

Wykład 14

rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej rzeczywistej - cd.

Ważny wniosek z twierdzenia Lagrange'a przydatny przy badaniu funkcji:

Fakt 1. Jeśli $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i dla wszystkich $x \in]a, b[$

- (1) $f'(x) \geq 0$ to f rosnąca na $]a, b[$
- (2) $f'(x) \leq 0$ to f malejąca na $]a, b[$
- (3) $f'(x) = 0$ to f stała na $]a, b[$

Twierdzenie 1 (o różniczkowaniu funkcji odwrotnej). Jeśli $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna na $]a, b[$ i jej pochodna jest różna od zera dla każdego $x \in]a, b[$ to istnieje różniczkowalna funkcja odwrotna f^{-1} oraz

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

(Końce odcinka $]a, b[$ mogą być nieskończone.)

DOWÓD: Zauważmy po pierwsze, że jeśli funkcja jest różniczkowalna na odcinku otwartym i jej pochodna nie przyjmuje wartości zero, to znaczy, że pochodna jest stałego znaku: Załóżmy, że tak nie jest, tzn. istnieją $x_1, x_2 \in]a, b[$ takie, że $f'(x_1) > 0$ a $f'(x_2) < 0$. Jak wiadomo funkcja pochodna ma własność Darboux, tzn. pomiędzy x_1 i x_2 musi istnieć x_3 takie, że $f'(x_3) = 0$, co jest sprzeczne z założeniem. Skoro pochodna jest stałego znaku, to znaczy, że funkcja jest monotoniczna: ściśle rosnąca albo ściśle malejąca. Po drugie obrazem odcinka $]a, b[$ jest także odcinek (być może o obydwu, bądź jednym nieskończonym końcu). Przedstawimy uzasadnienie dla funkcji rosnącej (dla malejącej będzie podobnie): Funkcja ciągła ma własność Darboux, zatem dla każdego $x_1 < y_1$ obraz odcinka $[x_1, y_1]$ zawiera odcinek $[f(x_1), f(y_1)]$. Ze względu na monotoniczność funkcji zawieranie jest równością, tzn $f([x_1, y_1]) = [f(x_1), f(y_1)]$. Bierzemy teraz dwa ciągi: (x_n) monotonicznie malejący i zbieżny do a oraz (y_n) monotonicznie rosnący i zbieżny do b . Dla każdego n mamy

$$f([x_n, y_n]) = [f(x_n), f(y_n)] \quad \text{oraz} \quad [x_n, y_n] \subset [x_{n+1}, y_{n+1}], \quad [f(x_n), f(y_n)] \subset [f(x_{n+1}), f(y_{n+1})]$$

Odcinki $I_n = [f(x_n), f(y_n)]$ tworzą ciąg odcinków taki, że $I_n \subset I_{n+1}$, zatem suma $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ jest też odcinkiem (łatwo sprawdzić, że otwartym) i ponadto

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = f([a, b]).$$

Funkcja f jest więc ciągłą bijekcją odcinków $]a, b[$ i $]c, d[= f([a, b])$. Bez dowodu pozostawimy następujący fakt:

Fakt 2. Funkcja odwrotna do ciągłej bijekcji odcinków otwartych jest ciągła.

Sprawdzamy teraz różniczkowalność f^{-1} : Niech $y = f(x)$ i k będzie takie, że $y + h = f(x + k)$

$$\frac{f^{-1}(y + h) - f^{-1}(y)}{h} = \frac{x + k - x}{f(x + k) - f(x)} = \frac{1}{\frac{f(x + k) - f(x)}{k}}$$

Z ciągłości f i f^{-1} wynika, że gdy $h \rightarrow 0$ to także $k \rightarrow 0$ zatem

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(y + h) - f^{-1}(y)}{h} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(x + k) - f(x)}{k}} = \frac{1}{f'(x)}$$

□

Twierdzenie 2 (reguły de l'Hospitala). 1a. Niech funkcje f, g będą różniczkowalne na przedziale $]a, b[$, niech $g'(x) \neq 0$ dla $x \in]a, b[$ oraz

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x)$$

wtedy jeśli istnieje granica

$$A = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{to istnieje także} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

i obie granice są sobie równe.

- 1b. Niech funkcje f, g będą różniczkowalne na przedziale $]a, b[$, niech $g'(x) \neq 0$ dla $x \in]a, b[$ oraz

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow b^-} g(x)$$

wtedy jeśli istnieje granica

$$A = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{to istnieje także} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$$

i obie granice są sobie równe.

