Wykład 7.

Matematyka 2, semestr letni 2010/2011

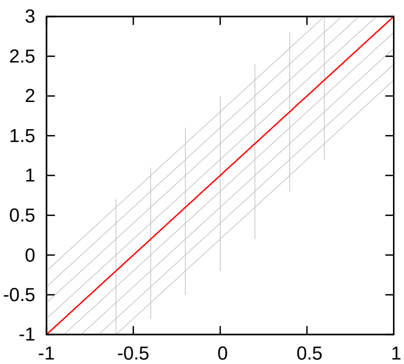
Powierzchnią wymiaru k zanurzoną w $\mathbb{R}^n$ $(k < n)$ nazywamy podzbiór $S \subset \mathbb{R}^n$ mający następującą własność: dla każdego punktu $p \in S$ istnieje otoczenie $\mathcal{O}$ punktu p w $\mathbb{R}^n$ oraz układ współrzędnych Φ w $\mathcal{O}$ taki, że zbiór $\mathcal{O} \cap S$ opisany jest warunkiem znikania $n-k$ ostatnich współrzędnych związanych z układem współrzędnych Φ. Mówiąc *układ współrzędnych* mam na myśli odwzorowanie

$$\Phi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{O}.$$

spełniające założenia twierdzenia o lokalnej odwracalności na całym $\mathcal{V}$. Oznacza to, że odwzorowanie Φ jest bijekcją $\mathcal{V}$ i $\mathcal{O}$, jest różniczkowalne i jego odwrotność też jest różniczkowalna. Przyjrzyjmy się konkretnym przykładom powierzchni. Zaczynamy od powierzchni jednowymiarowych w $\mathbb{R}^2$:

Przykład 1. Najprostszym przykładem powierzchni jednowymiarowej w $\mathbb{R}^2$ jest prosta:

$$L = \{(x, y) : \ y = 2x + 1\}.$$



Żeby pokazać, że jest to powierzchnia musimy wprowadzić w otoczeniu każdego punktu układ współrzędnych taki, żeby prosta L zadana była warunkiem znikania drugiej współrzędnej. Ze względu na szczególnie nieskomplikowaną powierzchnnię układ współrzędnych może być globalny, tzn zdefiniowany na całym $\mathbb{R}^2$ a nie tylko w otoczeniu jednego punktu. Istnieje wiele odpowiednich układów współrzędnych. Siatka współrzędnych związana z jednym z nich zaznaczona jest na rysunku. Nowe współrzędne punktu $p = (x, y)$ oznaczymy (ξ, η). Współrzędna ξ jest identyczna z x. Współrzędną η punktu p obliczymy znajdując punkt przecięcia prostej równoległej do L i przechodzącej przez p z osią pionową. Wartości przesuniemy tak, aby 0 odpowiadało właśnie prostej L. Takie określenie układu współrzędnych prowadzi do wzorów:

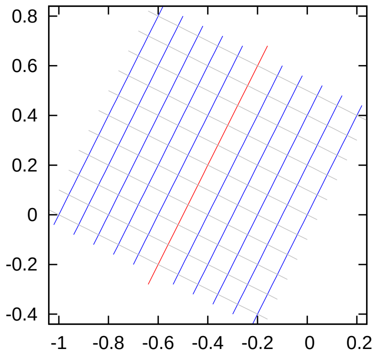
$$\begin{cases} \xi = x \\ \eta = y - 2x - 1 \end{cases}$$

Odwzorowanie odwrotne (które zazwyczaj kojarzymy z nazwą „układ współrzędnych”) ma postać

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \ni (\xi, \eta) \longmapsto (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{cases} x = \xi \\ y = y + 2\xi + 1 \end{cases}$$

Możliwy jest także inny układ współrzędnych. Jeśli zażądamy, aby druga współrzędna zmieniała się wzdłuż prostych prostopadłych do L otrzymamy



Odpowiednie odwzorowanie $\Psi : (s,t) \longmapsto (x(s,t), y(s,t))$ zapisuje się wzorami:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{5}s - \frac{2}{5}t + \frac{2}{5} \\ y = \frac{2}{5}s + \frac{1}{5}t + \frac{1}{5} \end{cases}$$

i odwrotne

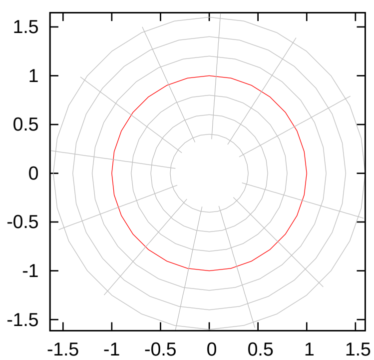
$$\begin{cases} s = 2y + x \\ t = y - 2x - 1 \end{cases}$$

♣

Przykład 2. Drugi standardowy przykład to okrąg:

$$S = \{(x,y) : \ x^2 + y^2 = 1\}.$$

W tym przypadku najłatwiej użyć biegunowego układu współrzędnych:



Wzory są nam znane od dawna. Żeby zachować warunek „druga współrzędna równa zero" musimy zmienić kolejność współrzędnych i przesunąć wartości r:

$$\Phi_1(\varphi, r) = (x(\varphi, r), y(\varphi, r)), \quad \varphi \in]0, 2\pi[, \quad r \in]-1, 1[$$

$$\begin{cases} x = (r+1)\cos\varphi \\ y = (r+1)\sin\varphi \end{cases}$$

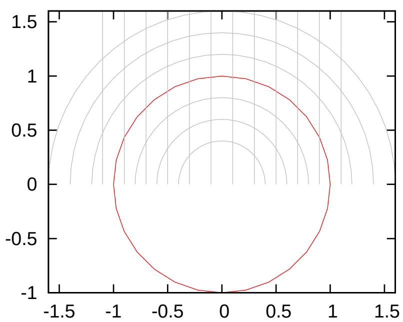
Tym razem odwrotnego odwzorowania nie napiszemy tak łatwo. Ponadto nie wystarcza jeden układ współrzędnych. Ten przedstawiony powyżej jest dobry dla każdego punktu oprócz punktu $(1, 0)$ (we współrzędnych kartezjańskich). W otoczeniu $(1, 0)$ możemy wziąć odwzorowanie zadane tymi samymi wzorami, ale określone na innej dziedzinie:

$$\Phi_2(\varphi, r) = (x(\varphi, r), y(\varphi, r)), \quad \varphi \in]-\pi, \pi[, \;\; r \in]-1, 1[.$$

Dla okręgu także można wybierać inne układy współrzędnych. Na przykład taki:

$$\begin{cases} \xi = x \\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2} - 1 \end{cases}$$

określony w otoczeniu części okręgu położonego w górnej półpłaszczyźnie:

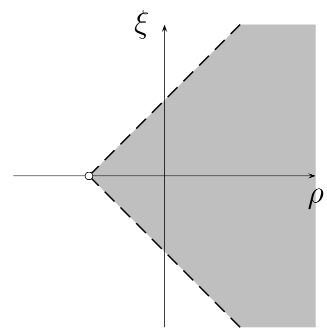


Odwzorowanie odwrotne

$$\begin{cases} x = \xi \\ y = \sqrt{(\rho + 1)^2 - \xi^2} \end{cases}$$

określone jest w obszarze

$$\mathcal{V} = \{(\xi, \rho) : \quad \rho > -1, -\rho - 1 < \xi < \rho + 1\}$$



Do opisania całego okręgu potrzebujemy czterech takich układów współrzędnych. ♣

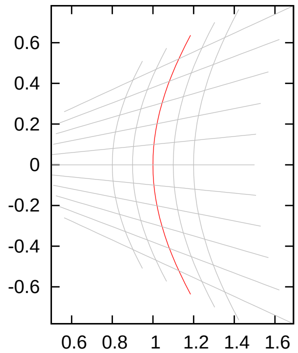
Przykład 3. Kolejnym przykładem niech będzie krzywa zadana równaniem

$$x^2 - y^2 = 1$$

dla $x > 0$. Krzywa ta to hiperbola. Odpowiedni układ współrzędnych znaleźć można korzystając z funkcji hiperbolicznych:

$$\begin{cases} x = (r+1)\cosh(u) \\ y = (r+1)\sinh(u) \end{cases}$$

Współrzędna r należy do półprostej $]-1,\infty[$, zaś współrzędna u może przyjmować dowolne wartości rzeczywiste. Obrazem $]-1,\infty[\times\mathbb{R}$ w tym odwzorowaniu jest obszar pod prostą $y = x$, nad prostą $y = -x$ i dla $x > 0$.

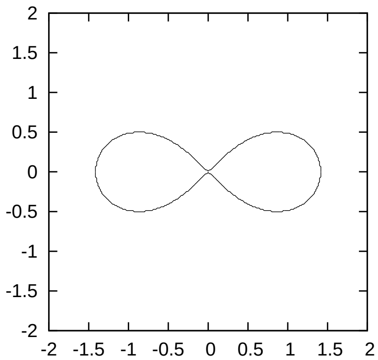


♣

Przykład 4. Powierzchnią nie jest tzw. *lemniskata Bernoulliego* zadana równaniem

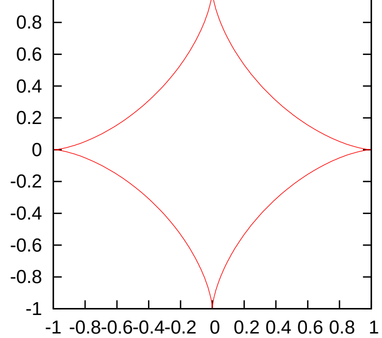
$$(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$$

Problemy są w otoczeniu punktu $(0,0)$. Samoprzecięcia nie są dozwolone.



♣

Przykład 5. Powierzchnią nie jest też. *hipocykloida* Problemy są w otoczeniu punktów $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$. Nie są dozwolone także dzióbki:

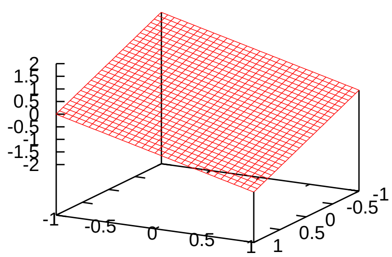


♣

Przejdźmy teraz do przykładów w $\mathbb{R}^3$:

Przykład 6. Powierzchnią dwuwymiarową (najprostszą) jest płaszczyzna. Weźmy płaszczyznę o równaniu

$$x + y + z = 0$$



Układ współrzędnych konstruujemy korzystając z algebry liniowej. Nasza płaszczyzna jest jednocześnie podprzestrzenią wektorową. Bazą tej podprzestrzeni są na przykład wektory

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Do bazy w $\mathbb{R}^3$ uzupełnimy je dodając wektor prostopadły

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Układ współrzędnych (α, β, γ) związany jest z współrzędnymi kartezjańskimi równaniem:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

czyli

$$\begin{cases} x = \alpha + \gamma \\ y = \beta + \gamma \\ z = -\alpha - \beta + \gamma \end{cases}$$

♣

Zastanówmy się teraz jak można opisywać powierzchnię. We wszystkich powyższych przykładach powierzchnia opisana była równaniem, czyli przedstawiona jako poziomica zerowa jakiejś funkcji. O tym jakie warunki powinna spełniać funkcja, żeby jej poziomica zerowa była powierzchnią mówi twierdzenie o maksymalnym rzędzie:

Twierdzenie 1 (O maksymalnym rzędzie)**.** *Niech $F : \mathbb{R}^n \supset \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $m < n$ będzie odwzorowaniem różniczkowalnym. Niech także $S = F^{-1}(0, \dots, 0)$ będzie zawarte w $\mathcal{O}$. Wówczas jeśli w każdym punkcie x pochodna $F'(x)$ ma maksymalny rząd (czyli równy m) to S jest powierzchnią w $\mathbb{R}^n$ wymiaru $k = n - m$.*

Powierzchnię można także zadawać poprzez parametryzację, tzn obraz odwzorowania

$$\Psi : \mathbb{R}^k \supset \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Okrąg o promieniu 1 można sparametryzować następująco

$$\Psi :]0, 2\pi[\ni \varphi \longmapsto (\cos\varphi, \sin\varphi) \in \mathbb{R}^2.$$

Obrazem tej parametryzacji jest okrąg bez jednego punktu. Zazwyczaj nie da się sparametryzować całej powierzchni za pomocą jednego odwzorowania. Parametryzacja musi także spełniać pewne warunki. Musi to być różniczkowalna injekcja, której pochodna w każdym punkcie ma maksymalny rząd. Oto stosowne twierdzenie:

Twierdzenie 2. *Niech $\Psi : \mathbb{R}^k \supset \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $k < n$ będzie odwzorowaniem różniczkowalnym. Wówczas jeśli $p \in \mathcal{V}$ i $\Psi'(p)$ jest rzędu k to istnieje otoczenie $\mathcal{O}$ punktu p takie, że $\Psi(O)$ jest powierzchnią k-wymiarową w $\mathbb{R}^n$.*

Twierdzenie dotyczące parametryzacji jest jedynie lokalne, dlatego oprócz rzędu odwzorowania należy sprawdzać także injektywność.

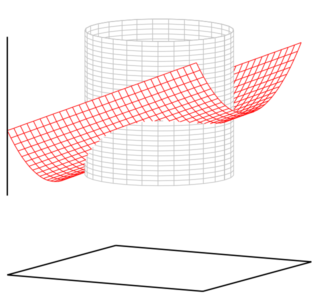
W dalszym ciągu zajmować się będziemy raczej powierzchniami zadawanymi jako poziomice zerowe. Interesować nas będą obcięcia funkcji do powierzchni. Niech S będzie okręgiem o promieniu 1 w $\mathbb{R}^2$. Niech także

$$f(x, y) = x + y^2$$

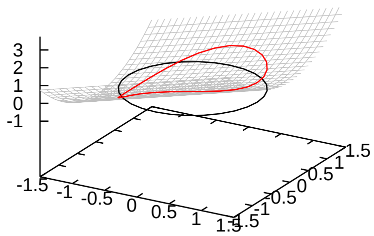
będzie funkcją na $\mathbb{R}^2$. Funkcja ta jest różniczkowalna na całym $\mathbb{R}^2$. Jej pochodna w punkcie (x, y) jest macierzą jednowierszową

$$f'(x, y) = [1 \quad 2y].$$

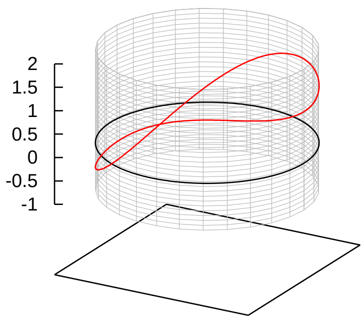
Pierwszy wyraz tej macierzy jest niezależny od punktu i równy 1, zatem funkcja ta nie ma punktów krytycznych w $\mathbb{R}^2$. Rozpatrzmy teraz obcięcie tej funkcji do okręgu S. Żeby zrozumieć o co chodzi przyjrzyjmy się rysunkom:



Na czerwono zaznaczono wykres funkcji f. Szary walec narysowany jest nad okręgiem S. Przecięcie tych dwóch powierzchni ilustruje obcięcie f do S. Zamiast walca rysujemy teraz (na czerwono) krzywą będącą przecięciem walca i wykresu funkcji oraz (na czarno) okrąg S na płaszczyźnie $z = 0$:



Być może lepiej będzie widać, jeśli zamiast wykresu f zaznaczymy na rysunku walec:



Funkcja f obcięta do S przyjmuje wartości jedynie z pewnego odcinka. Z wykresów widać, że ma ona punkty krytyczne. Naszym zadaniem będzie znalezienie tych punktów. Jeden sposób poszukiwania punktów krytycznych jest łatwo wymyśleć. Jeśli sparametryzujemy okrąg S (na przykład kątem biegunowym) i złożymy funkcję f z parametryzacją otrzymamy funkcję jednej zmiennej rzeczywistej, określoną na odcinku, którą można badać zwykłymi metodami. Pamiętać musimy jednak, że parametryzacja nie obejmuje całego okręgu. W tym szczególnym przypadku można sobie łatwo poradzić z tym problemem. W ogólności jednak znalezienie parametryzacji dla powierzchni bywa kłopotliwe. Poszukamy zatem innej metody znalezienia punktów krytycznych: takiej, która wykorzystywałaby raczej funkcję, za pomocą której powierzchnia zadawana jest jako poziomica zerowa. W przypadku okregu będzie to funkcja

