

Wykład 11.

Wykład jedenasty to wycieczka w kierunku dziedziny matematyki nazywanej Topologią. Topologia stanowi podstawę, albo przynajmniej niezbędny element wielu innych teorii matematycznych. Podstawowym pojęciem w topologii jest zbiór otwarty. My zajmować się będziemy wyłącznie topologią w $\mathbb{R}$. Wycieczka ta ma na celu przede wszystkim doprowadzenie do udowodnienia twierdzeń (2) i (3), które są użyteczne przy badaniu przebiegu zmienności funkcji i sporządzaniu wykresów. Nie będziemy jednak zmierzać do celu najkrótszą drogą.

Definicja 1. *Zbiorem otwartym* w $\mathbb{R}$ nazywamy podzbiór $O \subset \mathbb{R}$, który ma następującą własność:

$$\forall x \in O \exists \varepsilon > 0 :]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset O$$

Fakt 1. Odcinek otwarty w $\mathbb{R}$ jest zbiorem otwartym.

DOWÓD: Niech I będzie odcinkiem $]a, b[$. Ustalmy $x \in I$, tzn. $a < x < b$. Jeśli

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{x-a}{2}, \frac{b-x}{2}\right\},$$

to odcinek $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset I$, zatem I jest otwarty. Zauważmy, że jeśli odcinek otwarty ma nieskończony koniec, to też jest otwarty. $\square$

Fakt 2. Suma dowolnej rodziny zbiorów otwartych jest otwarta, przecięcie skończonej rodziny zbiorów otwartych jest otwarte.

DOWÓD: Niech $(O_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ będzie rodziną zbiorów otwartych. Ustalmy $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$. Jako element sumy zbiorów x jest elementem przynajmniej jednego zbioru z rodziny (O_λ) . Oznaczmy ten zbiór O_{λ_0} . Zbiór O_{λ_0} jest otwarty, zatem wraz z punktem x zawiera odcinek otwarty $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ dla pewnego $\varepsilon > 0$. Skoro odcinek ten zawarty jest w O_{λ_0} to także w sumie $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$. Suma jest więc zbiorem otwartym.

Weźmy teraz dwa dowolne zbiory otwarte U i V . Niech x będzie ustalonym elementem przecięcia $U \cap V$. Zbiory U i V są otwarte, zatem istnieją dwie liczby dodatnie ε_U i ε_V , takie, że odcinek $]x - \varepsilon_U, x + \varepsilon_U[\subset U$ oraz $]x - \varepsilon_V, x + \varepsilon_V[\subset V$. Na pewno więc odcinek $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ dla $\varepsilon = \min\{\varepsilon_U, \varepsilon_V\}$ zawarty jest i w U i w V . Pokazaliśmy, że przecięcie $U \cap V$ wraz z każdym punktem x zawiera odcinek otwarty zawierający x . Zbiór $U \cap V$ jest więc otwarty. Łatwo widać, że dowód ten uogólnia się łatwo na przypadek przecięcia skończonej liczby otwartych zbiorów. Nie da się jednak go uogólnić na przypadek nieskończonej liczby zbiorów, gdyż nie ma gwarancji, że minimum ze zbioru dodatnich liczb jest różne od zera. Na przykład jeśli $U_n =]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ przecięcie $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = \{0\}$. Zbiór jednopunktowy nie jest zbiorem otwartym. $\square$

Twierdzenie 1. Zbiór X jest otwarty w $\mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy kiedy jest przeliczalną sumą odcinków rozłącznych (być może niektóre z nich mają nieskończone końce).

