

Krótkie wprowadzenie do zagadnienia inflacji w kosmologii

Ryszard Paweł Kostecki

rpkost@fuw.edu.pl

Zakład Teorii Względności i Grawitacji

Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

1 czerwca 2004

z pewnymi poprawkami 13 listopada 2004

Abstract

This paper is a short introduction to a cosmological inflationary model: starting from the basic cosmological observations, through the applications of general relativity in the cosmology and problems of a standard non-inflationary cosmology, up to the inflationary potential.

Spis treści

1 Kosmologia obserwacyjna	2
1.1 Przesunięcie ku czerwieni	2
1.2 Świece standardowe	3
1.3 Kosmiczne promieniowanie tła	3
2 Kosmologia w języku ogólnej teorii względności	3
2.1 Od równania Einsteina do równania Friedmanna	3
2.2 Stała kosmologiczna	5
2.3 Modele kosmologiczne dla $\Lambda = 0$	6
3 Problemy w standardowej kosmologii	6
3.1 Problem płaskości	6
3.2 Problem horyzontu	7
4 Rozwiązanie problemów: inflacja	7
4.1 Idea	7
4.2 Model inflacji	8
4.2.1 Pole skalarne	8
4.2.2 Slow roll	8
4.2.3 Liczba <i>e-folds</i>	9
4.2.4 Konkretny potencjał inflacyjny	9
4.3 Scenariusz inflacji	11
4.4 Inflacja a niejednorodności CMB	11

II DAMA (ubrana czerwono, pada na kolana zwrócona twarzą ku drzwiom na lewo): Tam jest ON! Nasz władca! Jedyny pan wszystkich żywiołów i bezkresnych pól ogólnej grawitacji.

II BABA: Wariatka! ona myśli, że nikt z nas nie zna teorii Einsteina. Teraz już w szkole średniej uczą bezwzględnego rachunku różniczkowego.

I BABA: Niech żyje Gauss! Niech żyją ogólne spólrzędne! Wszyscy wiemy już, co to są tensory!!!

II DAMA (bijąc pokłony pod drzwiami): Chciałabym się zaczekać na śmierć! Myślę, że lecę z nieskończoną szybkością w otchłań absolutnej pewności. Każda sekunda jest nieskończonością!

I PAN W CYLINDRZE: A ja mam dosyć! Chodźmy wszyscy do jego gabinetu i powiedzmy mu, że nie wytrzymamy.

Witkacy, Guybal Wahazar,
czyli Na przełęczach BEZSENSU

1 Kosmologia obserwacyjna

Ponieważ to dane, a nie teorie, opisują rzeczywisty wszechświat, zaś modele teoretyczne są to jedynie formalizmy struktur opisujących – i mających za zadanie tłumaczyć – zbiory danych pomiarowych, omówię wpieryw (dość pobieżnie, niestety) podstawowe fakty i obserwacje będące kluczowymi we współczesnej kosmologii. Szczegółowe rozważania niżej wymienionych kwestii można znaleźć w książkach [11], [1] oraz [5], [6] a także w artykule [8].

1.1 Przesunięcie ku czerwieni

Hubble w 1929 roku, obserwując widmo światła emitowanego w najbliższych galaktykach przez pewien typ gwiazd zmiennych (cefeidy typu δ -Cephei), stwierdził, że ich widmo przesunięte jest ku czerwieni tym bardziej, im obserwowane galaktyki położone są dalej od Ziemi. Okresy zmian jasności dla tego typu gwiazd zależą od ich jasności absolutnych, dzięki czemu można wyznaczać odległość tych gwiazd od Ziemi (również dla cefeid położonych w innych galaktykach). Przesunięcie ku czerwieni (po angielsku zwane *redshift*), czyli wydłużenie charakterystycznych długości światła emitowanego przez wzbudzone atomy, daje się wytłumaczyć jako skutek efektu Dopplera – względnego ruchu obserwatora i źródła. Pod presją powszechnie uznawanej tzw. zasady kosmologicznej, głoszącej, iż żaden obserwator we wszechświecie (a zatem i Ziemia) nie znajduje się w wyróżnionym punkcie, należało stwierdzić, że każdy obserwator w dowolnym punkcie wszechświata będzie obserwował przesunięcie ku czerwieni, a zatem: każde dwie galaktyki oddalają się od siebie. Proces ten można sobie wyobrazić jako zwiększanie się promienia sfery, na powierzchni której, jako punkty, rozmieszczone są galaktyki, przy czym punkty bardziej odległe będą oddalać się szybciej od siebie. A zatem światło docierające do konkretnej gwiazdy (np. Słońca) z reszty wszechświata będzie przesunięte ku czerwieni, tym silniej, im emitujące je źródło jest położone dalej od obserwatora. W takim właśnie sensie mówi się o “rozszerzaniu wszechświata”.¹

Do zmierzonych danych Hubble’owi udało się (ze względu na wielkość błędów pomiarowych, raczej wysiłkiem woli, niżli uczciwą analizą) dopasować przybliżoną zależność, opisującą rozszerzanie się wszechświata:

$$\dot{x} \approx Hx, \quad (1)$$

zwaną prawem Hubble’a. We wzorze tym \dot{x} oznacza prędkość ucieczki galaktyki (czyli prędkość z jaką oddala się ona od nas), x to jej odległość od Ziemi, zaś współczynnik proporcjonalności pomiędzy tymi wielkościami, H , jest w przybliżeniu stały i zwany jest współcześnie stałą Hubble’a.

