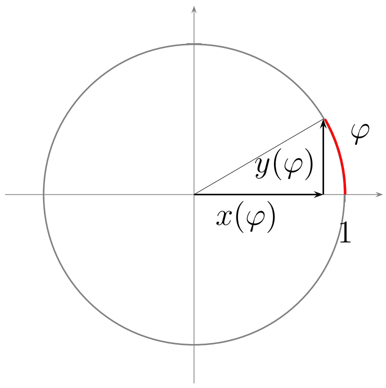
# Wykład 10.

Wykład dziesiąty poświęcony jest przeglądowi funkcji elementarnych. Przyjmuję, że wielomiany i funkcje wymierne omówione były (lub będą) na algebrze. Funkcja wykładnicza i logarytm pojawiły się w poprzednim wykładzie. Zajmiemy się więc funkcjami trygonometrycznymi, funkcjami odwrotnymi do trygonometrycznych, funkcjami hiperbolicznymi i odwrotnymi do nich.

## Funkcje trygonometryczne.

Definiujemy geometrycznie funkcje: $\varphi \mapsto y(\varphi)$, $\varphi \mapsto x(\varphi)$ jako, odpowiednio, drugą i pierwszą współrzędną punktu na okręgu o promieniu 1 kończącego łuk długości $\varphi$:




Funkcje sin i cos argumentu rzeczywistego definiujemy

$$\begin{aligned}\cos\varphi &= x(\varphi - E(\tfrac{\varphi}{2\pi}2\pi)),\\ \sin\varphi &= y(\varphi - E(\tfrac{\varphi}{2\pi}2\pi)).\end{aligned}$$

Z definicji widać, że funkcje są okresowe z okresem $2\pi$, ponadto zachodzą wzory:

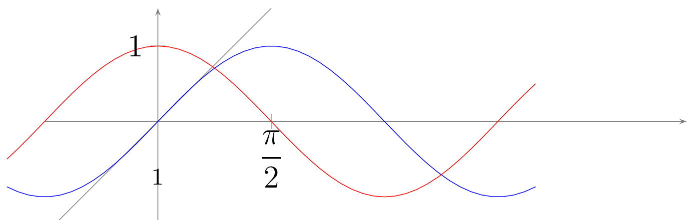
$$\begin{aligned}&\cos\varphi = \sin(\varphi - \tfrac{\pi}{2}),\\ &\cos\varphi = \cos(-\varphi),\\ &-\sin\varphi = \sin(-\varphi),\\ &\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1.\end{aligned}$$

Można także wyprowadzić wzory:

$$\begin{aligned}&\sin(2\varphi) = 2\sin\varphi\cos\varphi,\\ &\cos(2\varphi) = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi,\\ &1 - \cos(2\varphi) = 2\sin^2\varphi,\\ &1 + \cos(2\varphi) = 2\cos^2\varphi.\end{aligned}$$

Wykresy

$x \longmapsto \sin x$ $\qquad$ $x \longmapsto \cos x$



**Fakt 1.**

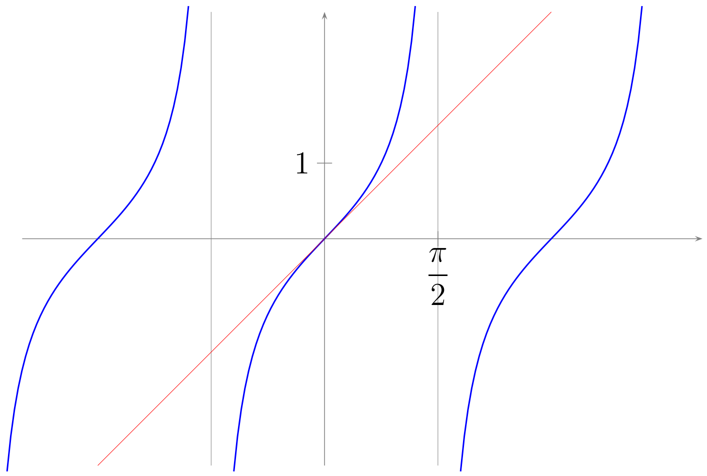
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Funkcje $\varphi \mapsto \operatorname{tg}\varphi$ i $\varphi \mapsto \operatorname{ctg}\varphi$ zdefiniowane są wzorami:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\qquad \operatorname{ctg}\varphi=\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

