

Wykład 4.

Materiał zawarty w tym streszczeniu obejmuje końcówkę wykładu trzeciego dotyczącą teorii mnogości oraz wykład czwarty. Teoria mnogości jest jedną z najbardziej podstawowych teorii matematycznych. Nie będziemy się tutaj zajmować tą teorią w całej ogólności. Zainteresowanych odsyłamy do książki „Wstęp do teorii mnogości i topologii” Kazimierza Kuratowskiego. (Do ogólnego wykształcenia należy także znajomość samej postaci Kazimierza Kuratowskiego, polecam

pl.wikipedia.org/wiki/Kazimierz_Kuratowski

lub

www.matematycy.interklasa.pl/biografie/).

Teoria mnogości, której będziemy używać (ale nie będziemy jej intensywnie badać) oparta jest na systemie aksjomatów, w których pojęcia zbioru i elementu zbioru są pojęciami pierwotnymi. Oto spis aksjomatów (niektórych):

- (1) Aksjomat jednoznaczności: Jeśli zbiory A i B mają te same elementy to są równe.
- (2) Aksjomat sumy: Dla dowolnej rodziny zbiorów R istnieje zbiór, który ma dokładnie te elementy, które należą do przynajmniej jednego spośród zbiorów $A \in R$.
- (3) Aksjomat różnicy: Dla dowolnych zbiorów A i B istnieje zbiór, który zawiera te i tylko te elementy, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B .
- (4) Aksjomat istnienia: Istnieje przynajmniej jeden zbiór.
- (5) Aksjomat wyróżniania: Dla każdego zbioru A istnieje zbiór tych elementów zbioru A , które spełniają warunek φ . Można więc pisać $\{x \in A : \varphi(x)\}$.
- (6) Aksjomat zbioru potęgowego: Dla każdego zbioru A istnieje zbiór, którego elementami są wszystkie podzbiory zbioru A .
- (7) Pewnik wyboru: Dla każdej rodziny zbiorów R istnieje zbiór zawierający po jednym elemencie z każdego zbioru rodziny R .

W dalszym ciągu z teorii mnogości będziemy tylko korzystać, a nie ją badać.

Definicja 1. Iloczynem kartezjańskim zbiorów X i Y nazywamy zbiór $X \times Y$, którego elementami są pary (x, y) , gdzie $x \in X$ i $y \in Y$.

Definicja 2. Relację $\mathcal{R} : X \longrightarrow Y$ nazywamy podzbiór iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$. Jeśli $(x, y) \in \mathcal{R}$ to mówimy, że x jest w relacji $\mathcal{R}$ z y lub, że $y \in \mathcal{R}(x)$, albo piszemy $x\mathcal{R}y$ w zależności od tego jak nam wygodniej.

Definicja 3. Jeśli $\mathcal{R} : X \longrightarrow Y$ i $\mathcal{Q} : Y \longrightarrow Z$ są relacjami to złożeniem relacji $\mathcal{Q}$ i $\mathcal{R}$ nazywamy relację $\mathcal{Q} \circ \mathcal{R} : X \longrightarrow Z$ taką, że

$$\mathcal{Q} \circ \mathcal{R} = \{(x, z) \in X \times Z : \exists y \in Y (x, y) \in \mathcal{R} \text{ i } (y, z) \in \mathcal{Q}\}.$$

Definicja 4. Relację transponowaną (albo odwrotną) do relacji $\mathcal{R} : X \longrightarrow Y$ nazywamy relację $\mathcal{R}^t : Y \longrightarrow X$ taką, że

$$(y, x) \in \mathcal{R}^t \Leftrightarrow (x, y) \in \mathcal{R}.$$

Jeśli $A \subset X$ i $B \subset Y$ to $\mathcal{R}(A)$ oznacza obraz zbioru A w relacji $\mathcal{R}$, tzn

$$\mathcal{R}(A) = \{y \in Y : \exists x \in A : (x, y) \in \mathcal{R}\},$$

$\mathcal{R}^t(B)$ oznacza przeciwobraz zbioru B w relacji $\mathcal{R}$, tzn.

$$\mathcal{R}^t(B) = \{x \in X : \exists y \in B : (x, y) \in \mathcal{R}\}.$$

Definicja 5. Relację $\mathcal{R} : X \longrightarrow X$ nazywamy relacją równoważności wtedy i tylko wtedy gdy jest

- (1) zwrotna, tzn. $\forall x \in X (x, x) \in \mathcal{R}$;
- (2) symetryczna, tzn. $\forall x, y \in X (x, y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (y, x) \in \mathcal{R}$;
- (3) przechodnia, tzn. $\forall x, y, z \in X (x, y) \in \mathcal{R} \text{ i } (y, z) \in \mathcal{R} \Rightarrow (x, z) \in \mathcal{R}$.