¹ Często w kontekście procesu ucieczki galaktyk ilustruje się rozszerzanie wszechświata jako rozszerzanie balonika z galaktykami na powierzchni. Promień tego balonika rozszerza się wraz z upływem czasu (w zależności od czynnika skali – o którym za chwilę).

1.2 Świece standardowe

Świece standardowe to obiekty astronomiczne, których jasność bezwzględną można dobrze określić, a zatem – znając charakterystykę światła dochodzącego od nich do Ziemi, oraz charakterystykę światła wypromieniowywanego, można określić ich prędkość ucieczki (poprzez przesunięcie ku czerwieni). Świecami standardowymi na małych odległościach (do 52 mln lat świetlnych) są cefeidy – gwiazdy zmienne, które mają jednoznaczną zależność między okresem zmienności a jasnością. Na większych odległościach jako świec standardowych używa się supernowych typu Ia – dla nich istnieje w miarę jednoznaczna zależność między charakterem wybuchu, a charakterystyką światła emitowanego.

1.3 Kosmiczne promieniowanie tła

Opierając się na prawie Hubble’a można przeprowadzić ekstrapolację wstecz historii wszechświata, otrzymując coraz mniejsze odległości między punktami,² oraz coraz większe temperatury (oraz – w zależności od temperatury – charakterystyczny stan materii oraz energie fotonów, określającą typ promieniowania):

T	t	stan substancji	promieniowanie
10^{15} K	10^{-12} s	plazma gluonowo-kwarkowa	
10^{13} K	10^{-6} s	neutrony + protony + promieniowanie	γ
10^{10} K	3 minuty	jądra atomowe	
3000 K	$3 \cdot 10^5$ lat	lekkie atomy	UV
10 K	10^9 lat	galaktyki	
3 K	10^{10} lat	dzisiaj	mikrofale

Kiedy temperatura spadła poniżej 3000 K, nastąpiła epoka rozprężania, czyli koniec oddziaływania promieniowania z materią. Promieniowanie, na skutek rozszerzania się wszechświata, miało wówczas już tak niską energię, iż nie mogło już rozbijać atomów – a zatem praktycznie nie oddziaływało z materią.³ Od tego momentu ilość promieniowania we wszechświecie (prawie) się nie zmienia, a jego temperatura systematycznie obniża się ze względu na ekspansję wszechświata. Dziś promieniowanie tła ma długości rzędu mikrometrów, oraz temperaturę 2.73 K.⁴ Zwie się je kosmicznym mikrofalowym promieniowaniem tła, bądź w skrócie: CMB (ang.: *cosmic microwave background*).

2 Kosmologia w języku ogólnej teorii względności

2.1 Od równania Einsteina do równania Friedmanna

Centralnym równaniem ogólnej teorii względności jest równanie Einsteina:⁵

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (2)$$

gdzie G to Newtonowska stała grawitacyjna, $T_{\mu\nu}$ jest tzw. tensorem energii-pędu, określającym rozkład gęstości energii i pędu w czasoprzestrzeni, zaś $G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}(g_{\mu\nu}, \partial g_{\mu\nu}/\partial x^\alpha, \partial^2 g_{\mu\nu}/\partial x^\beta \partial x^\gamma)$ jest tzw. tensorem Ein-

²Tu znowu rodzi się pewna wątpliwość: dlaczego współcześnie obserwujemy inflację pomiędzy punktami-galaktykami, zaś niegdyś miałyby to być inflacja pomiędzy punktami-atomami czy też punktami-kwantami (czyli punktami-punktami)? Można to tłumaczyć mówiąc, iż grawitacyjne oddziaływanie wewnątrz galaktyk (już po ich uformowaniu) jest tak silne, że “powstrzymuje” inflację na poziomie galaktyk, lecz wciąż brakuje dobrego modelu dynamiki okresu przejściowego pomiędzy erą lekkich atomów a erą galaktyk.

³Uwaga: w epoce rozprężania istniały tylko lekkie atomy: H, D, T, ⁴He, ³He, ⁶Li, ⁷Li. Wszystkie cięższe atomy jakie spotykamy we wszechświecie (w tym na Ziemi) powstały w wyniku znacznie późniejszych eksplozji supernowych.

⁴Właśnie te dane zmierzył zimą 1989/1990 satelita COBE, uzyskując wyśmienitą – wręcz zdumiewającą – zgodność pomiarów z wcześniejszymi przewidywaniami teoretycznymi.

