Rozwiązania 3 serii zadań z mechaniki klasycznej

1. a) Więzy: Długość sprężyn: (1) − (2): $l_1^2 = (x_1 - x_2)^2 + d^2$, (1) − (3): $l_2^2 = (x_3 - x_1)^2 + d^2$. $T = \frac{m}{2}(2\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2)$, $V = \frac{k}{2}(x_3 - x_2 - l_0)^2 + \frac{k}{2}l_1^2 + \frac{k}{2}l_2^2 = \frac{k}{2}((x_3 - x_2 - l_0)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_1)^2 + 2d^2)$.

   b)+c) Niech $x_{12} = x_1 - x_2$, $x_{31} = x_3 - x_1$. Wtedy $V = \frac{k}{2}((x_{12} + x_{31} - l_0)^2 + x_{12}^2 + x_{31}^2 + 2d^2)$, oraz $\partial L/\partial x_1 = 0$, zatem x_1 jest współrzędną cykliczną. Odpowiadający pęd uogólniony jest całkowitym (mechanicznym) pędem układu.

   d) $0 = \partial V/\partial x_{12} = \frac{k}{2})2(x_{12} + x_{31} - l_0) + 2x_{12})$, $0 = \partial V/\partial x_{31} = \frac{k}{2}(2(x_{12} + x_{31} - l_0) + 2x_{31})$. Z tego wynika $x_{12} = \frac{l_0}{3}$, $x_{31} = \frac{l_0}{3}$. $x_2 = x_1 - \frac{l_0}{3}$, $x_3 = x_1 + \frac{l_0}{3}$.

   e) Z równań Eulera–Lagrange'a otrzymujemy $\omega_1 = \sqrt{3k/m}$, $\omega_2 = \sqrt{2k/m}$.

2. $L = \frac{m}{2}(a^2\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\phi}^2 + 2al\dot{\theta}\dot{\phi}(\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi)) + mg(a\cos\theta + l\cos\phi)$.

3. a) Więzy: $z_1 = 0$, $(x_2 - x_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 = 0$, $(x_3 - x_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 - l^2 = 0$. Układ ma $6 - 3 = 3$ stopnie swobody.

   b) Współrzędne uogólnione: x_1, ϕ, θ. Podstawienie: $x_2 = x_1 + l\sin\phi$, $z_2 = -l\cos\phi$, $x_3 = x_2 + l\sin\theta = x_1 + l(sin\phi + \sin\theta)$, $z_3 = z_2 - l\cos\theta = -l(\cos\phi + \cos\theta)$. Z tego wynika:

$$V = -mgz_2 - mgz_3 + kx_1^2, \quad T = \frac{M}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{z}_2^2 + \dot{x}_3^2 + \dot{z}_3^2) =$$

$$= \frac{M}{2}\dot{x}_1^2 + m\dot{x}_1^2 + ml^2\dot{\phi}^2 + \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2 + 2m\dot{x}_1 l\dot{\phi}\cos\phi + m\dot{x}_1 l\dot{\theta}\cos\theta + ml^2\dot{\phi}\dot{\theta}\cos(\phi - \theta),$$

$$L = m\dot{x}_1^2 + \frac{M}{2}\dot{x}_1^2 + ml^2\dot{\phi}^2 + \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2 + 2m\dot{x}_1 l\dot{\phi}\cos\phi + m\dot{x}_1 l\dot{\theta}\cos\theta + ml^2\dot{\phi}\dot{\theta}\cos(\phi - \theta) +$$

$$+ 2mgl\cos\phi + mgl\cos\theta - kx_1^2$$

   c) Równania ruchu:

$$2l\ddot{\phi} + 2\ddot{x}_1\sin\phi + 2g\sin\phi + l\ddot{\theta}\cos(\phi - \theta) + l\dot{\theta}^2\sin(\phi - \theta) = 0,$$

$$l\ddot{\theta} + \ddot{x}_1\cos\theta + l\ddot{\phi}\cos(\phi - \theta) - l\dot{\phi}^2\sin(\phi - \theta) + g\sin\theta = 0,$$

$$2m\ddot{x}_1 + M\ddot{x}_1 + 2ml\ddot{\phi}\cos\phi - 2ml\dot{\phi}^2\sin\phi + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}\sin\theta + 2kx_1 = 0.$$

   d) Z równań $\partial V/\partial x_1 = 2kx_1 = 0$, $\partial V/\partial\phi = 2mgl\sin\phi = 0$, $\partial V/\partial\theta = mgl\sin\theta = 0$ wynika $x_1 = 0, \sin\phi = 0, \sin\theta = 0$, z czego wynika jedyny punkt równowagi (trwałej) równy $x_1 = 0, \phi = 0, \theta = 0$.

4. a) $L(x) = (m\dot{x}^2 - kx^2)/2$. $L'(x') = \frac{m}{2}\dot{x}'^2 - \frac{1}{2}kx'^2 + \frac{d}{dt}(x'\alpha m\omega\sin\omega t - \frac{1}{4}m\alpha^2\sin 2\omega t)$. Stała ruchu: $J = -m\dot{x}\cos\omega t - mx\sin\omega t$.

   b) $V'(z') = -mgz' + \frac{d}{dt}(mg\alpha t)$, $T = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2$. $T'(\dot{\phi}', \dot{z}', r') = T$. Stąd $L = T - V$ jest niezmienniczy, z dokładnością do cechowania (stała wartość potencjału).