DOWÓD: Każdy zbiór, który jest przeliczalną sumą rozłącznych odcinków otwartych jest otwarty. Wynika to z poprzedniego faktu oraz z tego, że odcinek otwarty jest zbiorem otwartym. Z definicji wynika też, że zbiór otwarty jest sumą odcinków otwartych: skoro wraz z każdym punktem x zbiór X zawiera także $]x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x[$ dla pewnego $\varepsilon_x > 0$ to $X = \bigcup_{x \in X}]x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x[$. Pokażemy teraz, że nie wszystkie te odcinki mogą być rozłączne, ponieważ nie istnieje nieprzeliczalna suma rozłącznych odcinków w $\mathbb{R}$. Załóżmy, że istnieje zbiór $O \subset \mathbb{R}$ taki, że $O = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ gdzie zbiór indeksów Λ jest nieprzeliczalny oraz $I_\lambda \cap I_\mu = \emptyset$ dla $\lambda \neq \mu$. Każdy odcinek I_λ zawiera przynajmniej jedną liczbę wymierną. Wybierzmy więc z każdego odcinka liczbę wymierną q_λ . Każde dwie liczby o różnych indeksach są różne, gdyż odcinki o różnych indeksach są rozłączne. Otrzymaliśmy więc nieprzeliczalny zbiór liczb wymiernych parami różnych. Jest to niemożliwe, gdyż zbiór wszystkich liczb wymiernych jest przeliczalny. $\square$

Definicja 2. Jeśli $X \subset \mathbb{R}$, to podzbiór $Y \subset X$ jest *otwarty w X* wtedy i tylko wtedy, kiedy jest przecięciem X i zbioru otwartego w $\mathbb{R}$. Zbiór Y może być otwarty w X a nieotwarty w $\mathbb{R}$.

Fakt 3. Przeciwobraz zbioru otwartego $O \subset \mathbb{R}$ względem funkcji ciągłej $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ jest zbiorem otwartym w X

DOWÓD: Niech $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągła i niech $O \subset \mathbb{R}$ będzie otwarty. Jeśli $f^{-1}(O) = \emptyset$, to twierdzenie jest spełnione, ponieważ $\emptyset$ jest otwarty. Jeśli $f^{-1}(O) \neq \emptyset$ weźmy $x_0 \in f^{-1}(O) \neq \emptyset$, tzn $f(x_0) \in O$. Ponieważ O jest otwarty, wraz z punktem $f(x_0)$ zawiera także pewien odcinek $]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$. Skorzystamy teraz z ciągłości f i do ustalonego wcześniej ε dobierzemy $\delta > 0$, takie żeby dla $x \in X$ takich, że $|x - x_0| < \delta$ wartości spełniały nierówność $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$. Jeśli więc $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap X$ to $f(x) \in]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[\subset O$ zatem $f^{-1}(O)$ zawiera $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap X$, jest więc otwarty w X . $\square$

Definicja 3. Zbiór $D \subset \mathbb{R}$ nazywamy *domkniętym* wtedy i tylko wtedy, gdy jego dopełnienie $D' = \mathbb{R} \setminus D$ jest otwarte.

Fakt 4. Odcinek domknięty jest zbiorem domkniętym.

DOWÓD: Dopełnienie odcinka $[a, b]$ jest zbiorem $] - \infty, a[\cup]b, \infty[$, a więc jest zbiorem otwartym. $\square$

Definicja 4. Podzbiór $C \subset \mathbb{R}$ nazywamy *zwartym* wtedy i tylko wtedy, gdy każdy ciąg elementów C zawiera podciąg zbieżny do elementu w C .

Fakt 5. Odcinek domknięty o skończonych końcach jest zbiorem zwartym.

DOWÓD: Dowód przeprowadzimy metodą *polowania na lwa*. Niech I_1 będzie wyjściowym odcinkiem $[a, b]$. Weźmy dowolny ciąg (x_n) elementów tego odcinka. Podzielmy teraz odcinek $[a, b]$ na dwie równe części:

$$[a, b] = [a, \frac{a+b}{2}] \cup [\frac{a+b}{2}, b]$$

i sprawdźmy w której części jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu (x_n) . Tę część, w której jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu oznaczamy I_2 . Może się zdarzyć, że w obydwu częściach jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu, wtedy wybieramy którąkolwiek z części. Dalej dzielimy odcinek I_2 na pół i oznaczamy I_3 tę część w której jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu. Postępując tak dalej konstruujemy ciąg odcinków I_n domkniętych i takich, że $I_{n+1} \subset I_n$. Ponadto jeśli d_n jest długością odcinka I_n , to $d_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$. Z tego rodzaju sytuacją mieliśmy już do czynienia w dowodzie zbieżności ciągu Cauchy'ego. Ustaliliśmy wówczas, że przecięcie takiej rodziny odcinków jest niepuste i zawiera dokładnie jeden punkt:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{x_0\}.$$

