

Zadania domowe Analiza IB

SERIA 1 — październik 2008

1. Udowodnić indukcyjnie równości:

a) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$, b) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n-1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!}$,

c) $2^3 + 4^3 + \dots + (2n)^3 = 2(2 + 4 + \dots + 2n)^2$,

d) $\sum_{k=1}^n (-1)^k k^2 = (-1)^n \binom{n+1}{2}$, e) $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$,

f) $1 + 2q + 3q^2 + \dots + nq^{n-1} = \frac{1 - (n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2}$.

g) Jeśli $x_1 = 1, x_2 = 5$ oraz $x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n$ dla $n \in \mathbb{N}$, to $x_n = 2^n + (-1)^n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

2. Wykazać indukcyjnie, że:

a) wyrażenie $F_n = \frac{1}{2^n} \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{\sqrt{5}}$ spełnia równanie rekurencyjne

$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ dla $n \in \mathbb{N}$ (F_n są tzw. *liczbami Fibonacciego*).

b) liczba $n^3 + 2n$ jest podzielna przez 3,

c) liczba $5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$ jest podzielna przez 8,

d) liczba $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ jest podzielna przez 133,

e) dla $0 \leq x < 1$ oraz $n \in \mathbb{N}$ zachodzi: $(1-x)^n \leq 1 - nx + \binom{n}{2}x^2$.

3. Niech k_n będzie maksymalną liczbą części, na które można podzielić:

a) płaszczyznę n prostymi. Wykazać, że $k_n = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$.

b) sferę n okręgami. Wykazać, że $k_n = n^2 - n + 2$.

4. Wykazać, że $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ dla $n \in \mathbb{N}$.

5. Wykazać, że: (a) $|x| < 1, |y| < 1 \Rightarrow \left|\frac{x-y}{1-xy}\right| < 1$; (b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$;

(c) $\frac{1}{\sqrt{4n+1}} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ dla $n \in \mathbb{N}$;

(d) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} < \frac{3}{4}$, $n \in \mathbb{N}$; (e) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

6. Niech $(\alpha \div \beta) := ((\alpha \wedge \neg\beta) \vee (\neg\alpha \wedge \beta))$.

Udowodnić, że $(\alpha \vee \beta) \iff ((\alpha \div \beta) \div (\alpha \wedge \beta))$.

7. Wykazać, że poniższe zdania logiczne są zawsze prawdziwe (tzn. są *tautologiami*):

a) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$, b) $p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$, c) $((\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow p)$,

d) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$, e) $\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$,

f) $\neg(\neg p \wedge q \wedge (q \Rightarrow p))$.

8. Niech A, B, C, D będą dowolnymi zbiorami. Pokazać, że

a) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$, b) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$,

c) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$, d) $A \setminus B = (A' \cup B)'$,

e) $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$.

