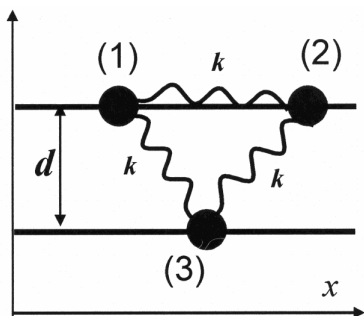


Zadania domowe z mechaniki klasycznej – odcinek 3

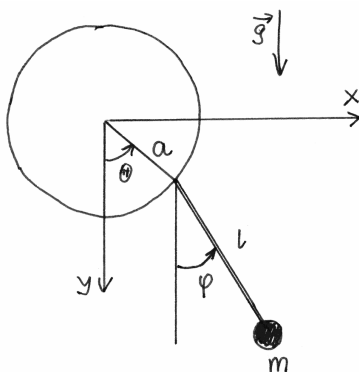
data ukazania się: 19 listopada 2008, termin oddania rozwiązań: 1 grudnia 2008

- Na rysunku 1 przedstawiono układ trzech punktów materialnych poruszających się bez tarcia po dwóch równoległych prętach oddalonych od siebie o odległość d . Punkty związane są ze sobą sprężynami o współczynniku sprężystości k . Sprężyna pomiędzy punktami (1) i (2) jest swobodna (nie naprężona), gdy jej długość wynosi l_0 . Sprężyny pomiędzy punktami (1) i (3) oraz (2) i (3) są swobodne, gdy ich długość wynosi zero. Masa punktów (1) i (2) jest równa m , a masa punktu (3) jest równa $2m$.
 - Wybierz zgodne z więzami współrzędne uogólnione i podaj funkcję Lagrange'a dla tego układu.
 - Pokaż, że energia potencjalna zależy tylko od dwóch odległości pomiędzy punktami (np. $x_2 - x_1$ i $x_3 - x_1$), zaś trzecia współrzędna uogólniona jest współrzędną cykliczną (np. x_1).
 - Jakiej wielkości fizycznej odpowiada pęd uogólniony związany z tą współrzędną cykliczną?
 - Znajdź położenia równowagi układu.
 - Wyznacz częstości małych drgań układu.
- Dla układu przedstawionego na rysunku 2 wybierz zgodne z więzami współrzędne uogólnione i podaj funkcję Lagrange'a.
- Przedstawiony na rysunku 3 układ trzech punktów materialnych (o masach M, m, m) znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym o natężeniu g_0 . Ruch układu odbywa się w płaszczyźnie $y = 0$. Masa M porusza się bez tarcia po prostej (zadanej równaniami $y = 0, z = 0$) i jest związana z dwoma nieruchomymi ścianami poprzez dwie sprężyny o identycznych stałych sprężystości K . Gdy masa M znajduje się w równej odległości od obu ścian (na rysunku w punkcie $x = 0$), obie sprężyny nie są naprężone. Środkowa masa m związana jest z masą M i drugą masą m nierozciągliwą i nieważką nicią o długości l .
 - Podaj równania więzów dla danego układu. Ile stopni swobody ma układ?
 - Wybierz zgodne z więzami współrzędne uogólnione i podaj funkcję Lagrange'a dla tego układu.
 - Podaj równania ruchu dla tego układu.
 - Określ położenie równowagi trwałej.
- Pokaż, że przekształcenie $x \rightarrow x' = x + \alpha \cos \omega t$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, jest przekształceniem symetrycznym dla oscylatora harmonicznego i policz odpowiadającą mu stałą ruchu.
 - Punkt materialny porusza się po nieskończonej linii śrubowej (zadanej przez $r = \text{const}$, $z = a\phi$) w jednorodnym polu grawitacyjnym. Pokaż, że energia potencjalna i funkcja Lagrange'a są niezmiennicze przy przekształceniu

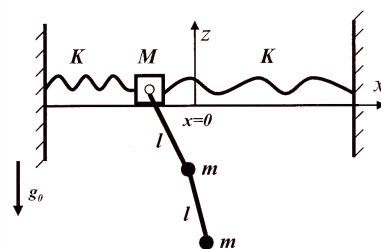
$$\begin{cases} z \rightarrow z' = z + \alpha a, \\ \phi \rightarrow \phi' = \phi + \alpha, \\ r \rightarrow r' = r. \end{cases}$$



rysunek 1



rysunek 2



rysunek 3