Skonstruujemy teraz podciąg ciągu (x_n) zbieżny do x_0 . Z każdego zbioru I_k wybierzmy dokładnie jeden element ciągu w ten sposób, aby jeśli $x_{n_k} \in I_k$ oraz $x_{n_{k+1}} \in I_{k+1}$ to $n_{k+1} > n_k$. Skonstruowany w ten sposób podciąg ma tę własność, że $|x_{n_k} - x_0| \leq \frac{b-a}{2^{k-1}}$ zatem $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0$. Z ciągu (x_n) wybraliśmy więc podciąg zbieżny do $x_0 \in I_1$. Odcinek $I_1 = [a, b]$ jest więc zbiorem zwartym. $\square$

Fakt 6. Zbiór zwarty w $\mathbb{R}$ jest ograniczony i domknięty. Prawdziwe jest także twierdzenie odwrotne: każdy zbiór ograniczony i domknięty w $\mathbb{R}$ jest zwarty.

DOWÓD: Udowodnimy pierwszą część twierdzenia. Najpierw pokażemy, że zbiór zwarty jest ograniczony. Zastosujemy metodę *ad absurdum*. Załóżmy, że zbiór X jest zwarty i nieograniczony z góry. Dla każdej liczby naturalnej n możemy znaleźć element zbioru $x \in X$ taki, że $x > n$. Oznaczmy ten element x_n . Skonstruowany w ten sposób ciąg jest rozbieżny do nieskończoności. Tę samą własność mają wszystkie jego podciągi. Ciąg (x_n) nie zawiera więc podciągu zbieżnego, co jest sprzeczne z założeniem o zwartości X . Podobnie pokazujemy, że zbiór X musi być ograniczony z dołu.

Pokażemy teraz, że zbiór zwarty X jest domknięty. Również w tym przypadku zastosujemy metodę *ad absurdum*. Załóżmy zatem, że X nie jest domknięty, co oznacza, że $X' = \mathbb{R} \setminus X$ nie jest otwarty. Istnieje zatem punkt $y \in X'$ taki, że dla każdego $\varepsilon > 0$ w odcinku $]y - \varepsilon, y + \varepsilon[$ są punkty, które nie należą do X' . Innymi słowy

$$]y - \varepsilon, y + \varepsilon[\cap X \neq \emptyset.$$

Weźmy zatem $\varepsilon = \frac{1}{n}$ oznaczmy x_n dowolny element powyższego przecięcia. Konstruujemy w ten sposób ciąg (x_n) elementów zbioru X . Z konstrukcji wynika, że jest on zbieżny do y . Taką własność mają także wszystkie jego podciągi. Z definicji zbioru zwartego wynika, że $y \in X$. Jest to sprzeczne z założeniem, że $y \in X'$. $\square$

Twierdzenie 2. Niech $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Istnieją skończone kresy

$$y_+ = \sup f([a, b])$$

$$y_- = \inf f([a, b])$$

oraz liczby x_+ i x_- takie, że $x_+ \in [a, b]$, $x_- \in [a, b]$ oraz

$$f(x_+) = y_+, \quad f(x_-) = y_-.$$

DOWÓD: Niech f będzie jak w założeniach twierdzenia. Oznaczmy $Y = f([a, b])$. Weźmy teraz dowolny ciąg y_n o wyrazach z Y . Ponieważ jest to ciąg w zbiorze wartości funkcji to istnieje ciąg (x_n) o wyrazach z odcinka $[a, b]$ taki, że $f(x_n) = y_n$. Ciąg (x_n) zawiera podciąg zbieżny do elementu $x_0 \in [a, b]$, bo odcinek $[a, b]$ jest zbiorem zwartym. Oznaczmy ten podciąg (x_{n_k}) . Z ciągłości funkcji f wynika, że $f(x_{n_k}) = y_{n_k}$ jest też zbieżny do elementu $f(x_0) \in Y$. Okazuje się więc, że Y jest zbiorem zwartym. Skoro jest zwarty to jest także ograniczony i domknięty, tzn. jego kresy górny i dolny są skończone i zawarte w Y :

