Wykład 12

rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej rzeczywistej

W streszczeniach wykładów dotyczących rachunku różniczkowego zamieszczam niektóre dowody (te, które wydają mi się trudniejsze, albo zawierają jakieś istotne obserwacje).

Definicja 1. Niech funkcja f będzie określona na odcinku otwartym I i niech $x_0 \in I$. Mówimy, że funkcja f jest *różniczkowalna* w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy gdy istnieje liczba $a \in \mathbb{R}$ taka, że

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + R(x_0, h)$$

i

$$\lim_{h \to 0} \frac{R(x_0, h)}{h} = 0.$$

Liczbę a nazywamy *pochodną funkcji* f w punkcie x_0 i oznaczamy $a = f'(x_0)$.

Definicja 2. Wyrażenie

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

nazywa się *ilorazem różnicowym* funkcji f w punkcie x_0.

Fakt 1. Funkcja $f : I \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w $x_0 \in I$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje granica

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Granica ta jest równa pochodnej funkcji f w punkcie x_0.

Fakt 2. Funkcja różniczkowalna w punkcie x_0 jest ciągła w tym punkcie

Dowód: Niech f będzie różniczkowalna w punkcie x_0. Napiszmy

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + R(x_0, h),$$

wtedy wiadomo, że

$$\frac{R(x_0, h)}{h} \to 0 \quad \text{dla} \quad h \to 0.$$

Oznacza to, że sama reszta $R(x_0, h)$ także musi mieć granicę równą 0 przy $h \to 0$:

$$\lim_{h \to 0} R(x_0, h) = \lim_{h \to 0} \frac{R(x_0, h)}{h} h = 0.$$

Zatem

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = \lim_{h \to 0} [f(x_0) + f'(x_0)h + R(x_0, h)] = f(x_0).$$

$\square$.

Definicja 3. Niech funkcja f będzie różniczkowalna w każdym punkcie odcinka otwartego I, wówczas funkcję $I \ni x \mapsto f'(x) \in \mathbb{R}$ nazywamy *pochodną funkcji f na odcinku I*.

Przykłady rachunków z definicji: (1) Obliczymy pochodną funkcji $x \mapsto x^n$ w punkcie x_0:

$$(x_0 + h)^n = x_0^n + n\, x_0^{n-1} h + \binom{n}{2} x_0^{n-2} h^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} x_0 h^{n-1} + h^n$$

Oznaczając

$$R(x_0, h) = \binom{n}{2} x_0^{n-2} h^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} x_0 h^{n-1} + h^n$$

otrzymujemy

$$(x_0 + h)^n = x_0^n + n\, x_0^{n-1} h + R(x_0, h)$$

i

$$\lim_{h \to 0} \frac{R(x_0, h)}{h} = \lim_{h \to 0} \left[\binom{n}{2} x_0^{n-2} h + \cdots + \binom{n}{n-1} x_0 h^{n-1} + h^{n-1} \right] = 0,$$

zatem pochodna funkcji $x \mapsto x^n$ w punkcie x_0 jest równa nx_0^{n-1}. Ponieważ x_0 był dowolnym punktem $\mathbb{R}$ i podczas rachunków nie natrafiliśmy na trudności, które zmuszałyby nas do przyjęcia założeń o x_0, wnioskujemy, że funkcja $x \mapsto x^n$ jest różniczkowalna na całym $\mathbb{R}$ i jej pochodna jest funkcją $x \mapsto nx^{n-1}$.

(2) Obliczymy teraz pochodną funkcji $x \mapsto \sin x$.

$$\begin{aligned}\sin(x_0+h) = \sin(x_0)\cos(h) + \cos(x_0)\sin(h) = \\ \cos(x_0)\sin(h) + \cos(x_0)h - \cos(x_0)h + \sin(x_0)\cos(h) + \sin(x_0) - \sin(x_0) = \\ \sin(x_0) + \cos(x_0)h + [\cos(x_0)\sin(h) - \cos(x_0)h + \sin(x_0)\cos(h) - \sin(x_0)]\end{aligned}$$

