

Wykład 7.

Definicja 1. Niech $(x_n)_{n=1}^\infty$ będzie ciągiem liczbowym a $(n_k)_{k=1}^\infty$ ściśle rosnącym ciągiem liczb naturalnych, wtedy odwzorowanie

$$\mathbb{N} \ni k \longmapsto x_{n_k} \in \mathbb{R}$$

nazywamy podciągiem ciągu (x_n) .

Fakt 1. Każdy podciąg ciągu zbieżnego jest zbieżny i ma granicę równą granicy wyjściowego ciągu.

Bardzo przydatny do badania zbieżności ciągów określonych rekurencyjnie jest następujący fakt, który powinni państwo udowodnić na ćwiczeniach jako trening w dowodzeniu:

Fakt 2. Jeśli (x_n) jest ciągiem rzeczywistym a (x_{n_k}) i (x_{m_k}) jego dwoma podciągami takimi, że

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{m_k} = g$$

oraz suma mnogościowa zbiorów wyrazów tych podciągów zawiera prawie wszystkie wyrazy ciągu (x_n) , tzn

$$|(\{x_{n_k} : k \in \mathbb{N}\} \cup \{x_{m_k} : k \in \mathbb{N}\}) \cap \{x_n : n \in \mathbb{N}\}| < \infty$$

to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = g$$

.

Definicja 2. Ciąg (x_n) nazywamy ciągiem Cauchy'ego wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m > N \quad |x_n - x_m| \leq \varepsilon.$$

Twierdzenie 1. Ciąg o wartościach rzeczywistych jest zbieżny wtedy i tylko wtedy kiedy jest ciągiem Cauchy'ego.

DOWÓD: Zaczynamy od łatwiejszego dowodu $\Rightarrow$. Niech (x_n) będzie ciągiem zbieżnym z granicą równą g . Ustalmy $\varepsilon > 0$ i weźmy odpowiednie N takie, aby dla $n > N$ było

$$|x_n - g| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Weźmy teraz $m, n > N$ i oszacujmy

$$|x_n - x_m| = |x_n - g + g - x_m| < |x_n - g| + |g - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ciąg zbieżny spełnia więc warunek Cauchy'ego.

Dowód w drugą stronę $\Leftarrow$ jest trudniejszy. Cały problem polega na znalezieniu granicy, która występuje explicite w definicji zbieżności, a nie występuje w warunku Cauchy'ego. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i weźmy odpowiednie N_1 takie, aby dla $n, m > N_1$ spełniony był warunek

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Oznacza to w szczególności, że dla wszystkich $n > N_1$

$$|x_n - x_{N_1+1}| < \varepsilon,$$

czyli

$$\{x_n : n > N_1\} \subset]x_{N_1+1} - \varepsilon, x_{N_1+1} + \varepsilon[\subset [x_{N_1+1} - \varepsilon, x_{N_1+1} + \varepsilon]$$

Oznaczmy $I_1 = [x_{N_1+1} - \varepsilon, x_{N_1+1} + \varepsilon]$. Weźmy teraz $\frac{\varepsilon}{2}$ i znajdziemy $N_2 > N_1$ takie, aby dla $n, m > N_2$ spełniony był warunek

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Oznacza to w szczególności, że dla wszystkich $n > N_2$

$$|x_n - x_{N_2+1}| < \frac{\varepsilon}{2},$$

czyli

$$\{x_n : n > N_2\} \subset]x_{N_2+1} - \frac{\varepsilon}{2}, x_{N_2+1} + \frac{\varepsilon}{2}[\subset [x_{N_2+1} - \frac{\varepsilon}{2}, x_{N_2+1} + \frac{\varepsilon}{2}].$$

Wiemy więc, że prawie wszystkie wyrazy ciągu, poza być może pierwszymi N_2 wyrazami leżą w $[x_{N_2+1} - \frac{\varepsilon}{2}, x_{N_2+1} + \frac{\varepsilon}{2}]$. Skoro $N_2 > N_1$ to te same wyrazy leżą także w I_1 a zatem również w przecięciu tych odcinków. Oznaczmy

$$I_2 = [x_{N_2+1} - \frac{\varepsilon}{2}, x_{N_2+1} + \frac{\varepsilon}{2}] \cap I_1.$$

Weźmy teraz $\frac{\varepsilon}{4}$, N_3 i powtórzmy procedurę konstruując I_3 , itd. W ten sposób otrzymujemy ciąg domkniętych odcinków I_k , zawierających się w sobie:

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots \supset I_k \supset \dots$$

o ściśle malejących długościach:

$$|I_k| \leq \frac{\varepsilon}{2^{k-1}}.$$

Niech

$$I = \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k.$$

Pokażemy, że I jest zbiorem niepustym, który zawiera dokładnie jedną liczbę. Niech $I_k = [a_k, b_k]$ wtedy $a_k < b_k$ i $b_k - a_k \leq \frac{\varepsilon}{2^{k-1}}$. Skoro $I_{k+1} \supset I_k$ to

$$a_k < a_{k+1} < b_{k+1} < b_k.$$

Ciągi (a_k) i (b_k) są oba monotoniczne (jeden rosnący, drugi malejący) i ograniczone, zatem zbieżne. Oznaczmy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = b.$$

Z twierdzenia o zachowywaniu nierówności przy przechodzeniu do granicy wnioskujemy, że

$$a \leq b.$$

Sprawdzimy, że musi być $a = b$: Załóżmy że $a < b$, wtedy $a - b < 0$, ale dla wszystkich k

$$b_k - a_k < \frac{\varepsilon}{2^{k-1}}$$

czyli

$$b - a \leq 0,$$

mamy więc sprzeczność. Okazuje się, że $a = b$. Mamy więc

$$I = \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k = \{a\}.$$

Pokażemy, że a jest granicą ciągu (x_n) . Ustalmy $\delta > 0$ i weźmy $K \in \mathbb{N}$ takie, że $\frac{\varepsilon}{2^{K-1}} < \delta$. Wtedy odcinek I_K zawarty jest w odcinku $]a - \delta, a + \delta[$. Wiadomo także, że wszystkie wyrazy ciągu (x_n) dla indeksów $n > N_K$ zawarte są w I_K a zatem także w $]a - \delta, a + \delta[$, co pokazuje, że $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. $\square$