⁵W całym tym tekście przyjmuję układ jednostek $c = \hbar = 1$.

steina, zależnym od metryki, oraz jej pierwszych i drugich pochodnych po współrzędnych. Równanie to wyraża zależność pomiędzy geometrią wszechświata a cechami konstytutywnymi wypełniającej go substancji: gęstością i ciśnieniem (metryka bowiem, konieczna do wyznaczenia długości dowolnego wektora w czasoprzestrzeni⁶, zadaje tym samym jej kształt). Dla jednorodnego (tj. niezmienniczego ze względu na przesunięcia, czyli transformację $x^i \rightarrow x^i + a^i$) oraz izotropowego (niezmienniczego względem obrotów, czyli transformacji $\vec{r} \rightarrow \vec{\theta} \times \vec{r}$) rozkładu materii we wszechświecie tensor energii-pędu przyjmuje prostą postać:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)_{00} - pg_{\mu\nu}, \quad (3)$$

gdzie ρ oznacza gęstość materii, p – ciśnienie materii, natomiast $(\rho + p)_{00}$ oznacza tensor o składowej T_{00} równej $\rho + p$, zaś pozostałych składowych równych zero. Aby zachować niezmienniczość równania Einsteina, określone wyżej symetrie musi spełniać również tensor metryczny. Najbardziej ogólny interwał czasoprzestrzenny spełniający ten warunek ma postać:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dx^2, \quad (4)$$

gdzie $a(t)$ zwie się funkcją skalującą, lub czynnikiem skali – *scale factor* (w istocie pomiędzy tymi dwoma pojęciami jest subtelna różnica: czynnik skali jest zdefiniowany jako wartość funkcji skalującej $a(t)$ dla konkretnego t). W funkcji skalującej zawarta jest cała dynamika wszechświata, zaś w iloczynie skalarnym dx^2 zakodowana jest krzywizna przestrzeni. Przestrzeń może być euklidesowa ($dx^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$), zakrzywiona dodatnio, lub ujemnie:

$$dx^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2}{(1 + \frac{kr^2}{4})^2}. \quad (5)$$

Stała k występująca w powyższym równaniu opisuje krzywiznę wszechświata: $k = -1$ jest tożsame krzywiznie ujemnej, $k = +1$ dodatniej, zaś $k = 0$ płaskiej. Dla przestrzeni euklidesowej (czyli płaskiej) tensor metryczny przyjmuje prostą postać:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -a^2(t) & & \\ & & -a^2(t) & \\ & & & -a^2(t) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Metryka ta zwie się metryką Friedmanna-Robertsona-Walkera (FRW). Dla ogólniejszego przypadku metryki (4) równania Einsteina przyjmują prostą postać:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (7)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (8)$$

Pierwsze z tych równań nazywa się równaniem Friedmanna, zaś drugie – to równanie ewolucji wszechświata. Współczynnik $\frac{\dot{a}}{a}$ oznacza się jako H i nazywa stałą Hubble’a (bo tą właśnie stałą we wzorze (1) zmierzył Hubble⁷). Warto zauważyć, iż druga pochodna czynnika skali zależy od zależności między gęstością ρ i ciśnieniem p . Parametry te opisują “ciecz kosmologiczną”, tj. substancję która wypełnia wszechświat. Zależność pomiędzy nimi nie daje się wyznaczyć z teorii grawitacji i musi być określona z zewnątrz. Zwykle zależność pomiędzy ciśnieniem a gęstością podaje się w postaci równania stanu:

$$p = w\rho. \quad (9)$$

Dla materii w zastosowaniach kosmologicznych przyjmuje się $w = 0$ (oznacza to traktowanie galaktyk jako pyłu o zerowym ciśnieniu!), zaś dla promieniowania elektromagnetycznego $w = 1/3$. Również zależność od czasu,

⁶Gwoli przypomnienia: metryka jest to dwuforma (czyli tensor dwukrotnie kowariantny) dodatnio określona (czyli nie przyjmuje wartości ujemnych) biliniowa (czyli liniowa dla każdego z dwóch argumentów) i symetryczna (względem przestawienia argumentów). Dla czasoprzestrzeni szczególnej teorii względności (czyli przestrzeni Minkowskiego) metryka ma postać diagonalną (tylko wyrazy diagonalne są niezerowe): $g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$, zaś dla przestrzeni Euklidesa, tej w której zawsze jest słuszne stare dobre twierdzenie Pitagorasa, $g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Czasoprzestrzeń pozbawiona metryki jest tylko zbiorem punktów. Dopiero nałożenie na niego pola tensora metrycznego nadaje mu kształt (pomijam tu bardziej subtelny problem topologii).

⁷Choć z powyższych rozważań nie wynika jeszcze wcale, iż “stała Hubble’a” jest stałą!

zarówno $\varrho(t)$, jak i $a(t)$ musi być zadana z zewnątrz, jakkolwiek wystarczy zadać jedną z nich, na mocy równania (8) lub (11).

Z tak zwanej – czysto matematycznej – tożsamości Bianchi dla tensora Riemanna wynika, iż $D_\mu G_{\mu\nu} = 0$. Korzystając z tej równości oraz z równania Einsteina otrzymujemy równanie ciągłości dla tensora energii-pędu:

$$D_\mu T_{\mu\nu} = 0. \quad (10)$$

Podstawiając pod $T_{\mu\nu}$ równanie (3), otrzymujemy:

$$\dot{\varrho} + 3(p + \varrho)\frac{\dot{a}}{a}. \quad (11)$$

Powyższe równanie jest równaniem różniczkowym pierwszego rzędu i zadaje zależność pomiędzy funkcjami $\varrho(t)$ oraz $a(t)$.

