

Wykład 13

rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej rzeczywistej - cd.

Przyjrzyjmy się następującej funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Na zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ funkcja ta jest różniczkowalna, gdyż jest iloczynem funkcji różniczkowalnej $x \mapsto x^2$ i funkcji złożonej z funkcji różniczkowalnych $x \mapsto \sin x$ i $x \mapsto x^{-1}$. Pochodną obliczamy więc wedle obowiązujących zasad:

$$f'(x) = \left[x^2 \sin \frac{1}{x} \right]' = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

Pochodna ta nie ma granicy w $x = 0$. Jednak gdy obliczamy pochodną f w $x = 0$ z definicji otrzymujemy:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} = 0 = f'(0).$$

Funkcja f jest więc różniczkowalna na $\mathbb{R}$, jednak jej pochodna nie jest ciągła w $x = 0$. Funkcja f jest dobrą ilustracją następującego twierdzenia:

Twierdzenie 1 (Darboux). Niech $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie różniczkowalna na zbiorze otwartym $\mathcal{O}$ i niech $[a, b] \subset \mathcal{O}$. Wtedy dla każdej liczby α pomiędzy $f'(a)$ i $f'(b)$ istnieje $x \in]a, b[$ takie, że $f'(x) = \alpha$.

W dowodzie twierdzenia Darboux (a także w wielu innych sytuacjach) korzystać będziemy z następującego twierdzenia:

Twierdzenie 2 (Fermat). Jeśli f jest różniczkowalna na odcinku $]a, b[$ i ma w punkcie $x_0 \in]a, b[$ ekstremum lokalne, to $f'(x_0) = 0$

DOWÓD: Dowodząc twierdzenia Fermata trzeba oczywiście wiedzieć co oznacza termin *ekstremum lokalne*. Funkcja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ma w $x_0 \in X$ ekstremum lokalne jeśli istnieje $\delta > 0$ taka, że dla wszystkich $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap X$ $f(x) \geq f(x_0)$ lub dla wszystkich $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap X$ $f(x) \leq f(x_0)$. W pierwszym przypadku mówimy, że funkcja ma minimum lokalne, a w drugim maksimum lokalne.

Dowód przeprowadzimy w przypadku minimum. Dowód dla maksimum wygląda bardzo podobnie. Niech więc f ma w x_0 minimum lokalne, tzn. dla pewnego $\delta > 0$ zachodzi

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ dla } x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[.$$

Dla $h < \delta$ licznik ilorazu różnicowego

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

jest więc nieujemny. Licząc granice lewo- i prawostronne otrzymujemy:

$$f'_+(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0, \quad f'_-(x) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

Skoro funkcja jest różniczkowalna to

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$$

zatem musi być

$$f'(x_0) = 0.$$

□

DOWÓD TWIERDZENIA DARBOUX: Niech $\mathcal{O}$ będzie zbiorem otwartym i weźmy $[a, b] \subset \mathcal{O}$. Niech φ będzie funkcją różniczkowalną na $\mathcal{O}$ i taką, że $\varphi'(a)\varphi'(b) < 0$. Pokażemy, że wówczas istnieje

$x_0 \in]a, b[$ takie, że $\varphi'(x_0) = 0$. Niech np. $\varphi'(a) > 0$ i $\varphi'(b) < 0$. Skoro $\varphi'(a) > 0$ to funkcja

$$h \mapsto \frac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{h}$$

jest dodatnia dla małych $h > 0$, czyli $\varphi(a+h) > \varphi(a)$. Podobnie dla b : skoro $\varphi'(b) < 0$ to funkcja

$$h \mapsto \frac{\varphi(b-h) - \varphi(b)}{h}$$

jest dodatnia dla małych $h > 0$, czyli $\varphi(b-h) > \varphi(b)$. Funkcja φ jest ciągła jako funkcja różniczkowalna, zatem na zbiorze $[a, b]$ przyjmuje wartości największą i najmniejszą. Ani a , ani b nie jest punktem (x_0) , w którym φ przyjmuje wartość największą, ponieważ w otoczeniu obu tych punktów istnieją wartości argumentu, przy których wartość funkcji jest większa. Punkt ten musi więc leżeć wewnątrz odcinka $]a, b[$. Z twierdzenia Fermata wiemy, że w tym punkcie $\varphi'(x_0) = 0$.

Powróćmy teraz do naszej funkcji f . niech α będzie dowolną liczbą pomiędzy $f'(a)$ i $f'(b)$. Wtedy funkcja φ zdefiniowana wzorem

$$\varphi(x) = f(x) - \alpha x$$

spełnia warunek różniczkowalności oraz $\varphi'(a)\varphi'(b) < 0$, zatem istnieje $x_0 \in]a, b[$ taki, że $\varphi'(x_0) = 0$, ale

$$\text{jeśli } \varphi'(x_0) = 0 \text{ to } f'(x_0) = \alpha \text{ bo } \varphi'(x_0) = f'(x_0) - \alpha.$$

□

TRZY WAŻNE TWIERDZENIA:

Twierdzenie 3 (Rolle). Niech f będzie ciągła na $[a, b]$ i różniczkowalna na $]a, b[$. Jeżeli $f(a) = f(b)$ to istnieje $x_0 \in]a, b[$ taki, że $f'(x_0) = 0$.

DOWÓD: Jeśli f jest funkcją stałą, to dla wszystkich $x \in]a, b[$ $f'(x) = 0$ i każdy punkt odcinka jest dobry. Jeśli f nie jest funkcją stałą, to osiąga na $[a, b]$ swoje wartości najmniejszą i największą, przy czym przynajmniej jedna z nich nie jest równa $f(a)$. Przynajmniej jeden punkt ekstremalny leży więc wewnątrz $]a, b[$ w dziedzinie różniczkowalności funkcji. Korzystamy zatem z twierdzenia Fermata, żeby stwierdzić, że f' w tym punkcie jest 0. □

Twierdzenie 4 (Lagrange). Niech f będzie ciągła na $[a, b]$ i różniczkowalna na $]a, b[$. Istnieje $x_0 \in]a, b[$ taki, że

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a).$$

DOWÓD: Funkcja φ zdefiniowana wzorem

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x$$

spełnia założenia twierdzenia Rolle'a dla odcinka $[a, b]$ zatem istnieje $x_0 \in]a, b[$ taki, że $\varphi'(x_0) = 0$.

$$0 = \varphi'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

zatem

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0) \quad f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a).$$

□

Twierdzenie 5 (Cauchy). Niech f i g będą ciągłe na $[a, b]$ i różniczkowalne na $]a, b[$. Istnieje $x_0 \in]a, b[$ taki, że

$$[f(b) - f(a)] g'(x_0) = [g(b) - g(a)] f'(x_0).$$

DOWÓD: Funkcja φ zdefiniowana wzorem

$$\varphi(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)$$

spełnia założenia twierdzenia Rolle'a dla odcinka $]a, b[$, zatem... $\square$