Wykresy

$x \longmapsto \operatorname{tg} x$ $\qquad$ $x \longmapsto x$



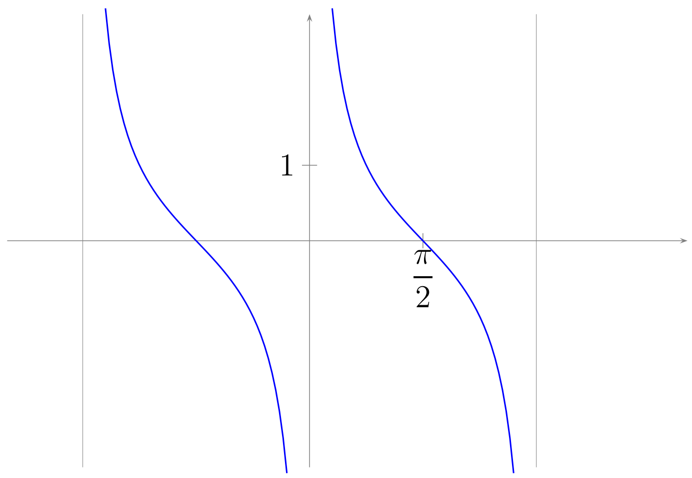

Funkcja tg określona jest na zbiorze $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$

$$\lim_{\varphi\to(k\pi+\frac{\pi}{2})^-}\operatorname{tg}\varphi=+\infty$$

$$\lim_{\varphi\to(k\pi+\frac{\pi}{2})^+}\operatorname{tg}\varphi=-\infty$$

$$\lim_{\varphi\to 0}\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\varphi}=1$$

$x \longmapsto \operatorname{ctg} x$



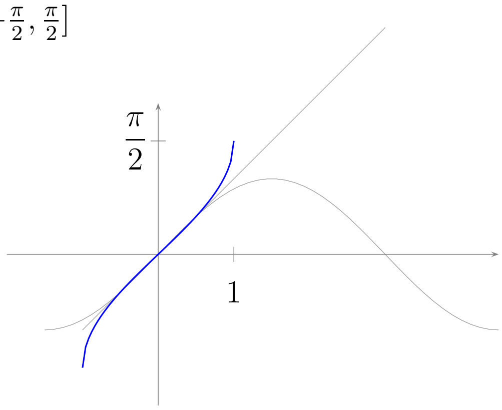
Funkcja ctg określona jest na zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$$\lim_{\varphi \to (k\pi)^+} \operatorname{tg} \varphi = +\infty$$
$$\lim_{\varphi \to (k\pi)^-} \operatorname{tg} \varphi = -\infty$$

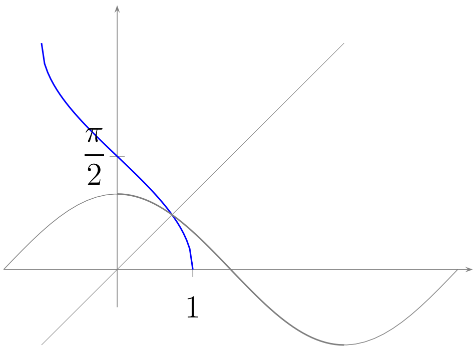
FUNKCJE CYKLOMETRYCZNE - ODWROTNE DO TRYGONOMETRYCZNYCH.

Funkcje trygonometryczne nie są różnowartościowe, zatem funkcje cyklometryczne są odwrotne do trygonometrycznych obciętych do odpowiednich podzbiorów:

Funkcja $[-1, 1] \ni x \mapsto \arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$