2.2 Stała kosmologiczna

Dla każdego $\Lambda = \text{const}$ spełniona jest równość:

$$D_\mu (g_{\mu\nu}\Lambda) = 0. \quad (12)$$

A zatem jest również spełnione następujące równanie ciągłości:

$$D_\mu T_{\mu\nu} = D_\mu (T_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Lambda) = 0. \quad (13)$$

Ponieważ Λ jest stałą (dowolną), mamy:

$$g_{\mu\nu}\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda & & & \\ & -a^2(t)\Lambda & & \\ & & -a^2(t)\Lambda & \\ & & & -a^2(t)\Lambda \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Jeśli założymy na moment, że jedyną substancją tworzącą wszechświat jest stała kosmologiczna Λ , to korzystając z równań (3) oraz (14) mamy:

$$g_{\mu\nu}\Lambda = (\varrho + p)_{00} - pg_{\mu\nu}, \quad (15)$$

$$g_{\mu\nu}(\Lambda + p) = \begin{pmatrix} \Lambda + p & & & \\ & -a^2(t)(\Lambda + p) & & \\ & & -a^2(t)(\Lambda + p) & \\ & & & -a^2(t)(\Lambda + p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varrho + p & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

stąd:

$$\Lambda = \varrho = -p. \quad (17)$$

A zatem równanie dla stałej kosmologicznej w metryce FRW ma współczynnik $w = -1$. W sytuacji, w której stała kosmologiczna nie jest jedyną substancją wypełniającą wszechświat, zależność pomiędzy gęstością a ciśnieniem nie jest już taka prosta, bowiem $\varrho(t) = \sum_i \varrho_i(t)$ oraz $p(t) = \sum_i p_i(t)$, gdzie i indeksuje różne typy substancji, zaś każde p_i i ϱ_i są powiązane własnym równaniem stanu. W praktyce rozważa się epoki “dominacji materii” czy też “dominacji stałej kosmologicznej”, kiedy to odpowiednie substancje wnoszą największy, dominujący wkład do równania stanu wszechświata.

2.3 Modele kosmologiczne dla $\Lambda = 0$

Zdefiniujmy gęstość krytyczną ϱ_k oraz parametr Ω wyrażający stosunek gęstości energii wszechświata do gęstości krytycznej:

$$\varrho_k := \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad (18)$$

$$\Omega := \frac{\varrho}{\varrho_k} = \frac{8\pi G\varrho}{3H^2}. \quad (19)$$

Korzystając z tej definicji można przepisać równanie Friedmanna do postaci:

$$\varrho - \varrho_k = \frac{3k}{8\pi G a^2}. \quad (20)$$

To równanie pokazuje możliwość wystąpienia trzech charakterystycznych sytuacji:

Ω	ϱ	k	perspektywy eschatologiczne	skutek ostateczny
> 1	$> \varrho_k$	> 0	$\exists t < \infty : H^2 = 0$	kurczenie i kolaps
$= 1$	$= \varrho_k$	$= 0$	$\lim_{t \rightarrow \infty} (H^2, \varrho) = 0$	w ∞ statyczność
< 1	$< \varrho_k$	< 0	$\forall t : H^2 > 0$	∞ ekspansja

Pierwsza sytuacja odpowiada wszechświatowi, który w pewnym momencie zacznie się kurczyć, aż do zapadnięcia się, druga – wszechświatowi rozszerzającemu się coraz wolniej i statycznemu w nieskończoności, trzeci – niekończącej się ekspansji wszechświata. Dla sytuacji w której $\Lambda \neq 0$ zależność pomiędzy perspektywami eschatologicznymi a krzywizną wszechświata nie jest już tak trywialna. Analiza różnych możliwości znajduje się w pracy [10].

3 Problemy w standardowej kosmologii

3.1 Problem płaskości

Wnioski doświadczalne, oparte na obserwacjach oddalania się gromad galaktyk (w widmie promieniowania X), galaktyk (w widmie widzialnym i radiowym), wybuchów supernowych, oraz kosmicznego promieniowania tła (patrz: [5], [3]) są następujące:

Obserwowany stosunek gęstości wszechświata do gęstości krytycznej wynosi:

$$\Omega \approx 1 \pm 0.05, \quad (21)$$

przy czym maksymalny wkład do gęstości wszechświata pochodzący od jakiejkolwiek materii wynosi:

$$\Omega_{\text{mat}} \approx (0.25 \div 0.3)\Omega. \quad (22)$$

Obliczenia (poparte obserwacjami) ilości materii powstałej w wyniku pierwotnej nukleosyntezy dają $(0.04 \div 0.05)\Omega$, z czego tylko 0.005Ω znajduje się w obserwowalnych gwiazdach – reszta w materii barionowej poza gwiazdami. Pozostałe $(0.2 \div 0.25)\Omega$ nazywa się ciemną materią i obserwuje pośrednio jako nie dające się inaczej wytłumaczyć zaburzenia grawitacyjne w ruchu świecącej materii. Takie konstatacje oparte są na wielu, przynajmniej częściowo niezależnych, obserwacjach oraz obliczeniach które zmierzają do współzgodnienia. Przykładowo: obserwacje prędkości ucieczki galaktyk w ramach programu 2dFGRS (*2 degree Galactic Redshift Survey*) dają się uzgodnić z danymi CMB oraz modelami ewolucji galaktyk tylko gdy uzna się, iż wszelka materia ma jedynie $(0.25 \div 0.3)\Omega$. Brakujący wkład do obserwowanej gęstości wszechświata przypisuje się więc stałej kosmologicznej:

$$\Omega_{\Lambda} \approx (0.7 \div 0.75)\Omega. \quad (23)$$

Korzystając z równania Friedmanna:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (24)$$

podstawiając w nim $k \approx 0$, czyli $\Omega \approx 1$, oraz zakładając, że gęstość materii (opisana równaniem stanu $p = w\rho$) ewoluuje wraz z ekspansją proporcjonalnie do czynnika skali w sposób natępujący (zależność ta odzwierciedla zależność między objętością a gęstością dla substancji):

