

Wykład 5.

Wykład 5. poświęcony jest omówieniu zagadnień związanych z pojęciem mocy zbioru i różnymi rodzajami nieskończoności.

Definicja 1. Zbiory X i Y nazywamy równolicznymi wtedy i tylko wtedy jeśli istnieje bijekcja między tymi zbiorami

Definicja 2. Zbiór X nazywamy nieskończonym jeśli jest równoliczny ze swoim właściwym podzbiorem. Zbiór, który nie jest nieskończony nazywamy skończonym.

Definicja 3. Zbiór X nazywamy przeliczalnym jeśli jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych. Zbiór nieskończony nazywamy nieprzeliczalnym jeśli nie jest równoliczny ze swoim podzbiorem.

Fakt 1. Zbiory $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{Z}$ są nieskończone, przeliczalne.

Definicja 4. Ciągiem o wartościach w zbiorze A nazywamy odwzorowanie $x : \mathbb{N} \rightarrow A$.

Dla ciągów obowiązuje nieco inna notacja niż dla pozostałych odwzorowań. Zamiast pisać $x(n)$ piszemy x_n . Samo zaś odwzorowanie x oznaczamy $(x_n)_{n=0}^\infty$ lub po prostu (x_n) .

Fakt 2. (Cantor) Zbiór wszystkich ciągów o wartościach w zbiorze $\{0, 1\}$ jest nieprzeliczalny.

Dowód: (Przekątniowy Cantora) Załóżmy, że zbiór ciągów o wartościach w $\{0, 1\}$ jest przeliczalny. Wówczas istnieje bijekcja φ , która każdej liczbie naturalnej przypisuje ciąg „zero-jedynkowy” i jej obrazem są wszystkie ciągi. Symbol $\varphi(k)_n$ oznacza n -ty wyraz ciągu będącego obrazem liczby k w odwzorowaniu φ . Konstruujemy teraz nowy ciąg x_n w następujący sposób:

$$x_n = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } \varphi(n)_n = 1 \\ 1 & \text{jeśli } \varphi(n)_n = 0 \end{cases}$$

Ciąg (x_n) różni się od każdego ciągu $(\varphi(k))$ na przynajmniej jednym miejscu, nie należy więc do obrazu φ . Jest to sprzeczne z założeniem o bijektywności φ . $\square$

Definicja 5. Funkcję charakterystyczną podzbioru $A \subset X$ nazywamy funkcję $\chi_A : A \rightarrow \{0, 1\}$, która przyjmuje wartość jeden dla elementów zbioru A i zero dla elementów zbioru $X \setminus A$.

Podzbiory X są w jednoznacznej odpowiedniości z funkcjami na X o wartościach w $\{0, 1\}$. Fakt (??) mówi więc, że zbiór podzbiorów zbioru liczb naturalnych jest nieprzeliczalny. Każdy ciąg o wartościach w $\{0, 1\}$ odpowiada jednoznacznie liczbie rzeczywistej z odcinka $]0, 1[$ (poprzez reprezentację dwójkową). Ponadto łatwo znaleźć bijekcję odcinka $]0, 1[$ i zbioru $\mathbb{R}$:

$$]0, 1[\ni t \longmapsto \operatorname{tg}(\pi(x - \frac{1}{2})) \in \mathbb{R}.$$

Prawdziwy zatem jest fakt:

Fakt 3. Zbiór liczb rzeczywistych jest nieprzeliczalny i równoliczny ze zbiorem podzbiorów liczb naturalnych.

Definicja 6. Moc zbioru liczb rzeczywistych nazywamy continuum. Moc zbioru liczb naturalnych oznaczamy $\aleph_0$ i nazywamy alef zero.

Twierdzenie 1. (Cantor-Bernstein-Schröder) Zbiór 2^X podzbiorów zbioru X jest istotnie większy niż X , tzn istnieje iniekcja $X \rightarrow 2^X$, ale nie istnieje bijekcja.

Dowód: Poniższy dowód jest uogólnieniem dowodu przekątniowego Cantora. Przykładem iniekcji zbioru X w zbiór podzbiorów jest $X \ni x \mapsto \{x\} \in 2^X$. W dalszym ciągu skorzystamy z odpowiedniości między podzbiarami a funkcjami charakterystycznymi. Załóżmy, że istnieje bijekcja między elementami X a podzbiarami X . Oznaczmy ją φ . Funkcję charakterystyczną podzbioru $\varphi(x)$ oznaczać będziemy $\chi_{\varphi(x)}$. Konstruujemy pewną funkcję χ określoną na X o wartościach w $\{0, 1\}$:

$$X \ni x \longmapsto \chi(x) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } \chi_{\varphi(x)}(x) = 1 \\ 1 & \text{jeśli } \chi_{\varphi(x)}(x) = 0 \end{cases}.$$

Funkcja χ różni się od każdej funkcji $\chi_{\varphi(x)}$ w przynajmniej jednym punkcie. Oznacza to, że podzbiór definiowany przez χ nie należy do obrazu φ . Jest to sprzeczne z bijektywnością φ . $\square$