

Wykład 25

całka Riemanna - cd.

Kontynuujemy wypisywanie i dowodzenie (niektórych) własności całki Riemanna. Pora teraz na własność (6) wraz z dowodem:

(6) Niech f będzie funkcją całkowalną na $[a, b]$. Oznaczmy $M = \sup_{[a,b]} f$, $m = \inf_{[a,b]} f$ i weźmy funkcję φ ciągłą na $[m, M]$. Wtedy funkcja $\varphi \circ f$ jest całkowalna na $[a, b]$.

DOWÓD: W dowodzie korzystać będziemy z jednostajnej ciągłości funkcji ciągłej na zbiorze zwartym. Funkcja φ jest ciągła na $[m, M]$, zatem jako funkcja ciągła na odcinku domkniętym (a więc zwartym) jest jednostajnie ciągła. Dla ustalonego, dowolnego $\varepsilon > 0$ możemy więc wybrać $\delta > 0$ taką, że jeśli tylko $|y - y'| < \delta$, to $|\varphi(y) - \varphi(y')| < \varepsilon$. Możemy także zażądać, żeby $\delta < \varepsilon$ (w razie potrzeby można po prostu δ odpowiednio zmniejszyć dostosowując do wybranego ε). Skoro funkcja f jest całkowalna możemy znaleźć podział dla którego różnica między sumą górną a dolną jest dowolnie mała. Niech więc P będzie takim podziałem, że dla (dobrej wcześniej dla ε) δ

$$U(P, f) - L(P, f) < \delta^2.$$

Naszym zadaniem będzie teraz oszacować różnicę między sumą górną a sumą dolną dla złożenia funkcji $\varphi \circ f$:

$$U(P, \varphi \circ f) - L(P, \varphi \circ f).$$

W tym celu oznaczmy jak zwykle $P_i = [x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $m_i = \inf_{P_i} f$, $M_i = \sup_{P_i} f$. Zbiór indeksów $\overline{1, n} = \{1, 2, \dots, n\}$ podzielimy teraz na dwa podzbiory:

$$\Lambda_1 = \{k \in \overline{1, n} : M_k - m_k < \delta\} \quad \text{ i } \quad \Lambda_2 = \{k \in \overline{1, n} : M_k - m_k \geq \delta\}.$$

Jeśli $i \in \Lambda_1$ to

$$\sup_{P_i} \varphi \circ f - \inf_{P_i} \varphi \circ f < \varepsilon,$$

bo dla wszystkich

$$y, y' \in [m_i, M_i] \quad |y - y'| < M_i - m_i < \delta$$

Dla $i \in \Lambda_2$ można tylko powiedzieć, że

$$\sup_{P_i} \varphi \circ f - \inf_{P_i} \varphi \circ f < 2K,$$

gdzie $K = \sup_{[m, M]} \varphi$. Szacujemy teraz różnicę sum:

$$\begin{aligned} U(P, \varphi \circ f) - L(P, \varphi \circ f) &= \sum_{i=1}^n (\sup_{P_i} \varphi \circ f - \inf_{P_i} \varphi \circ f) \Delta x_i = \\ &= \sum_{i \in \Lambda_1} (\sup_{P_i} \varphi \circ f - \inf_{P_i} \varphi \circ f) \Delta x_i + \\ &\quad + \sum_{i \in \Lambda_2} (\sup_{P_i} \varphi \circ f - \inf_{P_i} \varphi \circ f) \Delta x_i \leq \\ &\leq \sum_{i \in \Lambda_1} \varepsilon \Delta x_i + \sum_{i \in \Lambda_2} 2K \Delta x_i = \\ &= \varepsilon \sum_{i \in \Lambda_1} \Delta x_i + 2K \sum_{i \in \Lambda_2} \Delta x_i \leq \varepsilon(b-a) + 2K\delta \leq \dots \end{aligned}$$

W powyższym rachunku nie jest jasne dlaczego

$$\sum_{i \in \Lambda_2} \Delta x_i \leq \delta.$$

Korzystamy tu z faktu, że podział P wybraliśmy tak, aby $U(P, f) - L(P, f) < \delta^2$ oraz z definicji Λ_2 : Dla $i \in \Lambda_2$ mamy $M_i - m_i \geq \delta$ zatem:

$$\delta \sum_{i \in \Lambda_2} \Delta x_i \leq \sum_{i \in \Lambda_2} (M_i - m_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i = U(p, f) - L(p, f) \leq \delta^2$$

zatem

$$\delta \sum_{i \in \Lambda_2} \Delta x_i \leq \delta^2$$

i ostatecznie

$$\sum_{i \in \Lambda_2} \Delta x_i \leq \delta.$$

Teraz możemy już kontynuować poprzednie szacowanie, biorąc pod uwagę, że $\delta < \varepsilon$:

$$\dots \varepsilon \sum_{i \in \Lambda_1} \Delta x_i + 2K \sum_{i \in \Lambda_2} \Delta x_i \leq \varepsilon(b - a) + 2K\delta < \varepsilon(b - a) + 2K\varepsilon = \varepsilon(b - a + 2K).$$