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}, \quad (25)$$

(gdzie a to oczywiście czynnik skali rozszerzania się wszechświata: $ds^2 = dt^2 - a^2(t)d\mathbf{x}^2$), mamy:

$$\frac{d\Omega}{d \log a} = (1 + 3w)\Omega(\Omega - 1). \quad (26)$$

Równanie to opisuje ewolucję Ω wraz z ekspansją wszechświata. Dla równania stanu takiego, że $1 + 3w > 0$, spełnianego przez każdą zwykłą materię (dla której $w = 0$), mamy:

$$\frac{d|\Omega - 1|}{d \log a} > 0. \quad (27)$$

Znaczy to, że jeśli teraz $\Omega \approx 1 \pm 0.05$, to podczas rekombinacji $\Omega \approx 1 \pm 0.00004$, zaś podczas nukleosyntezy $\Omega \approx 1 \pm 10^{-12}$. Zatem wszechświat musiał być bardzo, baaardzo płaski na początku. Tej początkowej płaskości na gruncie standardowego modelu kosmologicznego nie daje się wyjaśnić.

3.2 Problem horyzontu

W klasycznym modelu kosmologicznym (tj. bez inflacji) przeciwległe punkty na niebie nigdy nie mogły mieć ze sobą związku przyczynowego, stąd nie mogły być w równowadze termodynamicznej. Jednakże wyniki pomiarów CMB stwierdzają jednorodność promieniowania tła nadchodzącego ze wszystkich kierunków, z dokładnością do 10^{-5} . Fakt ten – sugerujący niegdysiejszą równowagę termodynamiczną tych obszarów (a zatem kontakt przyczynowo-skutkowy) – pozostaje bez wyjaśnienia na gruncie klasycznej kosmologii.

4 Rozwiązanie problemów: inflacja

4.1 Idea

Alan Guth w 1980 roku zauważył, że jeśli istniała epoka w której rozszerzanie się wszechświata nie malało, lecz przyspieszało w swym tempie, to w epoce tej zachodziło zjawisko wypłaszczenia się wszechświata, co znaczy że $\Omega \rightarrow 1$ wraz ze wzrostem czynnika skali $a(t)$.

Weźmy równanie opisujące ekspansję wszechświata:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -(1 + 3w)\frac{4\pi G}{3}\rho. \quad (28)$$

Jeśli wszechświat przyspiesza, to $\ddot{a} > 0 \Leftrightarrow 1 + 3w < 0$, a wówczas:

$$\frac{d|\Omega - 1|}{d \log a} < 0. \quad (29)$$

A zatem wszechświat był w czasie nukleosyntezy – według modelu inflacyjnego – tak płaski dlatego, że w trakcie inflacji przyspieszona ekspansja rozděła jego zakrzywienie, wypłaszczając je do krzywizny równej (prawie) zero.

Natomiast problem horyzontu zostaje w inflacyjnym modelu rozwiązany poprzez stwierdzenie, że akceleracja była na tyle duża, iż stosunkowo mały obszar, pozostający wewnątrz siebie w kontakcie przyczynowo-skutkowym (a zatem w termicznej równowadze), rozděła do całego obserwowanego wszechświata.

Można policzyć [8], że wymagany wzrost czynnika skali wynosi co najmniej:

$$\frac{\delta a}{a} \sim \frac{T_A}{T_B} \frac{d_H(t_A)}{d_H(t_B)} \sim 10^{24} \sim e^{55}, \quad (30)$$

gdzie T oznacza temperaturę, d_H oznacza rozmiar horyzontu (obserwowalnego wszechświata⁸), t_A oznacza czas początku inflacji, zaś t_B – czas końca.

Należy zauważyć, że inflacyjne przyspieszanie rozszerzania się wszechświata realizowane jest przez założenie warunku na równanie stanu: $1 + 3w < 0$. Zwykła materia ma natomiast równanie stanu: $1 + 3w > 0$. Jako najprostsze rozwiązanie tego problemu proponuje się, by stała kosmologiczna Λ zmieniała się [sic!] wraz z upływem czasu – tak, by w fazie inflacji była dużo większa niż teraz. Ponieważ dla stałej kosmologicznej $w = -1$ (patrz: równanie (17)), to przy założeniu, iż $\rho_{\text{mat}} \ll \rho_{\Lambda}$, zostaje spełniony warunek $1 + 3w < 0$ w równaniu ekspansji.

Można zatem inflację przedstawić jeszcze prościej (choć mniej ściśle): ponieważ Λ jest członem dominującym w równaniu ekspansji i równaniu Friedmanna, to zaniedbać można w nim zwykłą materię, pisząc:

$$\frac{\ddot{a}}{a} \approx \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \approx \frac{\Lambda}{3} \approx H_{\Lambda}^2, \quad (31)$$

zatem:

$$a_B(t_B) = a_A e^{H_{\Lambda}(t_B - t_A)}. \quad (32)$$

Oczywiście zmienna stała kosmologiczna jest niedopuszczalnym nagięciem równań Einsteina, dlatego też powyższy pomysł można potraktować jedynie jako ilustrację tego, jak inflacja mogłaby się przejawiać. Ścisłą implementację inflacji otrzymuje się dopiero przez wprowadzenie pola skalarnego – tak zwanego potencjału inflacyjnego.