Funkcja $[-1, 1] \ni x \mapsto \arccos x \in [0, \pi]$

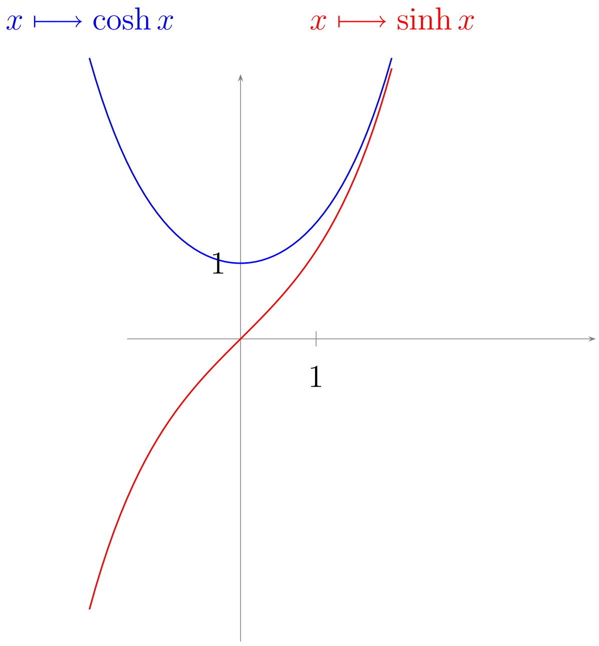


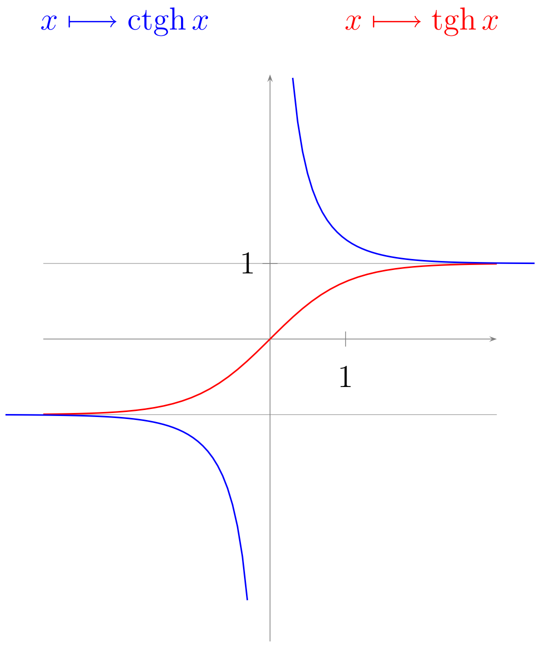

FUNKCJE HIPERBOLICZNE.

Funkcje Hiperboliczne określone są wzorami:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\operatorname{tgh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$
$$\operatorname{ctgh}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Wykresy:




Dla funkcji hiperbolicznych obowiązują podobne wzory jak dla trygonometrycznych. Uwaga na znaki!

$$\cosh(-x) = \cosh(x)$$
$$\sinh(-x) = -\sinh(x)$$
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$
$$\sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x$$
$$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

Funkcje hiperboliczne sinh i cosh można zdefiniować geometrycznie podobnie jak tygonometryczne. Dla dodatniego argumentu $\varphi$ definiujemy $\sinh(\varphi)$ i $\cosh(\varphi)$ jako współrzędne, odpowiednio, drugą i pierwszą punktu na krzywej o równaniu $x^2 - y^2 = 1$ takiego, że jego obie współrzędne są nieujemne a pole ograniczone osią $0x$, krzywą i prostą przechodzącą przez $(0, 0)$ i ten punkt jest równe $\varphi/2$. Na całą oś rzeczywistą sinus hiperboliczny przedłużamy żądając antysymetrii a cosinus żądając symetrii.

Funkcje odwrotne do hiperbolicznych – funkcje „area”.

Funkcje odwrotne do hiperbolicznych wyrazić można przy pomocy logarytmu:

$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto \operatorname{arsinh} x = \log(x + \sqrt{x^2+1}) \in \mathbb{R}$$

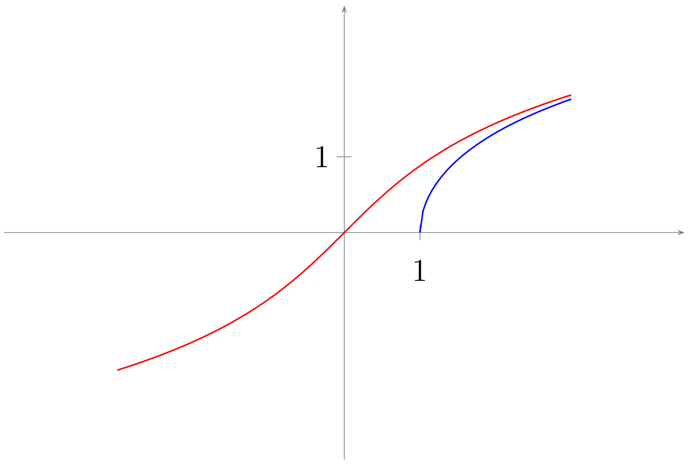
$$[1, \infty[ \ni x \longmapsto \operatorname{arcosh} x = \log(x + \sqrt{x^2-1}) \in \mathbb{R}$$

$$]-1, 1[ \ni x \longmapsto \operatorname{artgh} x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} \in \mathbb{R}$$

$$]-\infty, -1[\cup]1, \infty[ \ni x \longmapsto \operatorname{arctgh} x = \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}$$

Wykresy:

$x \longmapsto \operatorname{arch} x$ $\qquad$ $x \longmapsto \operatorname{arsh} x$




$x \longmapsto \operatorname{arcth} x$ $\qquad$ $x \longmapsto \operatorname{arth} x$