -15 \end{bmatrix}$$