

Kolokwium nr 1 z PFW-I (23.04.2007)

Punktowane są tylko dwa najlepiej zrobione zadania. Każde zadanie należy oddać na osobnej kartce. Wszystkie przekształcenia należy opatrzyć odpowiednim komentarzem słownym, który stanowi integralną część rozwiązania. Prace niepodpisane nie będą oceniane.

Zad. 1. Cząstka o masie m i ładunku $q > 0$ porusza się w polu magnetycznym o indukcji $\vec{B} = [0, 0, B]$ ($B > 0$) i polu elektrycznym o natężeniu $\vec{E} = [ax, 0, -az]$ ($a > 0$). W chwili $t = 0$ cząstka znajduje się w początku układu współrzędnych i ma prędkość $\vec{v}_0 = [v_0, 0, 0]$ ($v_0 > 0$). Znajdź ruch cząstki i opisz jej tor dla następujących przypadków: (a) $a = qB^2/m$; (b) $a < qB^2/m$.

Zad. 2. Ciało o masie m porusza się z dodatnią energią E w polu siły o potencjale

$$V(r) = \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2} \quad (\alpha, \beta > 0),$$

przy czym jego moment pędu ma szczególną wartość $J = \sqrt{2m\beta}$.

- (a) Uzasadnij stwierdzenie, że wyrażenie na tor tego ciała we współrzędnych biegunowych można uzyskać z równania

$$\frac{dr}{d\varphi} = \pm \frac{r^2}{J} \sqrt{2m(E - V_{ef})},$$

- (b) Korzystając z powyższego równania, znajdź w jawnej postaci tor tego ciała. Zwróć uwagę na fakt, że dla podanej wartości J wyrażenie dla V_{ef} przyjmuje bardzo prostą postać i że w zagadnieniu ruchu w polu siły centralnej wiele formuł upraszcza się, jeśli w odpowiednim momencie użyjemy zmiennej $w = \frac{1}{r}$.

- (c) Naskicuj tor ciała w kartezjańskim układzie współrzędnych dla $E = \pi^2\alpha^2/64\beta$.

Zad. 3. Dany jest dwuwymiarowy układ w postaci dwóch ciężarków, każdy o masie m , ślizgających się wzdłuż prostopadłych prostych: jeden ciężarek ślizga się po osi OY, skierowanej pionowo do góry, a drugi ślizga się po osi OX, skierowanej poziomo. Ciężarki są połączone sztywnym i nieważkim prętem o długości l . Układ znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym o przyspieszeniu g , skierowanym w ujemnym kierunku osi OY. Wykonaj dla tego układu następujące obliczenia:

- (a) wprowadź dogodną współrzędną uogólnioną i zapisz przy jej użyciu lagranżjan tego układu;
- (b) znajdź w jawnej postaci równanie Lagrange'a II rodzaju dla tego układu;
- (c) znajdź częstość małych drgań układu wokół położenia równowagi trwałej.