

### Wykład 3.

Na poprzednim wykładzie wprowadziliśmy zbiór  $\mathbb{R}$  przekrojów zbioru liczb wymiernych. Zdefiniowaliśmy także relację porządku w zbiorze przekrojów, dodawanie przekrojów i mnożenie przekrojów nieujemnych. Definicja mnożenia przekrojów dowolnego znaku wymaga dłuższego opowiadania dlatego ją pomijamy. Zainteresowanych odsyłamy do książki Rudina. Zbiór  $\mathbb{R}$  z dodawaniem, mnożeniem i relacją porządku spełnia warunki (1)-(4) wypisane na poprzednim wykładzie dla zbioru  $\mathbb{Q}$ . Tym co odróżnia oba te zbiory jest warunek (5) spełniany przez  $\mathbb{R}$  a nie spełniany przez  $\mathbb{Q}$ . Warunek ten jest treścią następnego twierdzenia:

**Twierdzenie 1.** *Każdy przekrój zbioru liczb rzeczywistych jest główny.*

**Dowód:** Niech  $\alpha$  będzie przekrojem zbioru liczb rzeczywistych. Przypomnijmy sobie, że każda liczba rzeczywista jest przekrojem zbioru liczb wymiernych. Umówmy się, że liczbę rzeczywistą  $x$  będziemy oznaczać na dwa sposoby:  $x$  gdy traktujemy ją jak liczbę a  $\tilde{x}$  gdy traktujemy ją jak przekrój zbioru liczb wymiernych, czyli jako pewien zbiór. Liczby wymierne odpowiadają przekrojom głównym liczb wymiernych a liczby niewymierne przekrojom nie-głównym. Czyli w szczególności jeśli  $q \in \mathbb{Q}$  to

$$\tilde{q} = \{p \in \mathbb{Q} : p < q\}$$

Oznaczmy  $\alpha_{\mathbb{Q}}$  zbiór  $\alpha \cap \mathbb{Q}$ . Pokażemy najpierw, że zbiór  $\alpha_{\mathbb{Q}}$  jest przekrojem zbioru  $\mathbb{Q}$ .

- (1) Uzasadniamy, że  $\alpha_{\mathbb{Q}}$  jest niepusty: zbiór  $\alpha$  jest niepusty, więc zawiera jakąś liczbę  $x$  a wraz z nią wszystkie mniejsze od niej, wśród tych mniejszych jest całe mnóstwo wymiernych. Uzasadniamy, że nie  $\alpha_{\mathbb{Q}}$  jest on całym zbiorem  $\mathbb{Q}$ :  $\alpha$  jest ograniczony z góry, zatem  $\alpha_{\mathbb{Q}}$  też jest ograniczony z góry.
- (2) Drugi warunek w definicji przekroju liczb wymiernych mówi, że jeśli  $p$  należy do przekroju, to także każda liczba wymierna mniejsza od  $p$  też do niego należy. Sprawdźmy czy tak jest w przypadku  $\alpha_{\mathbb{Q}}$ : Niech  $p$  będzie liczbą wymierną należącą do  $\alpha_{\mathbb{Q}}$ , i niech  $q \in \mathbb{Q}$  i  $q < p$ . Wtedy  $q \in \alpha$  (bo  $\alpha$  jest przekrojem), a skoro  $q \in \mathbb{Q}$  to także  $q \in \alpha_{\mathbb{Q}}$ .
- (3) Pokażemy teraz, że w  $\alpha_{\mathbb{Q}}$  nie ma elementu największego. Załóżmy *ad absurdum*, że  $p_0$  jest największym elementem  $\alpha_{\mathbb{Q}}$ . Oczywiście  $p_0 \in \alpha$ , zatem istnieje liczba rzeczywista  $x$  taka, że  $x > p_0$  i  $x \in \alpha$ . Pamiętajmy, że  $x$  jest liczbą rzeczywistą czyli przekrojem liczb wymiernych. Ponieważ  $p_0 < x$  to  $p_0 \in \tilde{x}$ . Z własności liczby  $x$  jako przekroju wynika, że istnieje  $q \in \mathbb{Q}$  takie, że  $q > p_0$  i  $q \in \tilde{x}$ , bo w  $\tilde{x}$  nie ma elementu największego. Skoro  $q \in \tilde{x}$  ( $x$  jako przekrój) to także  $q < x$  ( $x$  jako liczba) i zatem  $q \in \alpha$ . Znaliśmy więc w przekroju  $\alpha$  liczbę wymierną większą od  $p_0$ . Jest to sprzeczne z założeniem, że  $p_0$  jest największą liczbą w  $\alpha_{\mathbb{Q}}$ .