Różnica między sumą górną a dolną dla złożenia funkcji może więc być dowolnie mała jeśli wybierzemy wystarczająco drobny podział P . Tym samym na mocy Faktu (3) funkcja $\varphi \circ f$ jest całkowalna. $\square$

(7) Z punktu (6) łatwo wywnioskować, że jeśli f, g są całkowalne na $[a, b]$ to fg też jest całkowalna na $[a, b]$.

DOWÓD: Skoro f i g są całkowalne, to na mocy poprzednich własności $f + g$ oraz $f - g$ także są całkowalne. Oznaczając $\varphi(t) = t^2$ i korzystając z ciągłości funkcji φ na całym $\mathbb{R}$ oraz z własności (6) dostajemy, że $(f + g)^2$ i $(f - g)^2$ są całkowalne. Iloczyn fg można zapisać jako

$$fg = \frac{1}{4}((f + g)^2 - (f - g)^2).$$

fg jest kombinacją liniową funkcji całkowalnych, a więc jest całkowalna. $\square$

(8) Własność 8. to istotny i często używany fakt: Jeśli f jest całkowalna na $[a, b]$, to także $|f|$ jest całkowalna na $[a, b]$ oraz

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|.$$

DOWÓD: Całkowalność $|f|$ wynika z punktu (6) i ciągłości funkcji $t \mapsto |t|$. Nierówność otrzymujemy obserwując, że

$$\forall x \in [a, b] \quad -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

zatem na mocy (3) (i (2)):

$$-\int_{[a,b]} |f(x)| \leq \int_{[a,b]} f(x) \leq \int_{[a,b]} |f(x)|,$$

co można zapisać jako

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|.$$

$\square$.

(9) Punkt ten stanowi przygotowanie do Podstawowego Twierdzenia Rachunku Różniczkowego i Całkowego: Jeśli f całkowalna na $[a, b]$, to dla każdego $x \in [a, b]$ funkcja

$$F(x) = \int_{[a,x]} f$$

jest funkcją ciągłą.

DOWÓD: Z punktu (4) wynika całkowalność funkcji f na każdym odcinku $[a, x]$. Wykonajmy dla $h > 0$ następujący rachunek:

$$\begin{aligned} |F(x+h) - F(x)| &= \left| \int_{[a, x+h]} f - \int_{[a, x]} f \right| = \left| \int_{[a, x]} f + \int_{[x, x+h]} f - \int_{[a, x]} f \right| = \\ &= \left| \int_{[x, x+h]} f \right| \leq \int_{[x, x+h]} |f| \leq \sup_{[x, x+h]} |f| h \leq \sup_{[a, b]} |f| h \end{aligned}$$

Zatem

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} |F(x+h) - F(x)| = 0$$

Podobnie dla $h < 0$:

$$\begin{aligned} |F(x+h) - F(x)| &= \left| \int_{[a, x+h]} f - \int_{[a, x]} f \right| = \left| \int_{[a, x+h]} f - \int_{[a, x+h]} f - \int_{[x+h, x]} f \right| = \\ &= \left| - \int_{[x+h, x]} f \right| \leq \int_{[x+h, x]} |f| \leq \sup_{[x+h, x]} |f| |h| \leq \sup_{[a, b]} |f| |h| \end{aligned}$$

Zatem

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} |F(x+h) - F(x)| = 0$$

i ostatecznie

$$\lim_{h \rightarrow 0} |F(x+h) - F(x)| = 0.$$

□.

