Wykład 6.

Zakończyliśmy materiał wstępny i przechodzimy teraz do analizy właściwej. Zaczynamy od ciągów o wartościach rzeczywistych. Definicja ciągu pojawiła się na poprzednim wykładzie, powtarzamy ją teraz dla kompletności materiałów tego wykładu.

Definicja 1. *Ciągiem o wartościach w zbiorze A nazywamy odwzorowanie $x : \mathbb{N} \to A$.*

Dla ciągów obowiązuje nieco inna notacja niż dla pozostałych odwzorowań. Zamiast pisać $x(n)$ piszemy x_n. Samo zaś odwzorowanie x oznaczamy $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ lub po prostu (x_n). W dalszym ciągu rozważać będziemy ciągi o wartościach rzeczywistych.

Definicja 2. *Ciąg (x_n) nazywamy zbieżnym w $\mathbb{R}$ jeśli istnieje liczba rzeczywista g taka, że*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, N \in \mathbb{N} : \ \forall\, n > N \ \ |x_n - g| < \varepsilon$$

Piszemy

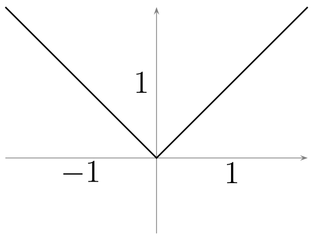
$$g = \lim_{n\to\infty} x_n$$

Fakt 1. *Ciąg zbieżny ma dokładnie jedną granicę, tzn. jeśli g i g' są granicami ciągu x_n to $g = g'$.*

Definicja 3. *Wartością bezwzględną liczby rzeczywistej x nazywamy*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geqslant 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Wykres:



Funkcja $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto |x - y|$ jest przykładem funkcji zwanych odległościami albo metrykami. Funkcja $d : X \times X \to \mathbb{R}$ jest odległością na X, jeśli spełnia poniższe warunki:

(1) $d(x, y) \geqslant 0$;
(2) $d(x, y) = d(y, x)$;
(3) $d(x, y) = 0 \ \Leftrightarrow \ y = x$;
(4) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$

Ostatni warunek nazywany jest nierównością trójkąta. Funkcja $\mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto |x - y|$ spełnia nierówność trójkąta. Ponadto, biorąc $z = 0$ dostajemy

$$|x - y| \leqslant |x| + |y| \quad \text{oraz} \quad |x + y| = |x - (-y)| \leqslant |x| + |-y| = |x| + |y|.$$

Fakt 2. *Liczba g jest granicą ciągu (x_n) wtedy i tylko wtedy, kiedy w każdym odcinku otwartym zawierającym g są prawie wszystkie wyrazy ciągu (x_n).*

„Prawie wszystkie” oznacza „wszystkie poza (być może) skończoną liczbą”.

Fakt 3. *Zbiór wyrazów ciągu zbieżnego jest ograniczony.*

Fakt 4. *Operacje na ciągach zbieżnych: niech $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $y_0 = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$*

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x_0 + y_0$;
(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (c x_n) = c x_0$ *dla* $c \in \mathbb{R}$;
(3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = x_0 y_0$;
(4) *jeśli dla wszystkich n $x_n \neq 0$ i $x_0 \neq 0$ to* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_n}{x_n} = \dfrac{y_0}{x_0}$;

(5) *jeśli dla wystarczająco dużych n* $x_n \leqslant c$ *to* $x_0 \leqslant c$ *dla* $c \in \mathbb{R}$, *ponadto jeśli nawet nierówność* $x_n < c$ *jest ostra, to nierówność dla granicy musi być nieostra;*

(6) *jeśli dla wystarczająco dużych n* $x_n \leqslant y_n$ *to* $x_0 \leqslant y_0$, *ponadto przechodzenie do granicy „łagodzi" nierówność, tzn. jeśli* $x_n < y_n$ *to także* $x_0 \leqslant y_0$.

