Wykład 9.

Fakt 1. *Dla $f : X \to \mathbb{R}$ i $x_0 \in X$ równoważne są następujące warunki:*

(1) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in X \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon;$
(2) $\forall\, (x_n),\ x_n \in X, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

Definicja 1. *Funkcję $f : X \to \mathbb{R}$ nazywamy ciągłą w $x_0 \in X$ wtedy i tylko wtedy gdy spełniony jest jeden z równoważnych warunków wymienionych w fakcie (1). Funkcję nazywamy ciągłą na odcinku $]a, b[\subset X$ wtedy i tylko wtedy gdy jest ciągła w każdym punkcie odcinka.*

Przykłady: (1) Funkcja $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ określona na odcinku $[-1, 1]$ jest ciągła w każdym punkcie odcinka. Badając ciągłość na końcach, mówi się czasami o ciągłości jednostronnej. (2) Funkcja, która nie jest ciągła w żadnym punkcie:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \notin \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

(3) Funkcja ciągła tylko w $x = 0$:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x^2 \notin \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Fakt 2. *Niech f, g będą a funkcjami ciągłymi w punkcie x_0 i określonymi przynajmniej na pewnym odcinku zawierającym x_0, wówczas*

(1) *funkcja $f + g$ jest ciągła w x_0,*
(2) *funkcja fg jest ciągła w x_0,*
(3) *jeśli ponadto $g(x_0) \neq 0$ to funkcja $\dfrac{f}{g}$ jest ciągła w x_0,*
(4) *jeśli funkcja h jest funkcją ciągłą w $f(x_0)$ i określoną przynajmniej na pewnym odcinku zawierającym $f(x_0)$ to $h \circ f$ jest ciągła w x_0.*

O funkcji $x \mapsto \exp x$ ciąg dalszy

Fakt 3. *Funkcja $e(x)$ ma następujące własności:*

(1) $e(x + y) = e(x)e(y)$,
(2) $e(x) > 0$, $e(x) > 1 + x$,
(3) *funkcja $e(x)$ jest ciągła i rosnąca.*

Dowód:

(1) Oszacujemy z dwóch stron iloraz $\frac{e_n(x)e_n(y)}{e_n(x+y)}$, za każdym razem korzystając z nierówności Bernoulliego.

$$\begin{aligned} \frac{e_n(x)e_n(y)}{e_n(x+y)} &= \frac{(1 + \frac{x}{n})^n(1 + \frac{y}{n})^n}{(1 + \frac{x+y}{n})^n} = \left(\frac{1 + \frac{x+y}{n} + \frac{xy}{n^2}}{1 + \frac{x+y}{n}}\right)^n \\ &= \left(1 + \frac{\frac{xy}{n^2}}{1 + \frac{x+y}{n}}\right)^n \geqslant 1 + \frac{xy}{x + y + n}, \end{aligned}$$

czyli

$$\frac{e_n(x)e_n(y)}{e_n(x+y)} \geqslant 1 + \frac{xy}{x + y + n}.$$

Dalej

$$\frac{e_n(x+y)}{e_n(x)e_n(y)} = \frac{(1+\frac{x+y}{n})^n}{(1+\frac{x}{n})^n(1+\frac{y}{n})^n} = \left(\frac{1+\frac{x+y}{n}}{1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2}}\right)^n = \left(1-\frac{\frac{xy}{n^2}}{(1+\frac{x}{n})(1+\frac{y}{n})}\right) \geqslant$$

$$1-\frac{\frac{xy}{n}}{(1+\frac{x}{n})(1+\frac{y}{n})} = \frac{(n+x)(n+y)-nxy}{(n+x)(n+y)},$$

zatem

$$\frac{e_n(x)e_n(y)}{e_n(x+y)} \leqslant \frac{(n+x)(n+y)}{(n+x)(n+y)-nxy}.$$

Podsumowując

$$1+\frac{xy}{x+y+n} \leqslant \frac{e_n(x)e_n(y)}{e_n(x+y)} \leqslant \frac{(n+x)(n+y)}{(n+x)(n+y)-nxy}.$$

Ciągi ograniczające nasz iloraz z dołu i z góry dążą do 1, zatem z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że

$$\frac{e(x)e(y)}{e(x+y)} = \lim_{n\to\infty}\frac{e_n(x)e_n(y)}{e_n(x+y)} = 1$$

i ostatecznie

$$e(x)e(y) = e(x+y).$$

(2) Nierówność $e(x) > 0$ jest oczywista: dla każdego x istnieje N takie, że dla $n > N$ wartość bezwzględna $|\frac{x}{n}|$ jest mniejsza niż 1. Dla dużych n mamy więc $(1+\frac{x}{n}) > 0$ nawet dla $x < 0$. Nierówność $e(x) \geqslant 1+x$ wynika z nierówności Bernoulliego, która obowiązuje dla dużych n.