- 2a. Niech funkcje f, g będą różniczkowalne na przedziale $]a, \infty[$, niech $g'(x) \neq 0$ dla $x \in]a, \infty[$ oraz

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$$

wtedy jeśli istnieje granica

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{to istnieje także} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

i obie granice są sobie równe.

- 2b. Niech funkcje f, g będą różniczkowalne na przedziale $] - \infty, b[$, niech $g'(x) \neq 0$ dla $x \in] - \infty, b[$ oraz

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$$

wtedy jeśli istnieje granica

$$A = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{to istnieje także} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

i obie granice są sobie równe.

- 3a. Niech funkcje f, g będą różniczkowalne na przedziale $]a, b[$, niech $g'(x) \neq 0$ dla $x \in]a, b[$ oraz

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x)$$

wtedy jeśli istnieje granica

$$A = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{to istnieje także} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

i obie granice są sobie równe.

- 3b. Niech funkcje f, g będą różniczkowalne na przedziale $]a, b[$, niech $g'(x) \neq 0$ dla $x \in]a, b[$ oraz

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty = \lim_{x \rightarrow b^-} g(x)$$

wtedy jeśli istnieje granica

$$A = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{to istnieje także} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$$

i obie granice są sobie równe.

- 4a. Niech funkcje f, g będą różniczkowalne na przedziale $]a, \infty[$, niech $g'(x) \neq 0$ dla $x \in]a, \infty[$ oraz

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$$

wtedy jeśli istnieje granica

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{to istnieje także} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

i obie granice są sobie równe.

4b. Niech funkcje f, g będą różniczkowalne na przedziale $] - \infty, b[$, niech $g'(x) \neq 0$ dla $x \in] - \infty, b[$ oraz

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$$

wtedy jeśli istnieje granica

$$A = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{to istnieje także} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

i obie granice są sobie równe.

DOWÓD (szkic): Udowodnimy punkt (1a). Funkcje f i g rozszerzamy do odcinka $[a, b[$ przez ciągłość kładąc $f(a) = 0$ i $g(a) = 0$. Jeśli $x \in]a, b[$ to możemy korzystać ze wzoru Cauchy'ego dla odcinka $[a, x]$, tzn istnieje $\xi \in]a, x[$ takie, że:

$$[f(x) - f(a)]g'(\xi) = [g(x) - g(a)]f'(\xi).$$

Skoro $f(a) = g(a) = 0$ i $g'(\xi) \neq 0$ to

$$f(x) = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} g(x).$$

Ponadto wiemy jeszcze, że $g'(x) \neq 0$ na $]a, b[$, czyli $g'(x)$ jest stałego znaku na $]a, b[$ a co za tym idzie g jest monotoniczna na $]a, b[$ (ściśle rosnąca albo malejąca), w szczególności $g(x) \neq 0$. Mamy więc

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Jeśli teraz $x \rightarrow a^+$ to także $\xi \rightarrow a^+$, bo $a < \xi < x < b$, zatem jeśli, tak jak w założeniach

$$\lim_{\xi \rightarrow a^+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = A$$

to

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \rightarrow a^+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = A.$$

Punkt (1b) dowodzimy tak samo, zamieniając odpowiednie znaki w odpowiednich miejscach. W przypadku (2a) zakładamy (bez zmniejszania ogólności), że $a > 0$ i definiujemy funkcje

$$\varphi(t) = f\left(\frac{1}{t}\right), \quad \gamma(t) = g\left(\frac{1}{t}\right).$$

Obie funkcje są określone na przedziale $]0, \frac{1}{a}[$, różniczkowalne i ponadto

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t) = 0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \gamma(t).$$

Jeśli $g'(x) \neq 0$ dla $x \in]a, \infty[$ to

$$\gamma'(t) = g'\left(\frac{1}{t}\right) \left(-\frac{1}{t^2}\right) \neq 0 \quad \text{dla} \quad t \in]0, \frac{1}{a}[$$

Funkcje φ i γ spełniają więc założenia punktu (1a) zatem

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(t)}{\gamma(t)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi'(t)}{\gamma'(t)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-f'(\frac{1}{t})\frac{1}{t^2}}{-g'(\frac{1}{t})\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

Przypadek (2b) dostajemy bardzo podobnie. Dowody pozostałych przypadków w tym streszczeniu opuszczamy. $\square$