$$G(x, y) = x^2 + y^2 + 1.$$

Punkt krytyczny jest, jak zwykle, punktem w którym pochodna znika, jednak teraz interesuje nas jedynie wartość pochodnej na wektorach (przyrostach) stycznych do powierzchni. Na wektorach w innych kierunkach pochodna może sobie być jakakolwiek. Skoro powierzchnia S jest poziomicą zerową funkcji G, to oczywiście pochodna funkcji G znika na wektorach stycznych do powierzchni, ponieważ wzdłuż powerzchni funkcja się nie zmienia: pozostaje równa zero. Wektory styczne do powierzchni można wręcz zdefiniować w taki sposób: Wektor h zaczepiony w $(x_0, y_0) \in S$ jest *styczny* do S jeśli $G'(x_0, y_0)(h) = 0$. Jeśli więc pochodna funkcji f byłaby w punkcie (x, y) proporcjonalna do $G'(x, y)$, to wiadomo byłoby, że pochodna ta znika na wektorach stycznych w tym punkcie. **Punkt $(x, y) \in S$ jest więc punktem krytycznym funkcji f na powierzchni S jeśli istnieje liczba λ taka, że**

$$f'(x, y) = \lambda G'(x, y).$$

Liczba λ nazywana jest *mnożnikiem Lagrange'a.* W powyższym rozumowaniu myśleliśmy cały czas o konkretnej funkcji f obciętej do konkretnej powierzchni S. Wnioski do których doszliśmy mają jednak charakter ogólny. Sformułujmy je w postaci twierdzenia:

Twierdzenie 3 (Lagrange)**.** *Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną a $S = G^{-1}(0)$ powierzchnią wymiaru $n-1$. Jeśli $p \in S$ jest punktem krytycznym funkcji f na powierzchni S to istnieje taka liczba rzeczywista λ, że*

$$f'(p) = \lambda G'(p).$$

Znajdźmy punkty krytyczne w naszym przykładzie. Mamy

$$f(x, y) = x + y^2, \qquad G(x, y) = x^2 + y^2 - 1,$$

zatem

$$f'(x, y) = [1 \quad 2y], \qquad G'(x, y) = [2x \quad 2y].$$

Punkt (x, y) jest więc punktem krytycznym f na S jeśli

$$[1 \quad 2y] = \lambda[2x \quad 2y], \qquad G(x, y) = 0.$$

W postaci układu równań warunki te zapisujemy jako:

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 2y = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

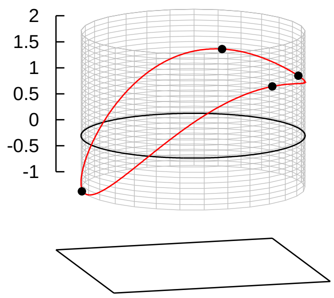
Drugie równanie oznacza, że

$$y(1 - \lambda) = 0, \quad \text{czyli} \quad y = 0 \ \text{ lub } \ \lambda = 1.$$

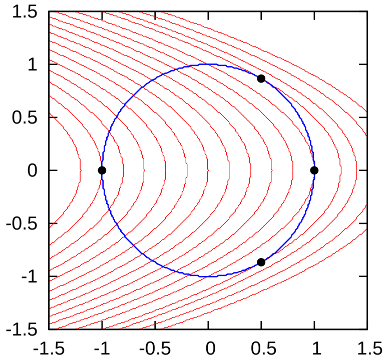
Gdy $y = 0$ współrzędna x musi być równa 1 lub -1. Wtedy otrzymujemy λ odpowiednio $+\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$. Gdy zaś $\lambda = 1$ to $x = \frac{1}{2}$ i współrzędna y może przyjąć wartość $+\frac{\sqrt{3}}{2}$ lub $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ostatecznie mamy cztery punkty krytyczne:

$$\begin{aligned} &(1, 0), && \lambda = \frac{1}{2}, \\ &(-1, 0), && \lambda = -\frac{1}{2}, \\ &(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), && \lambda = 1, \\ &(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}), && \lambda = 1. \end{aligned}$$

Zaznaczmy je na rysunku:



Drugi rysunek pokazuje, że punkty krytyczne obcięcia f do powierzchni S są tymi punktami, w których poziomice funkcji f są styczne do powierzchni S. Poziomice narysowane są na czerwono, a powierzchnia na niebiesko:



Z rysunków wynika, że punkty $(-1, 0)$ i $(0, 1)$ to minima a punkty $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ i $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ to maksima. W ogólności musimy jednak znaleźć metodę badania rodzaju punktów krytycznych w przypadku gdy badamy funkcję obciętą do powierzchni.

Rachunek prowadzący do wzoru na pochodną funkcji obciętej do powierzchni jest dość skomplikowany. Zamieszczam go poniżej w dowodzie odpowiedniego twierdzenia. Dla celów praktycznych należy niestety zapamiętać wzór. Jeśli $p \in S$ jest punktem krytycznym funkcji f na S oraz h jest wektorem stycznym do s w punkcie p to forma kwadratowa reprezentująca drugą pochodną obcięcia funkcji f do S ma na h wartość

$$(f_{|S})''(p)(h) = f''(p)(h) - \lambda G''(p)(h),$$

gdzie λ jest wartością mnożnika Lagrange'a odpowiadającą punktowi krytycznemu p. Zbadamy określoność tej formy dla jednego z punktów krytycznych w naszym przykładzie. Wybierzmy punkt $p = (1, 0)$ z $\lambda = \frac{1}{2}$. Wyznaczamy macierz drugiej pochodnej funkcji f:

$$f''(p) = \begin{bmatrix} f_{xx}(p) & f_{xy}(p) \\ f_{xy}(p) & f_{yy}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczamy także drugą pochodną G w punkcie p:

$$G''(p) = \begin{bmatrix} G_{xx}(p) & G_{xy}(p) \\ G_{xy}(p) & G_{yy}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Macierz, którą mamy badać ma postać (bierzemy $\lambda = \frac{1}{2}$):

$$f''(p) - \lambda G''(p) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Określoność tej macierzy badamy jedynie na wektorach stycznych do powierzchni w punkcie $p = (1,0)$. Pochodna G w $p = (1,0)$ ma postać

$$G'(1,0) = [2x \quad 2y]_{|(1,0)} = [2 \;\; 0]$$

Wektory styczne do S w punkcie $(1,0)$ spełniają warunek

$$G'(1,0)(h) = 0, \quad [2 \;\; 0]\begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix} = 2h_x = 0, \quad h_x = 0$$

