

Wykład 15

rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej rzeczywistej - cd.

Jeśli funkcja $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna na $]a, b[$, to może się okazać, że jej funkcja pochodna jest różniczkowalna w niektórych punktach odcinka $]a, b[$. Jeśli $x \in]a, b[$ i f' jest różniczkowalna w x to wartość $(f')'(x)$ nazywamy drugą pochodną f w punkcie x i oznaczamy $f''(x)$. Ogólnie wyższe pochodne definiujemy indukcyjnie:

Definicja 1. Jeśli f jest k -krotnie różniczkowalna w otoczeniu punktu x oraz istnieje pochodna k -tej pochodnej f w punkcie x to pochodną tę nazywamy $k + 1$ -pochodną f w punkcie x i oznaczamy

$$f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)})'(x).$$

Definicja 2. Jeśli f jest k -krotnie różniczkowalna na $]a, b[$ i jej pochodna jest ciągła na $]a, b[$, to mówimy, że f jest klasy $\mathcal{C}^k$ i piszemy $f \in \mathcal{C}^k([a, b])$.

Fakt 1 (Reguła Leibniza dla wyższych pochodnych). :

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(fg)''(x) = f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x)$$

$$(fg)^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} f^{(n)}(x)g^{(k-n)}(x).$$

Twierdzenie 1 (Wzór Taylora). Niech $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy $\mathcal{C}^{n-1}$ na I , założmy także, że istnieje n -ta pochodna f na I . Niech także $x_0 \in I$ wówczas istnieje ξ takie, że $\xi \in]x_0, x_0 + h[$ takie, że dla każdego k :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2!} + \cdots + f^{(m)}(x_0)\frac{h^m}{m!} + \cdots + f^{(n-1)}(x_0)\frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + \\ + f^{(n)}(\xi)\frac{h^k(x_0 + h - \xi)^{n-k}}{k!(n-1)!}$$

Wyrażenie

$$R_n(x_0, h) = f^{(n)}(\xi)\frac{h^k(x_0 + h - \xi)^{n-k}}{k!(n-k)!}$$

nazywamy resztą w postaci Schlömlicha. Dla $k = n$ otrzymujemy

$$R_n(x_0, h) = f^{(n)}(\xi)\frac{h^n}{n!}$$

resztę w postaci Lagrange'a, zaś dla $k = 1$

$$R_n(x_0, h) = f^{(n)}(\xi)\frac{h(x_0 + h - \xi)^{n-1}}{(n-1)!}$$

resztę w postaci Cauchy'ego. Przyjmując oznaczenia $\xi = x_0 + \theta h$ dla pewnego $\theta \in [0, 1[$ dostajemy wzór:

$$R_n(x_0, h) = f^{(n)}(x_0 + \theta h)\frac{h^n(1 - \theta)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Wyprowadzenie wzoru Taylora nie jest zbyt trudne. W streszczeniu je pomijamy. Można je znaleźć we wszystkich podręcznikach do analizy w tym w naszym zielonym skrypcie.

Twierdzenie 2. Przy założeniach z poprzedniego twierdzenia Reszta we wzorze Taylora ma następującą własność:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R_n(x_0, h)}{h^{(n-1)}} = 0$$

DOWÓD: Dowód opiera się na regule de l'Hospitala:

$$R_n(x_0, h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - \sum_{k=1}^{n-1} f^{(k)}(x_0) \frac{h^k}{k!}$$

Różniczkujemy powyższą równość względem h :

$$R'_n(x_0, h) = f'(x_0 + h) - \sum_{k=1}^{n-1} f^{(k)}(x_0) \frac{h^{k-1}}{(k-1)!}$$

i dalej różniczkujemy

$$R''_n(x_0, h) = f''(x_0 + h) - \sum_{k=2}^{n-1} f^{(k)}(x_0) \frac{h^{k-2}}{(k-2)!}$$

i po $(n-2)$ różniczkowaniach mamy

$$R_n^{(n-2)}(x_0, h) = f^{(n-2)}(x_0 + h) - f^{(n-2)}(x_0) - f^{(n-1)}(x_0)h.$$

Liczymy

$$\frac{R_n^{(n-2)}(x_0, h)}{(h^{n-1})^{(n-2)}} = \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{f^{(n-2)}(x_0 + h) - f^{(n-2)}(x_0)}{h} - f^{(n-1)}(x_0) \right)$$

Ponieważ

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n-2)}(x_0 + h) - f^{(n-2)}(x_0)}{h} = f^{(n-1)}(x_0),$$

to stosując wielokrotnie regułę de l'Hospitala dostajemy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R_n(x_0, h)}{h^{n-1}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R_n^{(n-2)}(x_0, h)}{(h^{n-1})^{(n-2)}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{f^{(n-2)}(x_0 + h) - f^{(n-2)}(x_0)}{h} - f^{(n-1)}(x_0) \right) = 0.$$

□

UZUPEŁNIENIA POTRZEBNE DO BADANIA FUNKCJI:

EKSTREMA: Z twierdzenia Fermata wiemy, że jeśli funkcja różniczkowalna ma w punkcie x ekstremum to pochodna w tym punkcie jest 0. Przydają się jeszcze następujące fakty:

Fakt 2. Niech $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągłą na $]a, b[$ i różniczkowalną w $]a, b[\setminus \{x_0\}$ wtedy

- (1) jeśli istnieje $\delta > 0$ taka że $f'(x) > 0$ dla $x \in]x_0 - \delta, x_0[$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x \in]x_0, x_0 + \delta[$ to f ma w x_0 maksimum;
- (2) jeśli istnieje $\delta > 0$ taka że $f'(x) < 0$ dla $x \in]x_0 - \delta, x_0[$ oraz $f'(x) > 0$ dla $x \in]x_0, x_0 + \delta[$ to f ma w x_0 minimum;

Fakt 3. Jeśli f jest dwukrotnie różniczkowalna w x_0 i $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) \neq 0$ to f ma w x_0 ekstremum: dla $f''(x_0) > 0$ jest to minimum a dla $f''(x_0) < 0$ maksimum.

Fakt 4. Jeśli f jest n -krotnie różniczkowalna w x_0 i $f^{(k)}(x_0) = 0$ dla $k = 1, 2, \dots, n-1$ a $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ to jeśli n jest parzyste, f ma w x_0 ekstremum: dla $f^{(n)}(x_0) > 0$ jest to minimum a dla $f^{(n)}(x_0) < 0$ maksimum. Jeśli zaś n jest nieparzyste, to funkcja nie ma ekstremum w tym punkcie.

WYPUKŁOŚĆ:

Fakt 5. Jeśli funkcja f wypukła na $]a, b[$ to w $x \in]a, b[$ istnieją jednostronne pochodne:

$$f'_+(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad f'_-(x) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

i $f'_+(x) \geq f'_-(x)$.

Fakt 6. Funkcja różniczkowalna na $]a, b[$ jest wypukła wtedy i tylko wtedy gdy ma niemalejącą pochodną.

Fakt 7. Funkcja dwukrotnie różniczkowalna na $]a, b[$ jest wypukła wtedy i tylko wtedy gdy ma nieujemną drugą pochodną.

ASYMPTOTY: Jeśli istnieją $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ takie, że

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - (ax + b) = 0$$

to mówimy, że f ma prawostronną asymptotę ukośną. Rozpatrując granicę w $-\infty$ dostajemy lewostronną asymptotę ukośną. Parametry a i b wyznaczamy ze wzorów

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax).$$