9. Różnicą symetryczną zbiorów A i B nazywamy zbiór $A \div B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Pokazać, że zachodzą następujące wzory
- $A \div (B \div C) = (A \div B) \div C$ (łączność),
 - $A \cap (B \div C) = (A \cap B) \div (A \cap C)$ (rozdzielność),
 - $A \cup B = A \div B \div (A \cap B)$,
 - $A \setminus B = A \div (A \cap B)$,
 - określić $\cap$ za pomocą działań $\div$ i $\cup$ oraz za pomocą działań $\setminus$ i $\div$.
10. Znaleźć zbiory
- $\mathbb{Z} \cap \{x \in]-5, \infty[: |x+2| < 4\} \cap \{x \in \mathbb{R} : \cos(\frac{\pi}{4}x) \leq \frac{2}{3}\}$,
 - $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leq 4\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| > y\}$,
 - $\bigcup_{n=5}^{100} [\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}[$,
 - $\bigcup_{n=1}^{\infty} ([-\frac{1}{n}, \frac{n+1}{n^2}[\cap [-\frac{1}{2}, 2])$,
 - $\bigcup_{n=1}^{\infty} [\frac{3}{n}, \frac{4}{n}]$,
 - $\bigcap_{n=1}^{\infty}]\frac{n}{n+1}, \frac{5}{n} + \frac{n}{10}[$,
 - $\bigcap_{n=1}^{\infty} ([0, n] \cup [n^2, \infty])$,
 - $\bigcup_{t \in [2, 3]} A_t$ oraz $\bigcap_{t \in [2, 3]} A_t$, gdzie $A_t = [t, 2t] \times [-t, t]$,
 - $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-n)^2 + (y-n)^2 < 2n^2\}$.
11. Uprościć warunek: (a) $A \cup B \subset A \cup (B \cap C)$; (b) $(A \cap B) \cup (C \cap B) = B$; (c) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup B$; (d) $(A \cup B) \setminus (B \cap C) = A \cap C$; (e) $(A \cup B \cup C) \setminus (A \cup B) = C$; (f) $A \setminus B = B \setminus A$; (g) $A \cap B = (A \cup C) \cap (B \setminus C)$.
12. Wykazać, że odwzorowanie $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $f(x, y) := (x + y, \frac{1}{x} - \frac{1}{y})$, jest bijektywne, wyliczyć f^{-1} .
13. Podać przykłady bijekcji $f : X \rightarrow Y$ jeśli:
- $X =]0, 1[, Y = [-2, 2] \setminus \{-1, 1\}$,
 - $X = \mathbb{Z}, Y = \mathbb{Z} \setminus 3\mathbb{Z}$, tzn. $Y =$ liczby niepodzielne przez 3,
 - $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,
 - $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}, Y = \mathbb{N}$,
- w każdym przypadku znaleźć odwzorowanie odwrotne f^{-1} .
14. Zbadać surjektywność, injektywność, opisać zbiór wartości i poziomice następujących odwzorowań:
- $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(k) = 2k^2 - 3k + 1$,
 - $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - y$,
 - $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{+*} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{+*}, f(x, y) = (x + \log y, e^x)$,
 - $f : \mathbb{R}_{+*} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - x^{-1}$ ($\mathbb{R}_{+*} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$).
15. Dane są odwzorowania $\alpha : X \rightarrow Y, \beta : Y \rightarrow Z, \gamma : Z \rightarrow W$. Wykazać, że:
- $[\beta \circ \alpha \text{ injektywne}] \Rightarrow \alpha \text{ injektywne}$;
 - $[\beta \circ \alpha \text{ surjektywne}] \Rightarrow \beta \text{ surjektywne}$;
 - $[\beta \circ \alpha \text{ i } \gamma \circ \beta \text{ są bijekcjami}] \Rightarrow \alpha, \beta \text{ i } \gamma \text{ również są bijekcjami}$.
16. Zbadać injektywność i surjektywność odwzorowania; w przypadku bijekcji znaleźć odwzorowanie odwrotne:

- (a) $f : \square \rightarrow \triangle$, gdzie $\square := \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$, $\triangle := \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1, 0 < x_2, x_1 + x_2 < 1\}$ oraz $f(x) := x \frac{\max\{x_1, x_2\}}{x_1 + x_2}$; (b) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(k) := \frac{|4k-1|+1}{2}$; (c) $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(k_1, k_2) = k_1 + k_2\sqrt{2}$; (d) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbf{T} := \{\frac{n(n+1)}{2} : n \in \mathbb{N}\}$, $f(k) := 2k^2 - k$; (e) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(k, l) := 2^{k-1}(2l - 1)$.
17. Opisać poziomicę i zbiór wartości odwzorowania: (a) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(n) := E(\frac{2n-1}{3})$; (b) $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) := (t + t^{-1}, t - t^{-1})$; (c) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) := az + \bar{z}$, gdzie $a \in \mathbb{C}$ jest ustaloną liczbą, taką że $|a| = 1 \neq -a$; (d) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) := (\frac{1}{1+t^2}, \frac{t}{1+t^2})$; (e) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(n) := 2n^2 - 3n + 1$; (f) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2} - y$.
18. Zbadać czy R jest relacją równoważności w X . Jeśli tak, to opisać jej klasy i sporządzić rysunek wykresu:
 (a) $X = \mathbb{R}$, $xRy \Leftrightarrow (x \in \mathbb{Z} \text{ i } y \in \mathbb{Z}) \text{ lub } x - y \in \mathbb{Z}$,
 (b) $X = \{1, 2, 3\}$, $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 3)\}$,
 (c) $X = \mathbb{R}$, $R = \{(x, y) : x^2 - y^2 = 4(x - y)\}$,
 (d) $X = \mathbb{Z}$, $R = \{(x, y) : (x - y)/5 \in \mathbb{Z}\}$,
 (e) $X = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $R = \{(x, y) : x/y \in \mathbb{N} \text{ lub } y/x \in \mathbb{N}\}$.
19. Znaleźć najmniejszą relację równoważności w $\{a, b, c, d\}$ zawierającą (a, c) oraz (a, d) , jej klasy oraz wykres.
20. Niech $R = \{(x, y) : (x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 1) = 0\}$. Narysować wykres R . Czy R jest relacją równoważności w $\mathbb{R}$? Znaleźć rozkład R na 6 podzbiorów będących bijekcjami. Opisać te bijekcje, ich dziedziny, przeciwdziedziny oraz funkcje odwrotne.