Przestrzeń wektorów stycznych do okręgu S w punkcie $(1,0)$ rozpięta jest przez wektor

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Obliczmy wartość formy $f''(p) - \lambda G''(p)$ na dowolnym wektorze proporcjonalnym do bazowego:

$$[0 \;\; \alpha]\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha^2$$

Wartość drugiej pochodnej obcięcia na dowolnym wektorze stycznym do powierzchni jest dodatnia. Mamy więc do czynienia z minimum.

Zapiszmy jeszcze ogólne twierdzenie dotyczące warości drugiej pochodne obcięcia wraz z dowodem. Znajomość dowodu nie jest obowiązkowa, choć oczywiście wszystkich zachęcam do przeanalizowania rachunku.

Twierdzenie 4. *Przy założeniach twierdzenia Lagrange'a o punkcie krytycznym wartość drugiej pochodnej obcięcia f do powierzchni S w punkcie krytycznym na wektorach stycznych do S w tym punkcie wyraża się wzorem*

$$(f_{|S})''(p)(h) = f''(p)(h) - \lambda G''(p)(h).$$

Dowód: (materiał nieobowiązkowy) Oznaczmy przez p punkt krytyczny obcięcia $f_{|S}$. Niech także $\Phi : \mathbb{R}^{n-1} \supset \mathcal{V} \to \mathbb{R}^n$ oznacza parametryzację otoczenia punktu p w S. Załóżmy, że parametryzacja została tak wybrana, że $\Phi(0) = p$. Pisząc 0 mam na myśli punkt zerowy w $\mathbb{R}^{n-1}$, czyli $(0,0,\ldots,0)$. Jeśli p jest punktem krytycznym $f_{|S}$ to 0 jest punktem krytycznym $f \circ \Phi$. Obliczmy drugą pochodną złożenia $f \circ \Phi$ w otoczeniu punktu 0. Element $\mathcal{V}$ z tego otoczenia oznaczymy y. Dla wektora przyrostu v zaczepionego w y mamy

$$f \circ \Phi'(y)(v) = f'(\Phi(y))\,(\Phi'(y)(v))$$

Drugą pochodną w 0 znajdziemy różniczkując powyższy wzór (traktując prawą stronę jako funkcję punktu y). Drugi przyrost oznaczymy u, różniczkujemy w $y = 0$:

(1) $$(f \circ \Phi)''(0)(v,u) = f''(\Phi(0))\,(\Phi'(0)(v), \Phi'(0)(u)) + f'(\Phi(0))(\Phi''(0)(v,u))$$

Jeśli obrazy przyrostów v i u w R^{n-1} oznaczymy odpowiednio h i k (tzn. h i k są wektorami stycznymi do S w punkcie p) to pierwszy składnik powyższego wzoru ma postać

(2) $$f''(\Phi(0))\,(\Phi'(0)(v), \Phi'(0)(u)) = f''(p)(h,k).$$

Drugi składnik przekształcimy korzystając z tego, że punkt p jest punktem krytycznym. Funkcja $G\circ\Phi : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ jest funkcją stałą równą zero, gdyż G definiuje S. Jasne jest więc, że $(G\circ\Phi)''(0) = 0$. Drugą pochodną złożenia $G\circ\Phi$ obliczyć można według tych samych zasad co dla f, tyle, że teraz wynik musi być zero:

$$(G\circ\Phi)''(0)(v,u) = G''(\Phi(0))\,(\Phi'(0)(v), \Phi'(0)(u)) + G'(\Phi(0))(\Phi''(0)(v,u)) = 0.$$

Oznacza to, że

$$G''(\Phi(0))(\Phi'(0)(v), \Phi'(0)(u)) = -G'(\Phi(0))(\Phi''(0)(v,u)).$$

Oznaczając, jak poprzednio, $\Phi'(0)(v) = h$, $\Phi'(0)(u) = k$ i $\Phi(0) = p$ dostajemy

$$G''(p)(h,k) = -G'(p)(\Phi''(0)(v,u)).$$

Mnożąc obie strony powyższego równania przez λ i pamiętając, że w punkcie krytycznym p zachodzi

$$f'(p) = \lambda G'(p)$$

otrzymujemy

$$\lambda G''(p)(h,k) = -f'(p)(\Phi''(0)(v,u)),$$

czyli

$$f'(p)(\Phi''(0)(v,u)) = -\lambda G''(p)(h,k) \tag{3}$$

Wstawiając (3) i (2) do (1) otrzymujemy

$$(f\circ\Phi)''(0)(v,u) = f''(\Phi(0))(\Phi'(y)(v), \Phi'(y)(u)) + f'(\Phi(0))(\Phi''(0)(v,u)) =$$
$$= f''(p)(h,k) - \lambda G''(p)(h,k).$$

Druga pochodna złożenia $f\circ\Phi$ w punkcie p jest drugą pochodną $f_{|S}$ w tym punkcie. Wstawiając dwa razy ten sam przyrost otrzymujemy formę kwadratową o którą chodziło w twierdzeniu. $\square$.