Twierdzenie 1. *(O trzech ciągach) Jeśli* (x_n), (y_n), (a_n) *będą ciągami takimi, że*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = \alpha$$

oraz istnieje $N \in \mathbb{N}$ *takie, że dla wszystkich* $n > N$ *zachodzi*

$$x_n \leqslant a_n \leqslant y_n$$

to

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha.$$

Definicja 4. *Ciąg* x_n *nazywamy rosnącym jeśli dla wszystkich n zachodzi* $x_{n+1} \geqslant x_n$. *Jeśli nierówność jest ostra to ciąg nazywamy ściśle rosnącym. Ciąg* x_n *nazywamy malejącym jeśli dla wszystkich n zachodzi* $x_{n+1} \leqslant x_n$. *Jeśli nierówność jest ostra to ciąg nazywamy ściśle malejącym. Ciągi rosnące i ciągi malejące określamy wspólnie jako monotoniczne.*

Twierdzenie 2. *(O ciągach monotonicznych i ograniczonych) Jeśli ciąg* (x_n) *jest od pewnego miejsca rosnący i ograniczony z góry to jest zbieżny. Jeśli ciąg* (x_n) *jest od pewnego miejsca malejący i ograniczony z dołu to jest zbieżny.*

Przykładowe ciągi:

Ćwiczenie: Zbadać zbieżność i znaleźć granicę ciągu $x_n = \sqrt[n]{n}$. Funkcja $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ jest rosnąca, zatem z nierówności $1 \leqslant n$ wynika $1 = \sqrt[n]{1} \leqslant \sqrt[n]{n}$. Oznaczmy $y_n = x_n - 1$, wtedy $y_m \geqslant 0$. Mamy więc dla $n > 2$:

$$n = x_n^n = (1+y_n)^n = 1 + ny_n + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} y_n^2 + \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} y_n^3 + \cdots$$

Z powyższego rozwinięcia bierzemy tylko trzeci wyraz:

$$n \geqslant \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} y_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} y_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} y_n^2$$

Co po przekształceniach daje

$$y_n \leqslant \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Ostatecznie dla ciągu x_n i $n > 2$ mamy nierówność:

$$1 \leqslant x_n \leqslant 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Z twierdzenia o trzech ciągach wynika więc $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Ćwiczenie: Zbadać zbieżność i znaleźć granicę ciągu $a_n = \sqrt[n]{a}$ dla $a > 0$. Zaczynamy od $a > 1$. Mamy wtedy $a_n > 1$ i dla wystarczająco dużych n

$$a < n \quad \text{zatem także} \quad a_n = \sqrt[n]{a} \leqslant \sqrt[n]{n}$$

i z twierdzenia o trzech ciągach dostajemy

$$1 \leqslant a_n \leqslant \sqrt[n]{n} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

Jeśli $a < 1$ to $\frac{1}{a} > 1$ i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1$$

Zatem także

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

Ćwiczenie: Zbadać zbieżność i znaleźć granicę ciągu $e_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Pokażemy najpierw, że ciąg $e_n(x)$ jest rosnący. W tym celu oszacujemy $\frac{e_{n+1}(x)}{e_n(x)}$.

$$\begin{aligned}\frac{e_{n+1}(x)}{e_n(x)} &= \frac{(1+\frac{x}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{x}{n})^n} = (1+\frac{x}{n})\left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1} = (1+\frac{x}{n})\left(\frac{1+\frac{x}{n}+\frac{x}{n+1}-\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1} \\ &= (1+\frac{x}{n})\left(1-\frac{\frac{x}{n(n+1)}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

Skorzystamy teraz z *nierówności Bernoulliego*. Obowiązuje ona dla wystarczająco dużych n (ułamek w nawiasie musi być większy od -1):

$$\geqslant (1+\frac{x}{n})\left(1-(n+1)\frac{\frac{x}{n(n+1)}}{1+\frac{x}{n}}\right) = 1+\frac{x}{n}-\frac{x}{n} = 1.$$

Okazuje się więc, że dla wystarczająco dużych n

$$\frac{e_{n+1}(x)}{e_n(x)} \geqslant 1 \qquad \text{a więc} \qquad e_{n+1}(x) \geqslant e_n(x).$$

Pokażemy teraz, że $e_n(x)$ jest ograniczony z góry. W tym celu oszacujemy iloczyn $e_n(x)e_n(-x)$:

$$e_n(x)e_n(-x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n \leqslant 1,$$

zatem

$$e_n(x) \leqslant \frac{1}{e_n(-x)}. \tag{1}$$

Pamiętamy, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ $e_n(x)$ jest rosnący od pewnego miejsca, zatem $e_n(-x)$ też jest rosnący. Jego odwrotność $1/e_n(-x)$ jest więc ciągiem malejącym. Nierówność (1) daje więc ograniczenie górne dla prawie wszystkich wyrazów ciągu $e_n(x)$. Ciąg rosnący od pewnego miejsca i ograniczony z góry jest zbieżny. Granicę tego ciągu będziemy oznaczać $e(x)$. Wartość $e(1)$ oznaczana jest symbolem e i nazywana *podstawą logarytmów naturalnych.* e jest liczbą niewymierną. Jej wartość w przybliżeniu to $e \simeq 2,7182818284590\ldots$.