

Analiza I B

Zadania domowe — seria 3

(20 listopada 2008)

1. Zbadać zbieżność i ewentualnie znaleźć granicę ciągu a_n :

- (i) $a_n = n[(n+1)^{\frac{1}{100}} - n^{\frac{1}{100}}]$, (ii) $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n - \sin a_n$,
(iii) $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{\pi}{2} \sin a_n$, (iv) $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}a_n^2 - \frac{1}{3}a_n^3$,
(v) $a_1 = 0, a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$.

2. Pokazać, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(x_n - 1) = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x_n^2)^{x_n - 1} = 1.$$

3. Sprawdzić, że:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^5 + 2^5 + \dots + n^5}{n^6} = \frac{1}{6}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^5 + 2^5 + \dots + n^5}{n^5} - \frac{n}{6} \right) = \frac{1}{2};$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right) = 2(\sqrt{2} - 1), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = 2,$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{1 \cdot 2} + \sqrt{2 \cdot 3} + \dots + \sqrt{n(n+1)}}{n} - \frac{n}{2} \right) = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}{n} = \frac{2}{e}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2n-1)}{\sqrt[n]{(2n)!}} = \frac{e}{2}$$

4. Zbadać ciągłość funkcji:

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(0) = 0, f(x) = n^\alpha \left(\frac{1}{n} - x \right) \left(x - \frac{1}{n+1} \right) \text{ dla } x \in \left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right], n = 1, 2, 3 \dots$$

5. Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji w zależności od parametrów $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ ax + b, & x < 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} ax + 1, & x \leq \pi/2 \\ \sin x + b, & x > \pi/2 \end{cases}$$
$$k(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + a^2}, & |x| > 1 \\ ax^2 + bx + c, & |x| \leq 1 \end{cases} \quad l(x) = \begin{cases} 1/|x|, & |x| > c \\ ax^2b, & |x| \leq c \end{cases}$$
$$s(x) = \begin{cases} ax + b, & x \leq 0 \\ \left(\frac{1}{x} \arcsin x \right)^{1/x^2}, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

6. Znaleźć pochodne dla następujących funkcji:

- (a) $(x^2 - 1)^5$ (b) $(1 + x^2)^{1/2}$ (c) $\sin(ax + b)$ (d) $\log \sin(x)$
(e) $\coth(x)$ (f) $\operatorname{artanh}(x)$ (g) $\arccos[(1 - x^2)^{1/2}]$
(h) $\operatorname{arctg}[\frac{x}{1-x^2}]$ (i) $(x^2 + 1)^{x+1/x}$
(j) $\arcsin \frac{1-x}{1+x}$ (k) $x(a^2 - x^2)^{1/2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}$
(l) $\frac{1+x^{1/3}}{1-x^{1/3}}$ (m) $\log \log x$

7. Stosując regułę de l'Hospitala lub wzór Taylora obliczyć granice:
- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{1 - \cos x}$ (c) $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x})$
 (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) - x}{x^2}$ (e) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}$ (f) $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x)$
 (g) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\pi/2 - \arctan x)^{\frac{1}{\log x}}$ (h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$ (i) $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2})^{\operatorname{tg} x}$
 (j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos 4x} - \sqrt[3]{\cos 5x}}{1 - \cos 3x}$ (k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{\log(\cos x)}$
 (l) $\lim_{x \rightarrow \infty} [\cos(x + \frac{1}{x}) - \cos(x - \frac{1}{x})]$
8. Wykazać, że
- (a) $2\sqrt{x} > 3 - 1/x$ dla $x > 1$ (b) $x^2 < \operatorname{tg} x \cdot \sin x$
 (c) $\operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arctg}[(1-x)/(1+x)] = \pi/4$ dla $x > -1$
 (d) $1 + x \log(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}$ (e) $\frac{1+x}{x} \operatorname{arctg}(x) \geq \pi/2$ dla $x > 1$
 (f) $\frac{\log x}{x-1} > \frac{2}{x+1}$ dla $0 < x \neq 1$
9. Znaleźć rozwinięcie Taylora wokół $x = 0$ dla:
- (a) $f(x) = (1+x)^{1/x}$ dla $x \neq 0$, $f(0) = e$ do rzędu trzeciego włącznie
 (b) $f(x) = (1 + \tanh(x))^\pi$ do rzędu trzeciego włącznie
 (c) $f(x) = (\sin x)^2 - x^2 e^{-x}$ do rzędu piątego włącznie
10. Zbadać i naszkicować przebieg funkcji:
- (a) $\frac{x^2+3x+11}{\sqrt{x^2+2}}$ (b) $(x+2)e^{1/x}$, $x \neq 0$ (c) $(x+1)\operatorname{arctg}(x)$
 (d) $\arcsin \frac{2x}{x^2+1}$ (e) $\sin(x)e^{\cos(x)}$ (f) $\frac{x^3}{(x+3)(5-x)}$, $x \in]-3, 5[$
 (g) $x - \sqrt{x+2}$, $x > -2$ (h) $\frac{|x-1|x+(x-1)|x|}{x^2-1}$
11. Wykazać tożsamość $3 \arccos x - \arccos(3x - 4x^3) = \pi$ dla $|x| \leq \frac{1}{2}$.
12. Wykazać, że wielomian $W_n(x) = \exp(x) \frac{d^n}{dx} (x^n \exp(-x))$ ma n różnych rzeczywistych, dodatnich pierwiastków.
13. Funkcja różniczkowalna $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunki $|f'(x)| \leq A|f(x)|$, $f(a) = 0$. Pokazać, że $f \equiv 0$.
14. Dla jakich $a, b \in \mathbb{R}$ funkcja: $] -1, 1[\ni x \rightarrow f(x) = \begin{cases} ax + b & x \leq 0 \\ \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} & x > 0 \end{cases}$ jest różniczkowalna?
15. Znaleźć $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(\sin(x-1)) - \cos(x-1)}{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln |\sin(ax)|}{\ln |\sin(bx)|}$.
16. Wykazać nierówności $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ dla $x > 0$.