Wykład 2.

O zbiorze liczb wymiernych $\mathbb{Q}$: Konstrukcja zbioru liczb wymiernych wymaga używania pojęcia relacji równoważności, dlatego będzie zaprezentowana później. Mówiąc po ludzku zbiór liczb wymiernych jest zbiorem wszystkich ułamków zwykłych. Opiszmy teraz strukturę tego zbioru:

(1) *W zbiorze $\mathbb{Q}$ określone jest dodawanie i mnożenie.* (i) Dodawanie jest przemienne $p+q = q+p$, łączne $(p+q)+r = p+(q+r)$, ma element neutralny 0 taki, że $p+0 = p$ i każdy element q ma element przeciwny p taki, że $p+q = 0$, p oznaczamy $-q$. Wszystkie te warunki dotyczące dodawania można zapisać w skrócie $(\mathbb{Q}, +)$ jest grupą przemienną. (ii) Mnożenie też jest przemienne $pq = qp$, łączne $(pq)r = p(qr)$, ma element neutralny 1 taki, że $1p = p$ i każdy różny od zera element $q \in \mathbb{Q}$ ma odwrotność, tzn istnieje p takie, że $pq = 1$. Takie p oznaczamy p^{-1}, albo $\frac{1}{p}$. Innymi słowy $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ jest grupą przemienną. (iii) Działania dodawania i mnożenia są zgodne, tzn. zachodzi warunek rozdzielności mnożenia względem dodawania.

$$p(q+r) = pq + pr$$

(iv) Ponadto $1 \neq 0$. Warunki i-iv oznaczają, że $\mathbb{Q}$ jest ciałem.

(2) Zbiór $\mathbb{Q}$ jest zbiorem uporządkowanym liniowo, tzn. mamy relacje „$\leqslant$" o następujących własnościach (i) każde dwa elementy są porównywalne, (ii) jeśli $p \leqslant q$ i $q \leqslant p$ to $p = q$.

(3) Dodawanie i mnożenie są zgodne z porządkiem, tzn (i) dla dowolnego $q \in \mathbb{Q}$ jeśli $p \leqslant r$ to $p+q \leqslant p+r$, ponadto (ii) dla nieujemnych p i q zachodzi $pq \geqslant 0$.

(4) Spełniony jest aksjomat Archimedesa:

$$\forall\, a > 0 \;\; \forall\, b \geqslant 0 \;\; \exists\, n \in \mathbb{N} : \quad b \leqslant na.$$

Powyższe cztery własności ma także zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Jest jednak istotna różnica między tymi zbiorami: $\mathbb{Q}$ jest dziurawe:

Fakt 1. Nie istnieje liczba wymierna p taka, że $p^2 = 2$.

W miejscu przeznaczonym na rozwiązanie tego równania jest istotna dziura! Definiujemy dwa zbiory

$$A = \{q \in \mathbb{Q} : \; q > 0 \text{ i } q^2 < 2\} \cup \{q \in \mathbb{Q} : \; q \leqslant 0\}, \qquad B = \{q \in \mathbb{Q} : \; q > 0 \text{ i } q^2 > 2\}$$

Zbiory te są rozłączne, a ich suma daje całe $\mathbb{Q}$: $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{Q}$.

Definicja 1. *Zbiór $X \subset \mathbb{Q}$ nazywamy ograniczonym z góry (z dołu) jeśli istnieje liczba wymierna M (m) taka, że dla każdego $p \in X$ zachodzi $p \leqslant M$ ($p \geqslant m$). Liczbę M (m) nazywamy ograniczeniem górnym (ograniczeniem dolnym) zbioru X. Zbór, który jest ograniczony z góry i z dołu nazywamy ograniczonym.*

Zbiór A jest ograniczony z góry, a zbiór B z dołu. Ponadto każdy element zbioru A jest ograniczeniem dolnym B i odwrotnie każdy element zbioru B jest ograniczeniem górnym A.

Fakt 2. W A nie ma elementu największego, w B nie ma elementu najmniejszego.

Oznacza to, że między zbiorami A i B jest istotna dziura. Wypełnienie tych dziur to istota konstrukcji zbioru $\mathbb{R}$.

Definicja 2. *Podzbiór α zbioru liczb wymiernych nazywamy przekrojem jeśli*

(1) *$\alpha \neq \emptyset$ i $\alpha \neq \mathbb{Q}$;*
(2) *jeśli $p \in \alpha$ i $q < p$ to $q \in \alpha$;*
(3) *w α nie ma elementu największego*

Jeśli α jest postaci $\alpha = \{p \in \mathbb{Q} : \; p < r_0\}$ dla pewnego $r_0 \in \mathbb{Q}$ to α nazywamy przekrojem głównym.

A jest przekrojem, ale nie głównym. W zbiorze wszystkich przekrojów wprowadzamy relację porządku i operacje dodawania i mnożenia w następujący sposób:

Definicja 3. *Niech α, β będą przekrojami, jeśli istnieje liczba wymierna q taka, że $q \in \beta$ i $q \notin \alpha$, to mówimy, że $\alpha < \beta$. Piszemy $\alpha \leqslant \beta$ jeśli $\alpha < \beta$ lub $\alpha = \beta$.*

Fakt 3. $\leqslant$ jest relacją liniowego porządku w zbiorze przekrojów.

Niech teraz

$$\alpha + \beta = \{p \in \mathbb{Q} : \quad p = a + b \text{ i } a \in \alpha, b \in \beta\}$$

Należy pokazać, że $\alpha+\beta$ jest przekrojem oraz, że tak wprowadzone dodawanie spełnia wszystkie potrzebne warunki.

Dla $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ definiujemy zbór

$$\alpha\beta = \{p \in \mathbb{Q} : \ p \leqslant 0\} \cup \{p \in \mathbb{Q} : p = ab,\ a \in \alpha, a > 0, b \in \beta, b > 0\ \}$$

Należy pokazać, że $\alpha\beta$ jest przekrojem. Definicja mnożenia przekrojów różnego znaku wymaga nieco więcej pracy.

Zbiór przekrojów zbioru liczb wymiernych wyposażony w dodawanie i mnożenie oznaczamy $\mathbb{R}$ i nazywamy zbiorem liczb rzeczywistych. W tym zbiorze nie ma już takich dziur. Np. $A = \sqrt{2}$.
Ciąg dalszy nastąpi.