

Zadania domowe z analizy I B

seria 2 – październik 2008

1. Wykazać, że:

- (a) Jeśli $A_1, \dots, A_n$ są podzbiorami zbioru skończonego X takimi, że $|A_1| + \dots + |A_n| > (n-1)|X|$, to $|A_1 \cap \dots \cap A_n| \neq 0$.
- (b) Jeśli $|A_1| = |A_2| = |A_3| = 9$ oraz $A_i \cap A_j \leq 5$ dla $1 \leq i < j \leq 3$, to $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| \geq 13$.
- (c) Jeśli $|A_1| = \dots = |A_4| = 5$ oraz $|A_i \cap A_j| \leq 2$ dla $1 \leq i < j \leq 4$, to $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| \geq 10$. Podać przykłady dowodzące, że oszacowań z (b) i (c) nie można poprawić.

2. Niech $\alpha : X \rightarrow Y, \beta : Y \rightarrow X, \gamma : X \rightarrow X$. Wykazać, że:

- (a) $[\alpha \circ \gamma = \alpha, \alpha \text{ injektywne}] \Rightarrow \gamma = \text{id}_X$;
- (b) $[\gamma \circ \beta = \beta, \beta \text{ surjektywne}] \Rightarrow \gamma = \text{id}_X$;
- (c) $[\alpha \circ \beta \text{ injektywne}, \beta \text{ surjektywne}] \Rightarrow \alpha \text{ injektywne}$;
- (d) $[\alpha \circ \beta \text{ surjektywne}, \beta \text{ injektywne}] \Rightarrow \alpha \text{ surjektywne}$;
- (e) $\alpha \text{ jest injektywne} \iff \forall A \subset X : A = f^{-1}(f(A))$;
- (f) $\alpha \text{ jest surjektywne} \iff \forall B \subset Y : B = f(f^{-1}(B))$.

3. Opisać poziomice i zbiór wartości odwzorowania:

- (a) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(n) := E(\frac{2n-1}{3})$;
- (b) $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^2, f(t) := (t + t^{-1}, t - t^{-1})$;
- (c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, f(t) := (\frac{1}{1+t^2}, \frac{t}{1+t^2})$;
- (d) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) := az + \bar{z}$, gdzie $a \in \mathbb{C}$ – ustalone, takie że $|a| = 1 \neq -a$.

4. Sprawdzić, że f jest bijektywne, opisać f^{-1} :

- (a) $f : S \rightarrow \mathbb{N}, f(n) := |S \cap \overline{1, n}|$, gdzie S jest zadany nieskończonym podzbiorem $\mathbb{N}$;
- (b) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, f(n) := (-1)^n E(\frac{n}{2})$;
- (c) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) := az + b\bar{z}$, gdzie $a, b \in \mathbb{C}$ są zadane, takie że $|a| \neq |b|$.

5. Wykazać, że:

- (a) Jeżeli $S \subset \mathbb{R}$ jest co najwyżej przeliczalny, to $\exists a, b \in \mathbb{R}, a > 0 : \forall n \in \mathbb{Z} : an + b \notin S$;
- (b) Jeżeli $S \subset \mathbb{R}^2$ jest co najwyżej przeliczalny, to istnieje trójkąt równoboczny na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ o bokach długości 1 i brzegu nie zawierającym punktów z S .

6. Znaleźć podzbiór $S \subset \mathbb{Z}$ wiedząc, że:

(a) $S \setminus (S + 1) = \{0, 3, 8\}$, $S \setminus (S - 1) = \{1, 5\}$;

(b) $S \setminus (S + 2) = \{0, 3, 8\}$, $S \setminus (S - 2) = \{4, 7, 10\}$.

Oznaczenie. $S \pm k := \{n \pm k : n \in S\}$.

Wskazówka. $S \setminus (S + 1)$ jest zbiorem lewych końców rozłącznych przedziałów, z których składa się S .

7. Niech $\emptyset \neq X$ będzie zbiorem skończonym oraz $f : X \rightarrow X$. Wykazać, że:

(a) $R := \{(x, y) \in X \times X : \exists k, l \in \mathbb{N} : f^k(x) = f^l(y)\}$ jest relacją równoważności w X ;

(b) $X_o := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} f^k(X)$ jest niepusty, $f(X_o) = X_o$ oraz $f|_{X_o} : X_o \rightarrow X_o$ jest bijekcją;

(c) każda orbita $f|_{X_o}$ zawiera się w jednej z klas relacji R i każda z klas relacji R zawiera dokładnie jedną orbitę. Zatem $|X/R|$ jest liczbą cykli permutacji $f|_{X_o}$.

