

Analiza III

wykład 1

Trzeci semestr wykładu z Analizy zaczynamy od elementów geometrii różniczkowej. Pierwsze dwa wykłady stanowią przypomnienie z zeszłego roku, a dopiero trzeci wykład zawierać będzie nowy materiał. Przypominam, że teksty umieszczane w internecie stanowią streszczenie wykładu, tzn. zawierają podstawowe definicje i twierdzenia, natomiast nie zawierają dowodów. W wyjątkowych przypadkach, kiedy dowód jest szczególnie skomplikowany albo ważny, będę go także umieszczać w streszczeniach.

Definicja 1. Podzbiór M przestrzeni $\mathbb{R}^n$ nazywamy *powierzchnią wymiaru k* jeśli dla każdego punktu $x \in M$ istnieje otoczenie otwarte $U \subset \mathbb{R}^n$ tego punktu, zbiór otwarty $W \subset \mathbb{R}^n$ i odwzorowanie $h : U \rightarrow W$ takie, że

- h jest dyfeomorfizmem, tzn. jest różniczkowalne, odwracalne i jego odwrotność też jest różniczkowalna,
- $h(M \cap U) \subset W \cap (\mathbb{R}^k \times \underbrace{\{(0, 0, \dots, 0)\}}_{n-k})$.

W praktyce sprawdzanie z definicji, czy konkretny zbiór jest powierzchnią bywa kłopotliwe. Mamy jednak do dyspozycji dwa wygodne twierdzenia:

Twierdzenie 1. Niech G będzie odwzorowaniem określonym na otwartym zbiorze $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ o wartościach w $\mathbb{R}^m$, wówczas zbiór $M = G^{-1}(0)$ jest powierzchnią wymiaru $n - m$ jeśli dla wszystkich $x \in M$ pochodna $G'(x)$ jest odwzorowaniem rzędu M .

Przykład: Jeśli $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dane jest wzorem $G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ to zbiór $S^2 = G^{-1}(0)$ jest powierzchnią wymiaru 2 gdyż $G'(x, y, z) = [2x, 2y, 2z]$ i ma rząd równy 1 wszędzie poza punktem $(0, 0, 0)$, a $(0, 0, 0)$ nie należy do zbioru S^2 . Inaczej ma się sprawa z odwzorowaniem $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2$. Zbiór $C = F^{-1}(0)$ jest stożkiem. Stożek nie jest powierzchnią, gdyż $F'(x, y, z) = [-2x, -2y, 2z]$ ma rząd równy 1 wszędzie poza punktem $(0, 0, 0)$ i równy zero w punkcie $(0, 0, 0)$. Teraz jednak punkt $(0, 0, 0)$ należy do C .

Twierdzenie 2. Podzbiór $M \subset \mathbb{R}^n$ jest powierzchnią wymiaru k jeśli dla każdego punktu $x \in M$ istnieje zbiór otwarty $U \subset \mathbb{R}^k$, otoczenie otwarte $W \subset \mathbb{R}^n$ punktu x i odwzorowanie $\kappa : U \rightarrow W$ (nazywane parametryzacją M) spełniające warunki:

- $\kappa(U) = M \cap W$,
- $\kappa'(y)$ jest rzędu k dla wszystkich $y \in U$.

Przykład: Zbiór $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ będący okręgiem o środku w $(0, 0)$ i promieniu 1 jest powierzchnią, ponieważ możemy opisać go przy pomocy następującej parametryzacji:

$$\kappa : \mathbb{R} \ni t \longmapsto (\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2$$

Niech $U_1 =]0, 2\pi[$ i $U_2 =]-\pi, \pi[$ będą odcinkami w zbiorze parametrów i $W_1 = \mathbb{R}^2 \setminus (1, 0)$, $W_2 = \mathbb{R}^2 \setminus (-1, 0)$ otwartymi zbiorami w $\mathbb{R}^2$. Parametryzacja κ wraz ze zbiorami U_1 , W_1 , U_2 i W_2 spełniają warunki podane w twierdzeniu. Problemy natomiast pojawiają się przy odwzorowaniu

$$\lambda :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\ni t \longmapsto (\cos 2t, \sin 3t)$$

Obraz odwzorowania λ w otoczeniu punktu $(-\frac{1}{2}, 0)$ nie jest powierzchnią.

Jako przykład powierzchni opisanej na wszystkie trzy sposoby, tzn. z definicji, za pomocą twierdzenia o poziomicy odwzorowania i za pomocą twierdzenia o parametryzacji rozważmy n -wymiarową sferę S^n w $n+1$ wymiarowej przestrzeni $\mathbb{R}^{n+1}$. **Twierdzenie o poziomicy:** Jeśli

$$G : \mathbb{R}^n \ni (x^1, x^2, \dots, x^n, x^{n+1}) \longmapsto (x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 \in \mathbb{R}$$

to

$$S^n = G^{-1}(0)$$

Podobnie jak w przypadku dwuwymiarowej sfery w trójwymiarowej przestrzeni obliczamy

$$G'(x) = [2x^1, 2x^2, \dots, 2x^{n+1}]$$

i stwierdzamy, że wszędzie poza $(0, \dots, 0)$ rząd pochodnej jest maksymalny i równy 1, zatem S^n jest powierzchnią. **Z definicji:** Niech $r(x)$ oznacza euklidesową długość wektora x . Oznaczmy W_N zbiór

$$W_N = \{(x) : 1 - \varepsilon \leq r(x) \leq 1 + \varepsilon\} \setminus \{(0, 0, \dots, 0, \alpha) : \alpha \in]1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon[\},$$

gdzie ε jest ustaloną liczbą dodatnią mniejszą od 1. Podobnie

$$W_S = \{(x) : 1 - \varepsilon \leq r(x) \leq 1 + \varepsilon\} \setminus \{(0, 0, \dots, 0, \alpha) : \alpha \in]-1 - \varepsilon, -1 + \varepsilon[\}.$$

Definiujemy odwzorowania

$$h_N : W_N \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \qquad h_S : W_S \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

wzorami

$$h_N(x^1, \dots, x^{n+1}) = \left(\frac{x^1}{r(x) - x^{n+1}}, \dots, \frac{x^n}{r(x) - x^{n+1}}, r(x) - 1 \right)$$

$$h_S(x^1, \dots, x^{n+1}) = \left(\frac{x^1}{r(x) + x^{n+1}}, \dots, \frac{x^n}{r(x) + x^{n+1}}, r(x) - 1 \right).$$

Istotnie $S^n \subset W_N \cup W_S$ oraz

$$h_N(W_N \cap S^n) \subset \mathbb{R}^n \times \{0\}, \qquad h_S(W_S \cap S^n) \subset \mathbb{R}^n \times \{0\}.$$

Należy teraz sprawdzić, czy h_N i h_S są dyfeomorfizmami (na obraz). Wymaga to przeprowadzenia sporej liczby rachunków. **Za pomocą parametryzacji:** Niech K^n oznacza kulę otwartą w $\mathbb{R}^n$ dla $i \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ oraz $\epsilon \in \{-1, 1\}$ definiujemy odwzorowania

$$\kappa_i^\epsilon : K \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

$$\kappa_i^\epsilon(y^1, \dots, y^n) = (y^1, \dots, y^{i-1}, \epsilon \sqrt{1 - \sum_{j=1}^n (y^j)^2}, y^i, \dots, y^n)$$

Widać, że rząd każdego z tych odwzorowań jest maksymalny, obrazy pokrywają całą powierzchnię sfery. W ten sposób opisaliśmy sferę na trzy sposoby.