4.2 Model inflacji

4.2.1 Pole skalarne

Inflacja realizowana jest poprzez założenie istnienia pola skalarnego minimalnie sprzężonego z grawitacją, o potencjale $V(\varphi)$ oraz lagranżjanie:

$$\mathcal{L}_{\varphi} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_{\mu} \varphi \partial_{\nu} \varphi - V(\varphi), \quad (33)$$

gdzie $g_{\mu\nu}$ jest metryką FRW (patrz: (6)). W ten sposób zmiana potencjału φ powoduje zmianę metryki. Równanie ruchu (otrzymane standardową procedurą poprzez równania Eulera-Lagrange'a) dla tego pola jest następujące:

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0, \quad (34)$$

gdzie stała Hubble'a determinuje tłumienie wzrostu φ ze względu na rozszerzanie się wszechświata.

4.2.2 Slow roll

Zauważmy, że dla $\Omega \approx 1$ równanie Friedmanna przyjmuje postać:

$$H^2 \approx \frac{8\pi G \rho}{3} = \frac{8\pi \rho}{3m_{pl}^2}, \quad (35)$$

⁸Aktualnie – około kilkunastu miliardów lat świetlnych.

gdzie m_{pl} to masa Plancka⁹, zaś gęstość energii ϱ wynosi:

$$\varrho = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi). \quad (36)$$

Zatem:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3m_{pl}^2} \left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi)\right). \quad (37)$$

Jeśli $\dot{\varphi} \rightarrow 0$, to $\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \rightarrow \frac{8\pi}{3m_{pl}^2} V(\varphi) = H^2 = \text{const}$. Zatem:

$$a(t) \propto e^{Ht}, \quad (38)$$

czyli wszechświat rozszerza się eksponencjalnie. Wynik ten jest analogiczny do wyniku (32). Rozumowanie to można uogólnić do przypadku pola $\varphi = \varphi(t)$ (zależnego nieznacznie od czasu). Dla takiego pola $\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 \ll V(\varphi)$, zaś równanie ruchu można przepisać do postaci:

$$3H\dot{\varphi} + V'(\varphi) \approx 0, \quad (39)$$

natomiast równanie ekspansji przyjmuje postać:

$$H^2(t) \approx \frac{8\pi}{3m_{pl}^2} V(\varphi(t)). \quad (40)$$

Zatem czynnik skali (rozmiar wszechświata) ewoluuje następująco:

$$a(t) \propto \exp \int H dt. \quad (41)$$

Uogólnienie to znane jest pod nazwą powolnego staczania się (*slow roll*).

4.2.3 Liczba *e-folds*

Jeśli podczas inflacji potencjał inflacyjny jest wystarczająco płaski (na tyle, by zaniedbać $\ddot{\varphi}$), to równanie ruchu pola przyjmuje postać:

$$\dot{\varphi} \approx -\frac{1}{3H} \frac{\partial V}{\partial \varphi}. \quad (42)$$

Liczba powiększeń czynnika skali o czynnik e (czyli tzw. *number of e-folds*), jest dana wzorem:

$$N = \int_{t_A}^{t_B} H dt \approx \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \frac{H}{\dot{\varphi}} d\varphi \approx -3 \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \frac{H^2}{\partial V / \partial \varphi} d\varphi \approx -\frac{8\pi}{m_{pl}^2} \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \frac{V(\varphi)}{\partial V / \partial \varphi} d\varphi. \quad (43)$$

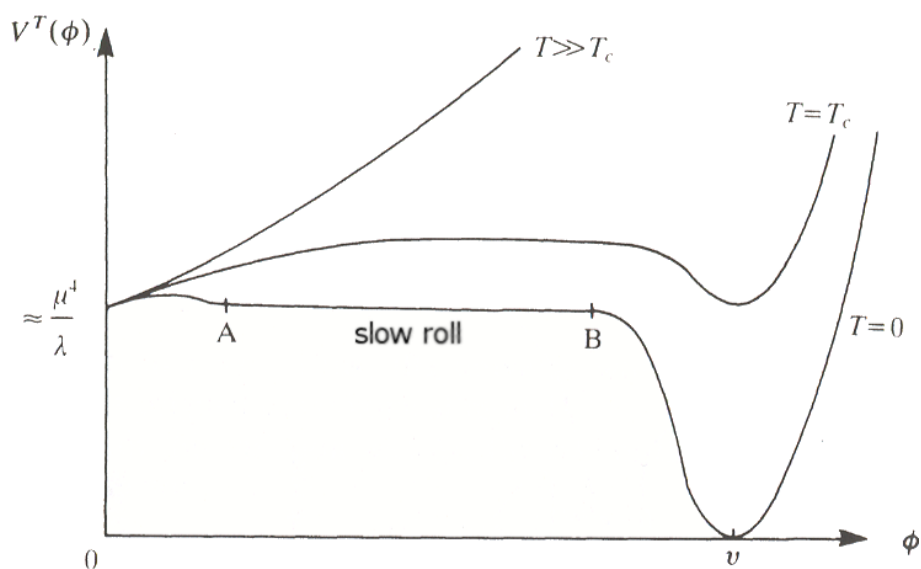
4.2.4 Konkretny potencjał inflacyjny

W zależności od tego, jaki konkretnie potencjał wybierzemy by zamodelować inflację, otrzymamy różne (jak można zobaczyć powyżej) wyniki przebiegu inflacji. Wyniki te będą jednak posiadać pewne charakterystyczne cechy. Typowym potencjałem w tych zastosowaniach jest potencjał Higgsa:

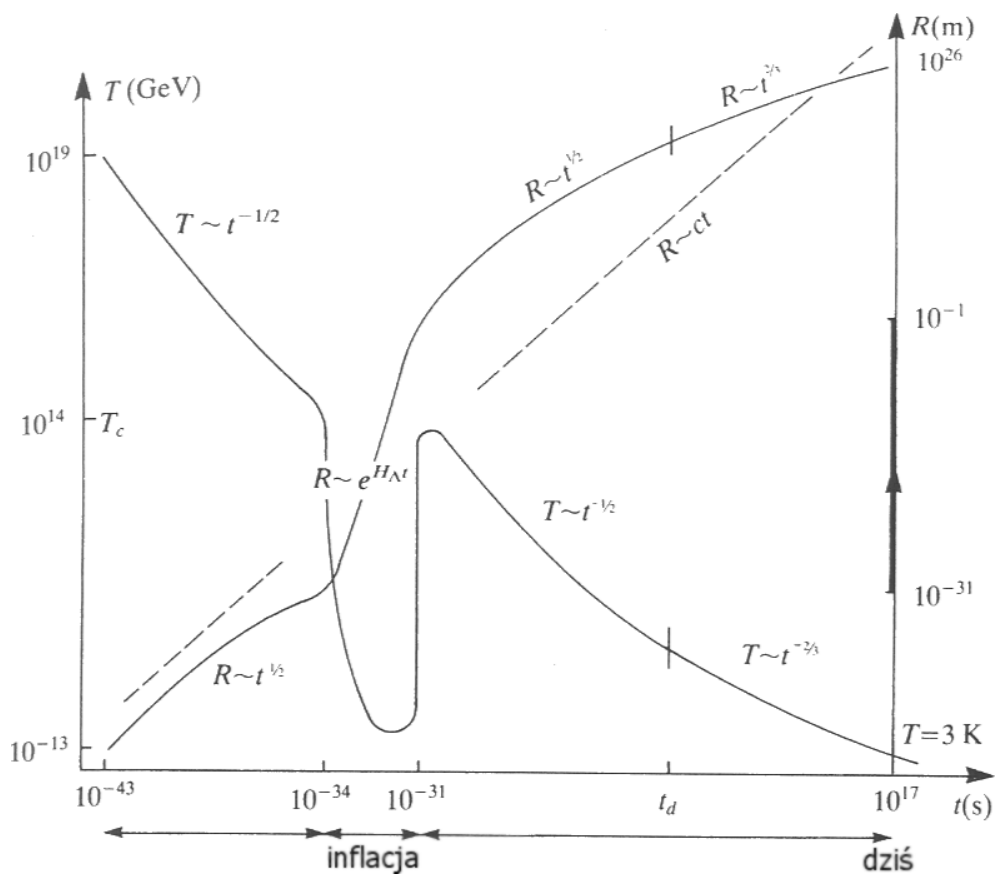
$$V(\varphi) = -\frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + \frac{1}{4}\lambda\varphi^4. \quad (44)$$

Potencjał taki zwykle rozszerza się o zależność od temperatury (konkretne przykłady w [8], [3], [2]). Charakterystyczny wykres potencjału inflacyjnego ma dwa minima w obszarze $\varphi \in [0, \infty]$ – jedno w zerze, zaś drugie, pojawiające i obniżające się wraz ze spadkiem temperatury, gdzieś na dodatniej półosi. Wykres typowego potencjału inflacyjnego przedstawiony jest na rysunku 1, natomiast na rysunku 2 przedstawiony jest inflacyjny scenariusz dla zmian temperatury i rozmiarów wszechświata (rysunki te zostały zaadaptowane z pracy [3]).

⁹Zależność $G = 1/m_{pl}^2$ wynika z przyjętego układu jednostek $\hbar = c = 1$.



Rysunek 1: Potencjał inflacyjny $V(\varphi)$ i jego zależność od temperatury. Przyjmuje się powszechnie, iż dla $T < T_c$ “garb” potencjału został przekroczony na skutek kwantowego tunelowania lub/i fluktuacji termicznych (wymaga to już zaangażowania w rozważania termodynamicznej kwantowej teorii pola). Innymi słowy, podczas ochładzania się wszechświata, pole inflacyjne φ zyskuje nowe minimum, dzięki któremu pojawia się inflacja.



Rysunek 2: Historia wszechświata w obliczu modelu inflacyjnego.