Teraz pora już na Podstawowe Twierdzenia Rachunku Różniczkowego i Całkowego:

Twierdzenie 1 (Podstawowe Rachunku Różniczkowego i Całkowego). Jeśli funkcja f jest funkcją ciągłą w $x_0 \in [a, b]$ to

$$F(x) = \int_{[a, x]} f = \int_a^x f(t) dt$$

jest różniczkowalna w x_0 i

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

W szczególności dla funkcji ciągłej f na odcinku $[a, b]$ istnieje funkcja pierwotna oraz dla każdej funkcji pierwotnej $\bar{F}$ funkcji f zachodzi

$$\int_{[a, b]} f = \int_a^b f(t) dt = \bar{F}(b) - \bar{F}(a).$$

DOWÓD: Udowodniliśmy już ciągłość F dla każdej funkcji całkowalnej f . Załóżmy teraz, że f jest ciągła w x_0 i oszacujmy iloraz różnicowy F dla $h > 0$:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left(\int_{[a, x_0+h]} f - \int_{[a, x_0]} f \right) = \frac{1}{h} \int_{[x_0, x_0+h]} f$$

Zbadajmy teraz wyrażenie $\left(\frac{1}{h} \int_{[x_0, x_0+h]} f\right) - f(x_0)$:

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{1}{h} \int_{[x_0, x_0+h]} f \right) - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{h} \left(\int_{[x_0, x_0+h]} f - f(x_0)h \right) \right| = \\ &= \left| \frac{1}{h} \left(\int_{[x_0, x_0+h]} f - \int_{[x_0, x_0+h]} f(x_0) \right) \right| = \\ &= \left| \frac{1}{h} \int_{[x_0, x_0+h]} (f - f(x_0)) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{h} \int_{[x_0, x_0+h]} |f - f(x_0)| \leq \\ &\leq \frac{1}{h} \left(\sup_{[x_0, x_0+h]} |f(x) - f(x_0)| \right) h = \sup_{[x_0, x_0+h]} |f(x) - f(x_0)|. \end{aligned}$$

Z ciągłości funkcji f wynika, że

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \sup_{[x_0, x_0+h]} |f(x) - f(x_0)| = 0$$

zatem

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left| \left(\frac{1}{h} \int_{[x_0, x_0+h]} f \right) - f(x_0) \right| = 0$$

i

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_{[x_0, x_0+h]} f = f(x_0).$$

Dla $h < 0$ robimy identyczny rachunek. W ten sposób wykazaliśmy, że

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Jeśli więc f jest ciągła na całym odcinku $[a, b]$, to funkcja F jest funkcją pierwotną do f na tym odcinku. Ponadto $F(a) = 0$ i $F(b) = \int_{[a, b]} f$. Dowolna inna funkcja pierwotna $\bar{F}$ różni się od F o stałą:

$$\bar{F} = F + c$$

zatem

$$\int_{[a, b]} f = F(b) = F(b) - F(a) = \bar{F}(b) - c - \bar{F}(a) + c = \bar{F}(b) - \bar{F}(a).$$

□.

Powyższe twierdzenie daje możliwość praktycznego obliczania całek. Możemy się ostatecznie przekonać, że pole nad odcinkiem $[0, 1]$ pod parabolą $y = x^2$ jest równe $\frac{1}{3}$:

$$\int_{[0, 1]} x^2 = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Całkowanie funkcji ciągłych sprowadza się więc do poszukiwania funkcji pierwotnych, co (teoretycznie) już potrafimy robić.

Do kompletu informacji o całkach Riemanna potrzeba nam jeszcze umiejętności całkowania przez części i podstawienie oraz radzenia sobie z funkcjami nieograniczonymi (co czasami jest niezbędne także w zastosowaniach fizycznych). Oto przydatne twierdzenia:

Twierdzenie 2 (Pierwsze o wartości średniej). Niech f i g będą funkcjami całkowalnymi na $[a, b]$ oraz niech $g \geq 0$. Wtedy istnieje $c \in \mathbb{R}$ takie, że

$$\inf_{[a, b]} f \leq c \leq \sup_{[a, b]} f \quad \text{i} \quad \int_{[a, b]} fg = c \int_{[a, b]} g.$$

DOWÓD: Oznaczamy jak zwykle $m = \inf_{[a,b]} f$, $M = \sup_{[a,b]} f$. Mamy wtedy

$$\forall x \in [a, b] \quad m \leq f \leq M,$$

korzystając z tego, że $g \geq 0$ dostajemy

$$\forall x \in [a, b] \quad mg \leq fg \leq Mg.$$

Z własności (3) całki Riemanna wynika

$$m \int_{[a,b]} g \leq \int_{[a,b]} fg \leq M \int_{[a,b]} g.$$

Jeśli $\int_{[a,b]} g \neq 0$ to

$$m \leq \left(\int_{[a,b]} g \right)^{-1} \int_{[a,b]} fg \leq M$$

i bierzemy

$$c = \left(\int_{[a,b]} g \right)^{-1} \int_{[a,b]} fg.$$

Jeśli zaś $\int_{[a,b]} g = 0$ to $\int_{[a,b]} fg = 0$, bo

$$0 \leq \left| \int_{[a,b]} fg \right| \leq \int_{[a,b]} |f|g \leq \sup_{[a,b]} |f| \int_{[a,b]} g = 0$$