Rachunek przeprowadzony w dowodzie powyższego twierdzenia jest w ogólności skomplikowany. Słuchaczy, którzy nie chcą poprzestawć na zapamiętywaniu wzorów zachęcam do wykonania go w najprostszym przypadku funkcji określonej na $\mathbb{R}^2$ obciętej do jednowymiarowej powierzchni. Możemy myśleć tutaj o naszej funkcji f, powierzchni będącej okręgiem. Jako parametryzacji możemy użyć parametryzacji okręgu kątem biegunowym. Policzmy jak w dowodzie drugą pochodną złożenia $f\circ\Phi$:

$$f\circ\Phi(\varphi) = f(x(\varphi), y(\varphi))$$

W poniższym rachunku opuszczamy argumenty funkcji pamiętając jednak, że f zależy od φ poprzez x i y:

$$(f\circ\Phi)'' = (f_x x_\varphi + f_y y_\varphi)' = (f_{xx}x_\varphi + f_{xy}y_\varphi)x_\varphi + f_x x_{\varphi\varphi} + (f_{yx}x_\varphi + f_{yy}y_\varphi)y_\varphi + f_y y_{\varphi\varphi}.$$

Pogrupujmy inaczej wyrazy:

$$(f\circ\Phi)'' = (f_x x_\varphi + f_y y_\varphi)' = (f_{xx}x_\varphi + f_{xy}y_\varphi)x_\varphi + (f_{yx}x_\varphi + f_{yy}y_\varphi)y_\varphi + f_x x_{\varphi\varphi} + f_y y_{\varphi\varphi}.$$

Część czerwona jest to druga pochodna funkcji f działająca na wektor styczny do powierzchni otrzymany z przyrostu $\delta h = 1$:

$$\Phi'(\varphi)\delta h = \begin{bmatrix} x_\varphi \\ y_\varphi \end{bmatrix}\delta h = \begin{bmatrix} x_\varphi \delta h \\ y_\varphi \delta h \end{bmatrix}.$$

Inaczej zapiszemy więc część czerwoną jako

$$[h_x \;\; h_y]\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix}$$

pamiętając, że wektor przyrostu musi być styczny do powierzchni. Część niebieską zastąpimy wyrażeniem zawierającym G. Rachunek taki sam jak dla f moglibyśmy wykonać dla G, tyle, że druga pochodna wzdłuż powierzchni jest zawsze zero, bo funkcja G na powierzchni jest stała:

$$(G \circ \Phi)'' = (G_{xx}x_\varphi + G_{xy}y_\varphi)x_\varphi + (G_{yx}x_\varphi + G_{yy}y_\varphi)y_\varphi + G_x x_{\varphi\varphi} + G_y y_{\varphi\varphi} = 0$$

Przenosząc wyrażenia zawierające pierwszą pochodną G na drugą stronę dostajemy

$$(G_{xx}x_\varphi + G_{xy}y_\varphi)x_\varphi + (G_{yx}x_\varphi + G_{yy}y_\varphi)y_\varphi = -G_x x_{\varphi\varphi} - G_y y_{\varphi\varphi}$$

Wiadomo, że w punkcie krytycznym $f_x = \lambda G_x$ i $f_y = \lambda G_y$, dlatego po pomnożeniu obu stron powyższego równania przez λ możemy dokonać podstawienia:

$$\lambda\left[(G_{xx}x_\varphi + G_{xy}y_\varphi)x_\varphi + (G_{yx}x_\varphi + G_{yy}y_\varphi)y_\varphi\right] = -\lambda G_x x_{\varphi\varphi} - \lambda G_y y_{\varphi\varphi} = -f_x x_{\varphi\varphi} - f_y y_{\varphi\varphi}.$$

Otrzymaliśmy wyrażenie na część niebieską

$$f_x x_{\varphi\varphi} + f_y y_{\varphi\varphi} = -\lambda\left[(G_{xx}x_\varphi + G_{xy}y_\varphi)x_\varphi + (G_{yx}x_\varphi + G_{yy}y_\varphi)y_\varphi\right]$$

Podobnie jak dla funkcji f prawą stronę mozna zapisać jako działanie drugiej pochodnej G na wektor styczny do powierzchni:

$$\lambda[h_x \;\; h_y]\begin{bmatrix} G_{xx} & G_{xy} \\ G_{xy} & G_{yy} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix}.$$

Ostatecznie więc druga pochodna f obciętego do S ma w punkcie krytycznym w działaniu na wektor styczny h postać:

$$[h_x \;\; h_y]\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix} - \lambda[h_x \;\; h_y]\begin{bmatrix} G_{xx} & G_{xy} \\ G_{xy} & G_{yy} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix}.$$

Sama więc druga pochodna w punkcie krytycznym jest różnicą macierzy:

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix} G_{xx} & G_{xy} \\ G_{xy} & G_{yy} \end{bmatrix}.$$

Drugi człon w wyrażeniu na drugą pochodną pochodzi od różniczkowania funkcji złożonej z parametryzacją. Jest to wzór prawdziwy **jedynie w punkcie krytycznym**.

Potrzebujemy jeszcze dwóch przykładów: ekstremum funkcji określonej na $\mathbb{R}^3$ obciętej do dwuwymiarowej powierzchni i ekstremum funkcji na $\mathbb{R}^3$ obciętej do jednowymiarowej powierzchni, czyli krzywej.

Przykład 7. Znaleźć punkty krytyczne funkcji

$$f(x, y, x) = xyz$$

na sferze o promieniu $\sqrt{3}$ i środku w punkcie $(0, 0, 0)$. Zbadać dwa wybrane punkty krytyczne.