$$y_- = \inf Y \quad y_+ = \sup Y, \quad y_- \in Y, \quad y_+ \in Y.$$

Istnieją zatem x_- i x_+ w odcinku $[a, b]$ takie, że $f(x_+) = y_+$, $f(x_-) = y_-$.

Dowodząc twierdzenia (2) pokazaliśmy przy okazji, że obraz zbioru zwartego przy odwzorowaniu ciągłym jest zbiorem zwartym. Korzystaliśmy tutaj bowiem wyłącznie z tego, że odcinek domknięty jest zwarty, a nie z tego, że jest odcinkiem. $\square$

Twierdzenie 3. (Własność Darboux) Niech $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą na odcinku otwartym I . Dla każdych $a < b$, $a, b \in I$ i każdej liczby y należącej do odcinka o końcach $f(a)$ i $f(b)$ istnieje $x \in [a, b]$ taki, że $f(x) = y$.

DOWÓD: Niech f , I i $[a, b]$ będą jak w założeniach twierdzenia. Załóżmy, że $f(a) < f(b)$. Jeśli $f(a) > f(b)$ dowód przebiega podobnie. Jeśli $f(a) = f(b)$ nie ma czego dowodzić, gdyż jedynie $f(a) = f(b)$ należy do odcinka $[f(a), f(b)]$ i oczywiście $x = a$ lub $x = b$ spełniają wymagania twierdzenia. Załóżmy, że istnieje $y \in]f(a), f(b)[$ takie, że $y \notin f([a, b])$. Oznaczmy $\bar{f}$ obcięcie f do odcinka $[a, b]$. Wtedy jeśli

$$I_1 = \bar{f}^{-1}(]-\infty, y])$$

$$I_2 = \bar{f}^{-1}(]y, \infty[)$$

to

$$I_1 \cap I_2 = \emptyset, \quad I_1 \cup I_2 = [a, b], \quad a \in I_1, \quad b \in I_2.$$

Oznaczmy

$$c = \sup I_1.$$

Są zasadniczo trzy możliwości (1) $c = a$, (2) $c = b$, (3) $a < c < b$.

(1) Jeśli $c = a$ to oznacza, że $I_1 = \{a\}$, $I_2 =]a, b]$. Istnieje wtedy ciąg y_n elementów I_2 zbieżny do a . Ciąg $f(y_n)$ ma wartości $]y, \infty[$, bo $y_n \in I_2$, ponadto $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = f(a) \in]-\infty, y]$. Z drugiej strony granica $f(y_n)$ może leżeć w $]y, \infty[$ albo być równa y . Tak czy inaczej nie należy do $] - \infty, y]$.

(2) Jeśli $c = b$ to oznacza, że istnieje ciąg $x_n \in I_1$ taki, że $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ oraz (z ciągłości f) $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(b)$. Podobnie jak w poprzednim przypadku wyrazy ciągu leżą w odcinku otwartym $] - \infty, y]$ a granica w rozłącznym z nim odcinku otwartym $]y, \infty[$. Taka sytuacja jest niemożliwa.

(3) W przypadku $a < c < b$ z definicji supremum istnieje ciąg $x_n \in I_1$ zbieżny do c , oraz ponieważ $]c, b] \in I_2$ o istnieje ciąg $y_n \in I_2$ zbieżny do c . Granica $f(x_n)$ leży w $] - \infty, y]$, granica $f(y_n)$ w $]y, \infty[$. Ponieważ obie granice są równe, to znaczy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y.$$

Okazało się więc, że $f(c) = y$, co jest sprzeczne z założeniem, że $y \notin f([a, b])$.

Ostatecznie wszystkie trzy przypadki okazały się prowadzić do sprzeczności. $\square$