Oznaczamy

$$R(x_0,h) = [\cos(x_0)\sin(h) - \cos(x_0)h + \sin(x_0)\cos(h) - \sin(x_0)]$$

i liczymy

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{R(x_0,h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x_0)\sin(h)-\cos(x_0)h}{h} + \frac{\sin(x_0)\cos(h)-\sin(x_0)}{h} = \\ \lim_{h\to 0}\cos(x_0)\left(\frac{\sin(h)}{h}-1\right) + \sin(x_0)\frac{\cos(h)-1}{h} = \\ \lim_{h\to 0}\cos(x_0)\left(\frac{\sin(h)}{h}-1\right) - \sin(x_0)\frac{2\sin^2(h/2)}{h} = \\ \lim_{h\to 0}\cos(x_0)\left(\frac{\sin(h)}{h}-1\right) - \sin(x_0)\sin^2(h/2)\frac{\sin(h/2)}{h/2} = 0.\end{aligned}$$

Okazuje się więc, że pochodną funkcji $x \mapsto \sin x$ w punkcie x_0 jest $\cos(x_0)$. Podobnie jak poprzednio wnioskujemy, że pochodną funkcji $x \mapsto \sin x$ na całym zbiorze $\mathbb{R}$ jest funkcja $x \mapsto \cos x$.

(3) Obliczymy teraz pochodną funkcji $x \to e^x$ w punkcie x_0:

$$\begin{aligned}e^{x_0+h} = e^{x_0}e^h + e^{x_0} - e^{x_0} + e^{x_0}h - e^{x_0}h = e^{x_0} + e^{x_0}h + e^{x_0}e^h - e^{x_0} - e^{x_0}h = \\ = e^{x_0} + e^{x_0}h + e^{x_0}(e^h - h - 1)\end{aligned}$$

Oznaczamy

$$R(x_0,h) = e^{x_0}(e^h - h - 1)$$

i liczymy

$$\lim_{h\to 0}\frac{R(x_0,h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x_0}(e^h-h-1)}{h} = \lim_{h\to 0}e^{x_0}\left(\frac{e^h-1}{h}-1\right) = 0$$

Okazuje się więc, że pochodną funkcji $x \mapsto e^x$ w punkcie x_0 jest e^{x_0}. Podobnie jak poprzednio wnioskujemy, że pochodną funkcji $x \mapsto e^x$. na całym zbiorze $\mathbb{R}$ jest ta sama funkcja $x \mapsto e^x$.

(3) Sprawdzić, czy funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \notin \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{Q}\end{cases}$$

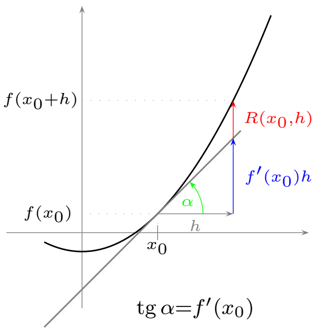
jest różniczkowalna w $x = 0$.

$$\varphi(h) = \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{f(h)}{h} = \begin{cases} h & h \notin \mathbb{Q} \\ 0 & h \in \mathbb{Q}\end{cases}$$

$$\lim_{h\to 0}\varphi(h) = 0$$

zatem f jest różniczkowalna w $x_0 = 0$ i ponadto pochodna $f'(0) = 0$. Ponieważ w pozostałych punktach $\mathbb{R}$ funkcja f jest nieciągła, to nie może też być różniczkowalna.

Interpretacja geometryczna pochodnej:



$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + R(x_0,h)$$

Reguły różniczkowania:

Fakt 3. Niech funkcje f, g będą określone na odcinku $]a,b[$ i różniczkowalne w punkcie $x_0 \in]a,b[$, wówczas:

(1) funkcja $f+g$ jest różniczkowalna w x_0 i $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;

(2) funkcja fg jest różniczkowalna w x_0 i

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0);$$

(3) jeśli ponadto $g(x_0) \neq 0$ to funkcja $\dfrac{f}{g}$ jest różniczkowalna w x_0 i

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0}.$$

Fakt 4. Niech funkcja f będzie określona na $]a,b[$ i różniczkowalna w punkcie $x_0 \in]a,b[$, niech ponadto funkcja g będzie określona na odcinku $]c,d[$ będzie różniczkowalna w punkcie $f(x_0) \in]c,d[$ wówczas $g \circ f$ jest różniczkowalna w x_0 i

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))g'(x_0).$$