Sfera o promieniu $\sqrt{3}$ i środku w punkcie $(0, 0, 0)$ ma równanie

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3,$$

weźmy więc $G(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$. Zapisujemy warunek Lagranża:

$$f'(x,y,z) = \lambda G'(x,y,z), \qquad [yz \;\; xz \;\; xy] = \lambda[2x \;\; 2y \;\; 2z].$$

Warunek na pochodne cząstkowe wraz z równaniem sfery dają układ równań:

$$\begin{cases} yz = 2\lambda x \\ xz = 2\lambda y \\ xy = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{cases}$$

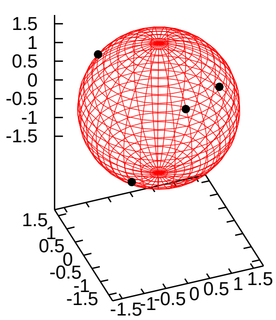
Powyższy układ równań ma całe mnóstwo rozwiązań. Jeśli założymy że żadna ze zmiennych nie jest równa 0 otrzymamy następujące rozwiązania:

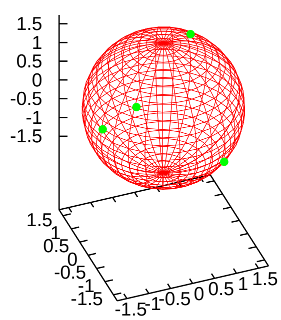
$$\begin{array}{l} (1,1,1), \lambda = \frac{1}{2} \\ (-1,-1,1), \lambda = \frac{1}{2} \\ (-1,1,-1), \lambda = \frac{1}{2} \\ (1,-1,-1), \lambda = \frac{1}{2} \\ (-1,1,1), \lambda = -\frac{1}{2} \\ (1,-1,1), \lambda = -\frac{1}{2} \\ (1,1,-1), \lambda = -\frac{1}{2} \\ (-1,-1,-1), \lambda = -\frac{1}{2} \end{array}$$

Załóżmy teraz, że $x = 0$. Wtedy pierwsze równanie wskazuje, że także y lub z jest 0. Gdy wszystkie trzy zmienne mają wartość 0 nie jest spełnione ostatnie równanie. Załóżmy więc, że tylko jedna z pozostałych zmiennych, np y jest także 0. Wtedy trzecie równanie wskazuje, że $\lambda = 0$. Jedynym warunkiem na zmienną z jest teraz ostatnie równanie, tzn $z = \pm\sqrt{3}$. Podobny wynik otrzymamy założywszy, że $y = 0$ lub $z = 0$. W ten sposób otrzymujemy dodatkowe sześć punktów krytycznych z wartością mnożnika równą 0:

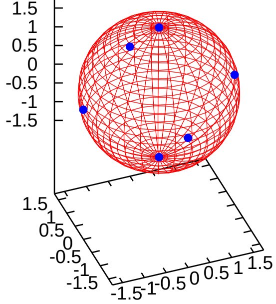
$$(0,0,\pm\sqrt{3}), \quad (0,\pm\sqrt{3},0), (\pm\sqrt{3},0,0)$$

Na powierzchni zaznaczamy punkty krytyczne odpowiadające wartościom funkcji 1 (na zielono) i -1 (na czarno)





i punkty krytyczne odpowiadające wartości funkcji 0 (na niebiesko):



Punkty zaznaczone na niebiesko nie są ekstremalne, ponieważ w otoczeniu każdego z nich są punkty w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie i ujemne.
Do badania wybieramy punkt $(1,1,1)$ dla $\lambda = \frac{1}{2}$. Forma kwadratowa, która określa rodzaj ekstremum to

$$f''(1,1,1) - \frac{1}{2}G''(1,1,1)$$

czyli

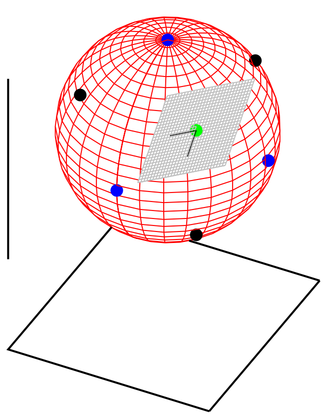
$$\begin{bmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{bmatrix}_{|(1,1,1)} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{|(1,1,1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Szukamy wektorów stycznych do sfery w punkcie $(1,1,1)$. Są to wektory spełniające warunek

$$G'(1,1,1)h = 0, \qquad [2\ \ 2\ \ 2]\begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} = 0.$$

Przestrzeń takich wektorów jest dwuwymiarowa, a przykładowa baza to:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$



Obliczmy zatem formę kwadratową na wektorze postaci

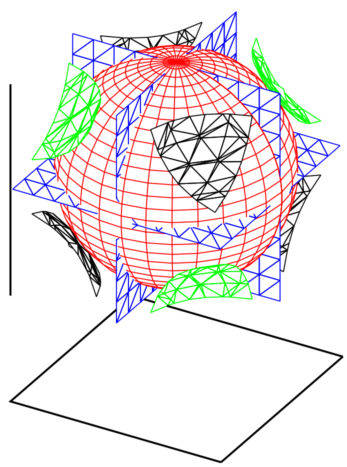
$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha+\beta \\ -\alpha \\ -\beta \end{bmatrix}.$$

$$[(\alpha+\beta) \quad -\alpha \quad -\beta] \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha+\beta \\ -\alpha \\ -\beta \end{bmatrix} = -2(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha^2 - 2\beta^2$$

Porządkujemy wzór korzystając z metody Lagranża:

$$-2(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha^2 - 2\beta^2 = -4(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta) = -4(\alpha+\frac{1}{2}\beta)^2 - 3\beta^2$$

Forma jest ujemnie określona, zatem punkt $(1,1,1)$ jest maksimum. Na rysunku zaznaczone są poziomice odpowiadające wartościom krytycznym funkcji. Na czarno minima, na zielono maksima a na niebiesko wartość 0, która nie jest ekstremalna. Poziomica $f(x,y,z)=0$ nie jest powierzchnią w otoczeniu punktów krytycznych.



