

Wykład 8.

Poprzedni wykład należałoby uzupełnić jeszcze o kilka uwag dotyczących pojęcia ciągu Cauchy'ego. Udowodnione poprzednio twierdzenie głoszące, że każdy ciąg Cauchy'ego ma granicę jest równoważne twierdzeniu o istnieniu kresów zbiorów ograniczonych oraz twierdzeniu, mówiącemu, że każdy przekrój zbioru $\mathbb{R}$ jest przekrojem głównym. Pojęcie ciągu Cauchy'ego jest wykorzystywane również do alternatywnej konstrukcji zbioru $\mathbb{R}$ ze zbioru $\mathbb{Q}$. W zbiorze ciągów Cauchy'ego o wyrazach wymiernych wprowadzamy relację równoważności według której równoważne są te ciągi Cauchy'ego, których wystarczająco dalekie wyrazy leżą dowolnie blisko. Precyzyjniej:

$$(x_n) \sim (y_n) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad |x_n - y_n| < \varepsilon.$$

Łatwo stwierdzić, że jeśli ciąg Cauchy'ego w $\mathbb{Q}$ jest zbieżny do liczby wymiernej, to wszystkie równoważne mu ciągi też mają tę samą granicę. Klasy równoważności pozostałych ciągów uważa się za liczby rzeczywiste. Oczywiście jest to tylko zarys konstrukcji... trzeba tu wiele podowodzić.

Definicja 1. *Mówimy, że ciąg (x_n) ma granicę w nieskończoności (albo jest rozbieżny do nieskończoności) wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\forall M > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad x_n > M.$$

Piszemy wówczas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty.$$

Mówimy, że ciąg (x_n) ma granicę w $-\infty$ (albo jest rozbieżny do $-\infty$) wtedy i tylko wtedy gdy

$$\forall M < 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad x_n < M.$$

Piszemy wówczas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty.$$

Twierdzenie 1. (Otto Stolz) *Jeśli ciąg (y_n) jest od pewnego miejsca ściśle rosnący i jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$ oraz istnieje granica*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = g$$

(g może być skończone lub nieskończone) to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = g.$$

Funkcje rzeczywiste

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

- $X \subset \mathbb{R}$ – dziedzina funkcji, jest przeliczalną sumą odcinków (być może z nieskończonym końcem);
- $f(X) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in X : f(x) = y\}$ – zbiór wartości;
- $f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}$ – poziomica funkcji;
- $f(A) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in A : f(x) = y\}$ – obraz podzbioru;
- $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$ – przeciwobraz podzbioru.

Definicja 2. *Funkcję nazywamy rosnącą (malejącą) jeśli dla każdej pary $x_1, x_2 \in X$ takiej, że $x_1 < x_2$ mamy $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$). Jeśli równości są ostre używamy określeń „ściśle rosnąca” i „ściśle malejąca”. Jeśli nierówności są nieostre mówimy także „niemalejąca” i „nierosnąca”.*

Definicja 3. *Funkcję f nazywamy symetryczną jeśli dla wszystkich $x \in X$ także $-x \in X$ oraz*

$$f(-x) = f(x)$$

Definicja 4. Funkcję f nazywamy antysymetryczną jeśli dla wszystkich $x \in X$ także $-x \in X$ oraz

$$f(-x) = -f(x)$$

Definicja 5. Funkcję f nazywamy okresową istnieje $T \in \mathbb{R}$ takie, że jeśli $x \in X$ to $x + T \in X$ oraz

$$f(x + T) = f(x) \quad \text{dla wszystkich } x \in X$$

Definicja 6. Funkcja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ma granicę w $x_0 \in \mathbb{R}$, równą y_0 wtedy i tylko wtedy gdy istnieje odcinek otwarty J zawierający x_0 i taki, że $J \setminus \{x_0\} \subset X$ oraz

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad (x \neq x_0 \text{ i } |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon$$

Piszemy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0.$$

Definicja 7. Funkcja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ma lewostronną granicę w $x_0 \in \mathbb{R}$ równą y_0 wtedy i tylko wtedy gdy istnieje $a < x_0$ takie, że $]a, x_0[\subset X$ oraz

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad (x < x_0 \text{ i } |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon$$

Piszemy $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = y_0$.

Definicja 8. Funkcja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ma prawostronną granicę w $x_0 \in \mathbb{R}$ równą y_0 wtedy i tylko wtedy gdy istnieje $b > x_0$ takie, że $]x_0, b[\subset X$ oraz

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad (x > x_0 \text{ i } |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon)$$

Piszemy $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = y_0$

Fakt 1. Funkcja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ma granicę w x_0 wtedy i tylko wtedy gdy ma granicę lewo i prawo stronne w x_0 i są one równe.

Definicja 9. Funkcja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ma lewostronną granicę w $x_0 \in \mathbb{R}$ równą ∞ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje $a < x_0$ takie, że $]a, x_0[\subset X$ oraz

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 \quad (x < x_0 \text{ i } |x - x_0| < \delta) \Rightarrow f(x) > M$$

Piszemy $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$.

Definicja 10. Funkcja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ma lewostronną granicę w $x_0 \in \mathbb{R}$ równą $-\infty$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje $a < x_0$ takie, że $]a, x_0[\subset X$ oraz

$$\forall M < 0 \exists \delta > 0 \quad (x < x_0 \text{ i } |x - x_0| < \delta) \Rightarrow f(x) < M$$

Piszemy $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$.

Podobnie definiujemy granicę prawostronną w x_0 równą ∞ lub $-\infty$.

Zdefiniujemy teraz granice funkcji w $+\infty$. Bardzo podobne definicje obowiązują dla $-\infty$:

Definicja 11. Funkcja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ma granicę w ∞ równą y_0 wtedy i tylko wtedy gdy istnieje $a \in \mathbb{R}$ takie, że $]a, \infty[\subset X$ oraz

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon > a \quad \forall x > x_\varepsilon \quad |f(x) - y_0| < \varepsilon$$

Piszemy $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = y_0$.

Definicja 12. Funkcja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ma granicę w ∞ równą ∞ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje $a \in \mathbb{R}$ takie, że $]a, \infty[\subset X$ oraz

$$\forall M > 0 \exists x_M > a \quad \forall x > x_M \quad f(x) > M$$

Piszemy $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

Definicja 13. Funkcja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ma granicę w ∞ równą $-\infty$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje $a \in \mathbb{R}$ takie, że $]a, \infty[\subset X$ oraz

$$\forall M < 0 \quad \exists x_M > a \quad \forall x > x_M \quad f(x) < M$$

Piszemy $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

Funkcje elementarne omówione są w streszczeniu następnych wykładów.