8. Niech R będzie relacją równoważności w X oraz $X_o \subset X$.

Wykazać, że $(X_o \text{ jest sumą pewnych klas równoważności } R) \iff (\forall x, y \in X : [x \in X_o, (x, y) \in R] \Rightarrow y \in X_o)$.

9. Sprawdzić, że dana relacja jest relacją równoważności w $\mathbb{R}$. Opisać jej klasy równoważności i narysować odpowiadający jej podzbiór R w $\mathbb{R}^2$. Znaleźć funkcję $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, której poziomice są klasami równoważności:

(a) $x \sim y \iff (x - y)(1 - xy) = 0$;

(b) $x \sim y \iff (x = y \text{ lub } x = -y \in [-1, 1] \text{ lub } |x| + |y| = 1)$;

(c) $x \sim y \iff (x = y \text{ lub } \exists n \in \mathbb{N} : x, y \in [2n - 1, 2n])$;

(d) $x \sim y \iff (x - y \in \mathbb{Z} \text{ lub } x + y + \frac{1}{2} \in \mathbb{Z})$.

10. Obliczyć granice następujących ciągów (bądź wykazać, że ciąg nie ma granicy):

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!}$;

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + (-3)^n}{\sqrt{(n!)}}$;

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n3^n + 2n^5 - 5}{n! + 1}$;

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{n^2 + 1}} - 2^{-n}$;

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{n^2 \pi}{n + 2}$;

(f) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[100]{n^{100} + n^{99}} - n)$;

(g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{(n+2)(n+4)(n+5)} - \sqrt[3]{n(n+1)(n+3)} \right)$;

(h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}} \right)$;

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5 \cdot 2^{2n} + 4 \cdot 2^n + 3}$;

(j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2} - 1} - \frac{2}{\sqrt[n]{4} - 1} \right)$;

(k) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(1 + \frac{2}{n} \right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n} \right)$;

(l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1^4 + 2^4 + \dots + n^4}$;

(m) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$;

- (n) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+7}{3n+5} \right)^{2n+3}$;
- (o) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + an + b}{n^2 + cn + d} \right)^n$;
- (p) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \dots 2^{\sqrt{n}} \sqrt{2}$;
- (r) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}{3} \right)^n$, gdzie $a, b, c > 0$;
- (s) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \sqrt[n]{100} \right)^n$;
- (t) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - 2 \sqrt[n]{100} \right)^n$.
- Wskazówka: $\lim_{n \rightarrow \infty} n (\sqrt[n]{a} - 1) = \log a$.

11. Zbadać zbieżność ciągów:

- (a) $a_n = \sin \sqrt{n+1} - \sin \sqrt{n}$;
- (b) $a_n = \sin(\pi \sqrt{n^2 + n + 1})$;
- (c) $a_n = \cos(\pi \sqrt{n^2 + n + 1})$.

12. Obliczyć granice, korzystając z twierdzenia Stolza:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^5 + 2^5 + \dots + n^5}{n^6}$;
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^5 + 2^5 + \dots + n^5}{n^5} - \frac{n}{6} \right)$;
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right)$;
- (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$;
- (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2n-1)}{\sqrt[n]{(2n)!}}$.

13. Zbadać zbieżność ciągu określonego rekurencyjnie:

- (a) $x_0 > 0$ dane, $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$;
- (b) $x_0 > 0$ dane, $x_{n+1} = \frac{2}{1+x_n}$;
- (c) $x_0 \in]-1, 2[$ dane, $x_{n+1} = x_n(x_n - 1)$;
- (d) $x_0 > 1$ dane, $x_{n+1} = \frac{x_n - 2}{x_n - 1}$;
- (e) $x_0 = 0$, $x_{n+1} = \sqrt{2 - x_n}$.

14. Znaleźć $\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ oraz $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ dla:

- (a) $x_n = \frac{n-10}{n^2}$;
- (b) $x_n = \frac{n^2-3n}{5n^2-24n+36}$;
- (c) $x_n = \frac{n-E(\sqrt{n})^2+1}{E(\sqrt{n})}$;
- (d) $x_n = \frac{24}{n} + \frac{n}{10} - E\left(\frac{n}{10}\right)$.

15. Wyznaczyć kresy górny i dolny (o ile istnieją) zbiorów:

- (a) $A = \left\{ x + \frac{1}{2x} : 0 < a < x < b \right\}$;
- (b) $B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \left| \frac{x+4}{x+2} \right| < x \right\}$;
- (c) $C = \left\{ \frac{(1-a)(1-b)(1-c)}{abc} : a, b, c > 0 \wedge a + b + c = 1 \right\}$, Wskazówka: wykorzystać związek między średnimi: arytmetyczną, geometryczną i harmoniczną.
- (d) $D = \left\{ \frac{1}{\sqrt[n]{n}} + \frac{1}{\sqrt[n]{m}} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$.

Czy kresy należą do zbiorów?