♣

Przykład 8. Znaleźć punkty krytyczne funkcji

$$f(x,y,x) = x^2+y^2+z^2$$

na przecięciu płaszczyzny $\{(x,y,z):\ x+y+z=0\}$ i walca $\{(x,y,z):\ x^2+y^2=2\}$. Zbadać jeden z nich.

Powierzchnia S zadana jest przez równania

$$G_1(x,y,z) = x^2+y^2-2 = 0, \qquad G_2(x,y,z) = x+y+z = 0.$$

Przestrzeń wektorów stycznych do powierzchni w punkcie p tej powierzchni składa się więc z wektorów spełniających także dwa równania: wektor h jest styczny jeśli

$$G_1'(p)h = 0 \quad \text{i} \quad G_2'(p)h = 0.$$

Pochodna $f'(p)$ znika na tych wektorach jeśli jest kombinacją liniową pochodnych G_1 i G_2. Tym razem potrzebować będziemy dwóch mnożników Lagranża λ i μ:

Obliczamy odpowiednie pochodne w $p = (x, y, z)$:

$$f'(x, y, z) = [2x \ \ 2y \ \ 2z] \qquad G_1'(x, y, z) = [2x \ \ 2y \ \ 0] \qquad G_2'(x, y, z) = [1 \ \ 1 \ \ 1]$$

i piszemy warunek Lagranża:

$$f'(x, y, z) = \lambda G_1'(x, y, z) + \mu G_2'(x, y, z), \qquad [2x \ \ 2y \ \ 2z] = \lambda[2x \ \ 2y \ \ 0] + \mu[1 \ \ 1 \ \ 1]$$

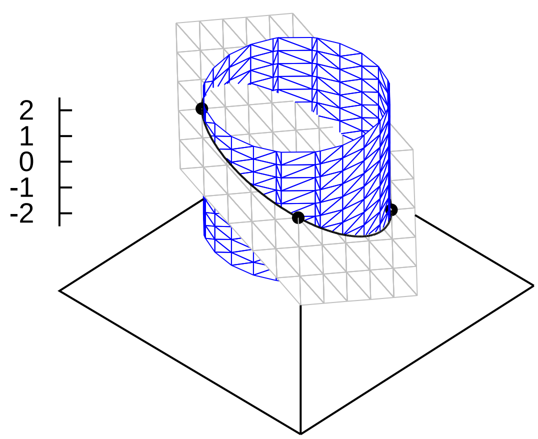
Wraz z równaniami powierzchni otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda x - \mu \\ 2y = 2\lambda y - \mu \\ 2z = \mu \\ x^2 + y^2 = 2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Otrzymujemy cztery punkty krytyczne

$$\begin{array}{lll} (1, -1, 0) & \lambda = 1 & \mu = 0 \\ (-1, 1, 0) & \lambda = 1 & \mu = 0 \\ (-1, -1, 2) & \lambda = 3 & \mu = 4 \\ (1, 1, -2) & \lambda = 3 & \mu = -4 \end{array}$$

Punkty te zaznaczamy na rysunku.



Wybieramy punkt $(1, 1, -2)$ do badania rodzaju punktu krytycznego. Bez dowodu podajemy fakt, iż jeśli powierzchnia zadana jest przez k równań postaci $G_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ to w punkcie krytycznym p rodzaj ekstremum jest określony przez sygnaturę formy kwadratowej

$$f''(p) - \lambda_1 G_1''(p) - \cdots - \lambda_k G_k''(p)$$

na przestrzeni stycznej do powierzchni w tym punkcie.

My mamy dwa równania, forma kwadratowa ma więc trzy składniki: druga pochodna f, druga pochodna G_1 i druga pochodna G_2. Znajdujemy przestrzeń styczną do S w punkcie krytycznym:

$$G_1'(1, 1, -2) = [2 \ \ 2 \ \ 0] \qquad G_2'(1, 1, 1) = [1 \ \ 1 \ \ 1]$$

Wektor styczny h ma być anihilowany przez obie powyższe macierze jednowierszowe. Prowadzi to do układu równań:

$$\begin{cases} 2h_x + 2h_y = 0 \\ h_x + h_y + h_z = 0 \end{cases}$$

Przestrzeń rozwiązań rozpięta jest przez wektor

$$h = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Badać musimy znak formy:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

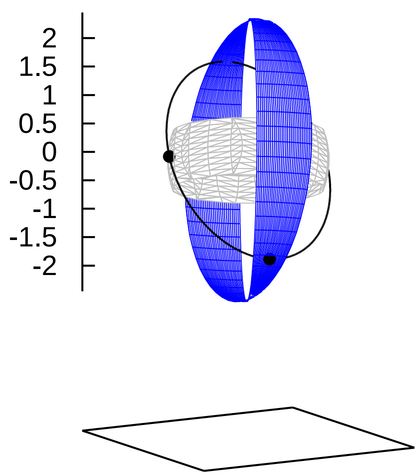
Ostatnia macierz jest zerowa, gdyż druga pochodna G_2 jest zerowa. Ostatecznie więc do badania mamy macierz

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

na przestrzeni wektorów proporcjonalnych do h:

$$\alpha[-1 \;\; 1 \;\; 0] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha^2 [-1 \;\; 1 \;\; 0] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = -2\alpha^2 < 0$$

Druga pochodna jest ujemna,mamy więc do czynienia z maksimum. Na rysunku zaznaczono fragmenty poziomic funkcji f stycznych w punktach krytycznych do powierzchni S:



♣