Wtedy dowolna liczba $c \in [m, M]$ jest dobra. $\square$

WNIOSKI: Jeśli funkcja f jest ciągła, to przyjmuje wszystkie wartości między m i M , zatem istnieje $\xi \in [a, b]$ takie, że $c = f(\xi)$. Wtedy twierdzenie o wartości średniej można zapisać następująco:

$$\exists \xi \in [a, b] : \int_{[a,b]} fg = f(\xi) \int_{[a,b]} g.$$

Jeśli ponadto funkcja g jest stała i równa 1, to twierdzenie o wartości średniej przyjmuje postać:

$$\exists \xi \in [a, b] : \int_{[a,b]} f = f(\xi)(b - a).$$

Wniosek ten jest pożyteczny przy dowodzie twierdzenia o całkowaniu przez podstawienie.

Twierdzenie 3 (Drugie o wartości średniej). Niech f i g będą funkcjami całkowalnymi na $[a, b]$ oraz niech $g \geq 0$ i nierosnąca. Wtedy istnieje $\xi \in [a, b]$ takie, że

$$\int_{[a,b]} fg = g(a) \int_{[a,\xi]} f.$$

Jeśli zaś g niemalejąca, to istnieje $\eta \in [a, b]$ takie, że

$$\int_{[a,b]} fg = g(b) \int_{[\eta,b]} f.$$

Powyższe twierdzenie pozostawiamy bez dowodu.

Twierdzenie 4 (O całkowaniu przez części). Niech f, g będą różniczkowalne w sposób ciągły na odcinku $[a, b]$ wówczas

$$\int_{[a,b]} f'g = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_{[a,b]} fg'.$$

DOWÓD: Jeśli f, g są jak w założeniach twierdzenia to funkcja $(fg)'$ jest ciągła a więc całkowalna. Z podstawowego twierdzenia rachunku różniczkowego i całkowego wiadomo, że

$$\int_{[a,b]} (fg)' = (fg)(b) - (fg)(a) = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Z drugiej strony $(fg)' = f'g + fg'$ zatem

$$\int_{[a,b]} (fg)' = \int_{[a,b]} f'g + \int_{[a,b]} fg'$$

ostatecznie więc

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_{[a,b]} f'g + \int_{[a,b]} fg'$$

□.

Twierdzenie 5 (O całkowaniu przez podstawienie). Niech f będzie ciągłą na $[a, b]$ i φ będzie różniczkowalna w sposób ciągły na $[\alpha, \beta]$, niech także $\varphi(x) \neq 0$ dla $x \in [\alpha, \beta]$. Niech także $\varphi([\alpha, \beta]) = [a, b]$ Wówczas

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[\alpha,\beta]} f \circ \varphi \cdot |\varphi'|$$

DOWÓD: Jeśli φ jest różniczkowalna w sposób ciągły i jej pochodna jest różna od zera na odcinku $[\alpha, \beta]$ to oznacza, że φ jest ściśle monotoniczna. Niech F i G oznaczają funkcje

$$[\alpha, \beta] \ni x \mapsto F(x) = \int_{\varphi([\alpha, x])} f$$

$$[\alpha, \beta] \ni x \mapsto G(x) = \int_{\varphi([\alpha, x])} f \circ \varphi |\varphi'|$$

Obie funkcje są różniczkowalne wewnątrz $[\alpha, \beta]$ i ciągłe na $[\alpha, \beta]$. Liczymy pochodne obu funkcji:

$$G'(x) = f(\varphi(x))|\varphi'(x)|$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \left(\int_{\varphi([\alpha, x+h])} f - \int_{\varphi([\alpha, x])} f \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \left(\int_{\varphi([x, x+h])} f \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} f(\xi_h) |\varphi(x+h) - \varphi(x)| = \dots \end{aligned}$$

Ostatnia równość obowiązuje dla pewnego ξ_h w odcinku $[\varphi(x), \varphi(x+h)]$ i wynika z pierwszego twierdzenia o wartości średniej. Z różniczkowalności φ mamy

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|\varphi(x+h) - \varphi(x)|}{h} = |\varphi'(x)|$$

natomiast z ciągłości f i φ wynika

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} f(\xi_h) = f(\varphi(x))$$

zatem

$$\dots = f(\varphi(x))|\varphi'(x)|.$$

Okazuje się więc, że G i F mają jednakowe pochodne na odcinku, zatem są funkcjami pierwotnymi tej samej funkcji. Jednocześnie $F(\alpha) = G(\alpha) = 0$, zatem $F = G$. □