Udowodniliśmy, że  $\alpha_{\mathbb{Q}}$  jest przekrojem. Jako przekrój zbioru liczb wymiernych definiuje on pewną liczbę rzeczywistą. Oznaczmy tę liczbę rzeczywistą  $x_0$ . Pokażemy, że

$$\alpha = \{x \in \mathbb{R} : x < x_0\}.$$

Niech  $x$  będzie dowolnym elementem  $\alpha$ . Jako liczba rzeczywista  $x$  jest reprezentowany przekrojem liczb wymiernych.  $\tilde{x}$  zawarty jest w  $\alpha_{\mathbb{Q}}$  zatem jako liczby  $x \leq x_0$ . Czy może być  $x = x_0$ ? Nie, bo wtedy  $x_0$  byłoby największym elementem  $\alpha$ . Istotnie, jeśli  $y > x_0$  i  $y \in \alpha$  to (traktujemy  $x_0$  i  $y$  jako przekroje liczb wymiernych) istnieje wymierne  $q$  takie, że  $q \in \tilde{y}$  i  $q \in \tilde{x}_0$ . Ale skoro  $y \in \alpha$  to  $y \subset \alpha_{\mathbb{Q}}$ , zatem  $y \leq x_0$ . Mamy więc sprzeczność.

W ten sposób pokazaliśmy, że każda liczba rzeczywista należąca do  $\alpha$  jest ostro mniejsza niż  $x_0$ .  $\square$

Definicja zbiorów ograniczonych z góry i z dołu w  $\mathbb{R}$  wygląda tak samo jak w  $\mathbb{Q}$ . Wystarczy zamienić literki:

**Definicja 1.** Zbiór  $X \subset \mathbb{R}$  nazywamy ograniczonym z góry (z dołu) jeśli istnieje liczba rzeczywista  $M$  ( $m$ ) taka, że dla każdego  $x \in X$  zachodzi  $x \leq M$  ( $x \geq m$ ). Liczbę  $M$  ( $m$ ) nazywamy ograniczeniem górnym (ograniczeniem dolnym) zbioru  $X$ . Zbiór, który jest ograniczony z góry i z dołu nazywamy ograniczonym.

**Definicja 2.** Kresem górnym (dolnym) zbioru  $X \subset \mathbb{R}$  ograniczonego z góry nazywamy najmniejsze (największe) ograniczenie górne (dolne).

**Twierdzenie 2.** Każdy niepusty ograniczony z góry (z dołu) podzbiór zbioru liczb rzeczywistych ma kres górny (dolny).

**Dowód:** Dowodzimy istnienia kresu górnego zbioru ograniczonego z góry. Dowód dla przypadku „dolnego” jest analogiczny. Niech  $A \subset \mathbb{R}$  będzie ograniczony z góry. Niech  $\mu_+$  oznacza zbiór wszystkich ograniczeń górnych zbioru  $A$  natomiast  $\mu_- = \mathbb{R} \setminus \mu_+$ . Warunek  $x \in \mu_-$  zapisujemy słowami: „ $x$  nie jest ograniczeniem górnym zbioru  $A$ ”, co jest równoważne sformułowaniu: „istnieje  $a \in A$  takie, że  $a > x$ ”. Pokażemy, że  $\mu_-$  jest przekrojem zbioru  $\mathbb{R}$ :

- (1)  $A$  jest niepusty, weźmy zatem dowolny element  $a \in A$ . Wszystkie liczby  $x < a$  nie są ograniczeniami górnymi  $A$  zatem należą do  $\mu_-$ . Zbiór  $\mu_-$  jest więc niepusty. Zbiór  $\mu_-$  nie jest też równy  $\mathbb{R}$ , bo  $A$  ma przynajmniej jedno ograniczenie górne;
- (2) Jeśli  $x \in \mu_-$ , to innymi słowy  $x$  nie jest ograniczeniem górnym  $A$ . Każda liczba  $y < x$  także nie jest ograniczeniem górnym  $A$  zatem  $y \in \mu_-$ ;
- (3) założmy, że w  $\mu_-$  jest element największy, oznaczmy go  $x_0$ . Skoro  $x_0$  nie jest ograniczeniem górnym  $A$  to istnieje  $a \in A$  takie, że  $x_0 < a$ . Wówczas liczba  $\frac{x_0+a}{2}$  jest mniejsza od  $a$  zatem nie jest ograniczeniem górnym  $A$  i jednocześnie jest większa od  $x_0$ , czyli  $x_0$  nie jest największym elementem  $\mu_-$ .

Każdy przekrój  $\mathbb{R}$  jest główny zatem  $\mu_-$  jest postaci  $\{x \in \mathbb{R} : x \leq M_0\}$  i  $M_0 \notin \mu_-$ . Zatem  $M_0 \in \mu_+$  i  $M_0$  jest najmniejszym elementem  $\mu_+$ , czyli kresem górnym  $A$ .  $\square$

*Wykład 3. zawierał jeszcze fragment dotyczący teorii mnogości. Fragment ten znajdzie się w streszczeniu wykładu 4, ponieważ stanowi z nim jedną całość logiczną*