Definicja 6. Niech $\mathcal{R}$ będzie relacją równoważności. Zbiór

$$[x]_{\mathcal{R}} = \{x' : (x, x') \in \mathcal{R}\}.$$

nazywamy klasą równoważności (klasą abstrakcji) elementu x względem $\mathcal{R}$.

Fakt 1. Własności klas abstrakcji:

- (1) $\forall x \in X \ [x]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$;
- (2) $\forall x, x' \in X \ [x]_{\mathcal{R}} = [x']_{\mathcal{R}}$ albo $[x]_{\mathcal{R}} \cap [x']_{\mathcal{R}} = \emptyset$;
- (3) $\bigcup_{x \in X} [x]_{\mathcal{R}} = X$.

Definicja 7. Niech $\mathcal{R}$ będzie relacją równoważności. Zbiór klas równoważności względem $\mathcal{R}$ nazywamy przestrzenią ilorazową i oznaczamy $X/\mathcal{R}$

Przykład: W zbiorze $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ wprowadzamy relację

$$(m, n) \sim (m', n') \Leftrightarrow m + n' = n + m'$$

Łatwo sprawdzić, że jest to relacja równoważności. W przestrzeni ilorazowej wprowadzamy działania

$$[(m, n)] + [(m', n')] = [(m + m', n + n')], \quad [(m, n)] \cdot [(m', n')] = [(mn' + nm', nn' + mm')]$$

Sprawdzamy, że definicje są poprawne, tzn. że nie zależą od wyboru reprezentanta. Element $[(1, 1)]$ jest elementem neutralnym ze względu na dodawanie, a element $[(m, n)]$ jest przeciwny do $[(n, m)]$. Element $[(1, 2)]$ jest elementem neutralnym ze względu na mnożenie. Następnie sprawdzamy także, że odwzorowanie

$$\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim \ni [(m, n)] \longmapsto n - m \in \mathbb{Z}$$

zachowuje działania, tzn

$$\begin{aligned} \varphi([(m, n)] + [(m', n')]) &= \varphi([(m, n)]) + \varphi([(m', n')]) \\ \varphi([(m, n)] \cdot [(m', n')]) &= \varphi([(m, n)]) \cdot \varphi([(m', n')]). \end{aligned}$$

Odwzorowanie φ jest różnowartościowe, tzn. dwóm różnym klasom równoważności przypisuje różne liczby całkowite, ponadto każda liczba całkowita odpowiada pewnej klasie równoważności. W tej sytuacji mówimy że $\mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim$ jest izomorficzne z $\mathbb{Z}$.

Oprócz relacji równoważności drugą ważną klasą relacji są odwzorowania:

Definicja 8. Odwzorowaniem $F : X \rightarrow Y$ nazywamy relację taką, że

$$\forall x \in X \ \exists! y \in Y : (x, y) \in F,$$

w tej sytuacji piszemy $y = F(x)$.

Definicja 9. Odwzorowanie $F : X \rightarrow Y$ nazywamy injekcją wtedy i tylko wtedy, gdy jest różnowartościowe, tzn:

$$\forall x, x' \in X \ F(x) = F(x') \Rightarrow x = x'.$$

Definicja 10. Odwzorowanie $F : X \rightarrow Y$ nazywamy surjekcją wtedy i tylko wtedy, gdy jest "na", tzn:

$$\forall y \in Y \ \exists x \in X : F(x) = y.$$

Definicja 11. Odwzorowanie $F : X \rightarrow Y$ nazywamy bijekcją wtedy i tylko wtedy, gdy jest injekcją i surjekcją.