(3) Sprawdzimy najpierw czy $e(\cdot)$ jest rosnąca. Weźmy $x > y$

$$e(x) = e(x-y)e(y) \geqslant e(y)(1+(x-y)) > e(y), \quad \text{ponieważ} \quad x-y>0,\ 1+(x-y)>1.$$

W dalszym ciągu potrzebne będzie jeszcze jedno oszacowanie dla funkcji $e(\cdot)$. Skoro $e(x)e(-x) = 1$, to $\frac{1}{e(x)} = e(-x) \geqslant 1-x$. Dla $1-x > 0$, czyli dla $x < 1$ nierówność możemy odwrócić i dostać $e(x) \leqslant \frac{1}{1-x}$. Warunek ciągłości funkcji $e(\cdot)$ w punkcie x_0 można zapisać jako:

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0 :\ |x-x_0| < \delta\ \Rightarrow\ |e(x)-e(x_0)| < \epsilon.$$

Oszacujmy $e(x)-e(x_0) = e(x_0)(e(x-x_0)-1)$. W tym celu oznaczmy $y = x-x_0$. Dla $y < 1$ mamy:

$$e(y) \geqslant y-1 \text{ i } e(y) \leqslant \frac{1}{1-y} \quad \text{czyli} \quad y \leqslant e(y)-1 \leqslant \frac{1}{1-y}-1 = \frac{y}{1-y}.$$

$e(y)-1$ jest większe od zera dla dodatnich y a mniejsze dla ujemnych. Dla ujemnych y mamy więc $|e(y)-1| \leqslant |y| \leqslant \frac{|y|}{1-|y|}$. Ostatecznie

$$|e(y)-1| \leqslant \frac{|y|}{1-|y|} \quad \text{czyli} \quad |e(x_0)-e(x)| \leqslant e(x_0)\frac{|x-x_0|}{1-|x-x_0|}.$$

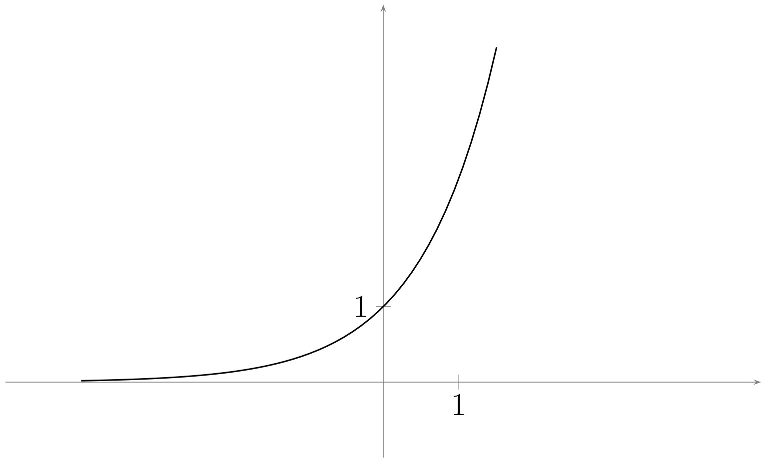
Biorąc $\delta = \frac{\epsilon}{e(x_0)+\epsilon}$ i $|x-x_0| < \delta$ dostajemy $|e(x_0)-e(x)| < \epsilon$.