4.3 Scenariusz inflacji

Ostateczny szkicowy scenariusz inflacyjnej kosmologii wygląda zatem następująco:

1. Wartość pola φ minimalizuje lagranżjan \mathcal{L}_φ , a w szczególności jego potencjał $V(\varphi)$, który dla wysokiej temperatury we wszechświecie ma jedyne minimum w zerze.
2. Temperatura obniża się wskutek konwencjonalnego rozszerzania się wszechświata.
3. Dla $T = T_c$ "pole φ tuneluje" (wskutek termicznych, lub kwantowych fluktuacji), czyli wyskakuje z minimum potencjału w $V(\varphi = 0) = 0$.
4. Pole stacza się "w dół" potencjału (czyli wartość φ we wszechświecie w określonym czasie zmienia się zgodnie z przebiegiem wykresu potencjału inflacyjnego), co powoduje bardzo szybką ekspansję wszechświata (*slow roll*), skutkiem czego zachodzi szybki spadek gęstości i temperatury.
5. Pole dochodzi do punktu ostrego spadku potencjału: jest to koniec inflacji i koniec fałszywej próżni.
6. Energia zmagazynowana w polu Higgosa φ (fałszywej próżni) jest emitowana w postaci strumieni cząstek i promieniowania: następuje ponowne podgrzanie wszechświata (*reheating*). Wartość potencjału Higgosa $V(\varphi)$ spada do zera (minimum).
7. Następuje dalsze, "konwencjonalne", rozszerzanie się wszechświata.

4.4 Inflacja a niejednorodności CMB

Hipoteza inflacji stara się również wytłumaczyć problem niejednorodności CMB. Otóż w stożku świetlnym każdego obserwatora znajdującego się w dowolnym punkcie wszechświata pojawiają się i anihilują cząstki pochodzące z wirtualnych par cząstka-antycząstka. Jednak, gdy wszechświat rozszerza się szybciej niż prędkość światła (a tak jest w każdym modelu inflacyjnym), to składniki wirtualnych par dostają się do obszarów przyczynowo ze sobą niepowiązanych i anihilują tam z obiektami, znajdującymi się w stożkach świetlnych lokalnych obserwatorów, dla których promieniowanie pochodzące z tego procesu jawi się jako nadchodzący ze wszystkich kierunków szum termiczny. Szum ten, rozciągnięty przez rozszerzanie się wszechświata, stanowić ma właśnie owe niejednorodności CMB.

Literatura

- [1] Hermann Bondi. *Kosmologia*. PWN, Warszawa, 1965.
- [2] Edward W. Colb and Michael S. Turner. *The Early Universe*. Addison-Wesley, New York, 1990.
- [3] P. D. B. Collins, A. D. Martin, and E. J. Squires. *Particle Physics and Cosmology*. Wiley, 1989.
- [4] Marek Demiański. *Astrofizyka relatywistyczna*. PWN, Warszawa, 1978.
- [5] Donald Goldsmith. *Największa pomyłka Einsteina?* Prószyński i S-ka, Warszawa, 1998.
- [6] Alan H. Guth. *Wszechświat inflacyjny*. Prószyński i S-ka, Warszawa, 2000.
- [7] Michał Heller. *Kosmologia kwantowa*. Prószyński i S-ka, Warszawa, 2001.
- [8] William H. Kinney. *Cosmology, inflation, and the physics of nothing*. 2003. astro-ph/0301448.
- [9] Wojciech Kopczyński i Andrzej Trautman. *Czasoprzestrzeń i grawitacja*. PWN, Warszawa, 1984.

- [10] Palash B. Pal. *Determination of cosmological parameters: an introduction for non-specialists*. 1999. hep-ph/9906447.
- [11] Martin Rees, Remo Ruffini, and John Archibald Wheeler. *Black Holes, gravitational waves and cosmology*. Gordon, New York, 1974.
- [12] Robert M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, Chicago and London, 1984.

Książki [3] oraz [2] są książkami napisanymi raczej z punktu widzenia fizyków cząstek elementarnych, niżli fizyków grawitacji (pociąga to za sobą charakterystyczne sposoby traktowania przedmiotu zainteresowań - w tym przypadku kosmologii). Książki [5], [6] oraz [7] są książkami popularnonaukowymi, więc zawierają wiele uproszczających omówień i mało matematycznego “mięsa”. [6] pokazuje, że koncepcja inflacji tak naprawdę wynikła “przez przypadek” podczas próby uratowania koncepcji monopoli magnetycznych. [8] to dobry i współczesny tekst, który zresztą posłużył obficie jako źródło materiału przedstawionego w niniejszej pracy. W książce [11] są zachowane dobre proporcje pomiędzy wzorami a tekstem, jest tam nadto dość obszerna, zajmująca pół książki, dyskusja problemów kosmologicznych, jednakże jedynie dla $\Lambda = 0$. Dlatego też warto przeczytać również pracę [10] – jest w niej również sporo wykresów obrazujących zależności pomiędzy krzywizną a zachowaniem wszechświata dla różnych Λ . Natomiast książka [1] jest bardzo stara, lecz pokazuje stan kosmologii w roku 1961 – umożliwia zatem nabranie pewnego dystansu do współczesnych opinii (a to zawsze jest przydatne), a nadto w pracy tej jest obszerny opis literatury z dziedziny kosmologii, wraz z ciekawymi komentarzami. Na koniec obowiązkowe jest wskazanie książki [12] jako bardzo dobrego podręcznika do ogólnej teorii względności, a także książki [9] jako dobrej książki mogącej służyć jako szybkie i dość przystępne wprowadzenie w dziedzinie czasoprzestrzeni i grawitacji. Dużo ciekawych informacji i obliczeń, czytelnie przedstawionych lecz wymagających pewnego obycia z ogólną teorią względności, znaleźć można w książce [4].