□

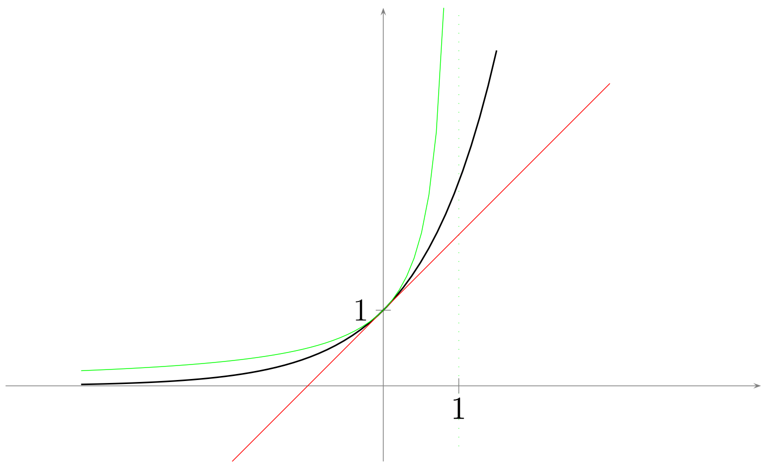
Z definicji $e(\cdot)$ wynika, że $e(0) = 1$, oznaczyliśmy ponadto $e(1) = e$. Z własności (1) wynika dla $m \in \mathbb{N}$ $e(m) = e(1+1+\cdots+1) = e(1)^m$. Ponadto $e(-x)e(x) = e(0) = 1$ czyli $e(-x) = \frac{1}{e(x)}$. W tej sytuacji dla $k \in \mathbb{Z}$ mamy $e(k) = e^k$. Biorąc teraz $p = \frac{k}{l}$ mamy $e(p)^l = e(lp) = e(k) = e^k$. Czyli $e(p) = (e^k)^{\frac{1}{l}} = e^{\frac{k}{l}} = e^p$. Funkcję wykładniczą argumentu niewymiernego definiujemy

$$e^x := e(x).$$

Wykres:



Oszacowania:



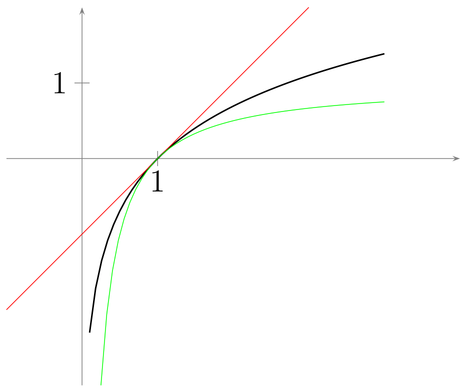
Funkcję $e(\cdot)$ oznacza się często exp, a więc $e(x) = e^x = \exp(x)$. Funkcja ta jest bijekcją, ma zatem odwrotność. Funkcję odwrotną do exp oznaczamy log.

$$\log :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

Wprost z oszacowań na funkcję exp wynikają następujące oszacowania na log:

Fakt 4.

$$\frac{x-1}{x} \leqslant \log x \leqslant x - 1 \quad \text{dla} \quad x > 0 \quad \text{czyli} \quad \frac{x}{1+x} \leqslant \log(1+x) \leqslant x \quad \text{dla} \quad 1 + x > 0$$



Fakt 5.

$$\lim_{n \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Dowód: Korzystamy z oszacowań udowodnionych poprzednio (oszacowanie z góry obowiązuje dla $x < 1$ i prowadzimy rachunek dla $x > 0$:

$$\begin{array}{ccccccc} 1+x & \leqslant & e^x & \leqslant & \dfrac{1}{1-x} & & /-1 \\ x & \leqslant & e^x - 1 & \leqslant & \dfrac{x}{1-x} & & /:x \\ 1 & \leqslant & \dfrac{e^x-1}{x} & \leqslant & \dfrac{1}{1-x} & & \\ \downarrow & & & & \downarrow & & \\ 1 & & & & 1 & & \end{array}$$

Korzystamy teraz z funkcyjnej wersji twierdzenia o trzech ciągach i wnioskujemy, że

$$\lim_{n\to 0^+} \frac{e^x-1}{x} = 1.$$

Następnie ten sam rachunek prowadzimy dla $x < 0$:

$$\begin{array}{ccccccc} x & \leqslant & e^x - 1 & \leqslant & \dfrac{x}{1-x} & & /:x \\ \dfrac{1}{1-x} & \leqslant & \dfrac{e^x-1}{x} & \leqslant & 1 & & \\ \downarrow & & & & \downarrow & & \\ 1 & & & & 1 & & \end{array}$$

Teraz mamy

$$\lim_{n\to 0^-} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

i ostatecznie

$$\lim_{n\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1.$$

□