

Odpowiedzi na pytania zadane na obronie pracy doktorskiej p.t.
“Information geometric foundations of quantum theory”

mgr Ryszard Paweł Kostecki
24 kwietnia 2013

1 Jaki jest główny cel eliminowania przestrzeni Hilberta przy konstrukcji podstaw mechaniki kwantowej?

Mechanika kwantowa, rozumiana jako teoria sformalizowana przez von Neumanna w 1932 roku w oparciu o przestrzenie Hilberta i teorię spektralną liniowych operatorów na tych przestrzeniach, jest w stanie całkowicie poradzić sobie z kilkoma zagadnieniami fizycznymi, takimi jak np. linie spektralne atomu wodoru. Jednak z wieloma zagadnieniami ta teoria nie jest w stanie sobie poradzić (w sposób matematycznie ścisły, bez wprowadzenia istotnie nowych kluczowych obiektów matematycznych). Jednym z takich problemów jest nieperturbacyjne sformułowanie kwantowej teorii pola. Sformułowanie takie dotychczas nie zostało znalezione, i najprawdopodobniej nie istnieje ono w ramach strukturalnych zadanych przez rozważanie dwóch a priori niezależnych struktur: teorii spektralnej operatorów na przestrzeniach Hilberta oraz klasycznej teorii pola na rozmaitościach pseudoriemannowskich. W chwili obecnej mamy do czynienia z kilkoma różnymi podejściami, które radzą sobie jedynie z pewnymi aspektami tego, co byśmy chcieli widzieć jako kwantową teorię pola. Te podejścia, które sobie lepiej radzą z przewidywaniami, tzn. są lepiej dopasowane do eksperymentu, gorzej radzą sobie z matematyką (np. podejście przez całki po trajektoriach jest w dużej mierze jedynie formalną symboliką pozbawioną matematycznej ścisłości). I vice versa: podejście algebraiczne, które wyrosło z intencji ścisłego sformułowania matematyki kwantowej teorii pola nie jest w stanie przewidzieć większości mierzalnych rezultatów opisywanych przez “efektywne” kwantowe teorie pola. W obecnej sytuacji nie daje się zatem w matematycznie ścisły sposób wyprowadzić tych wszystkich przewidywań, które się na poziomie efektywnym (zrenormalizowanym) opisuje przy pomocy perturbacyjnej kwantowej teorii pola. Jest to bardzo duży problem, ponieważ w fizyce teoretycznej chcielibyśmy mieć teorie, które są nie tylko predykcyjne, ale również ścisłe. I to ścisłe nie tylko na zasadzie takiej, że przy ustalonym zbiorze technik manipulowania symbolami jesteśmy w stanie do jakiejś dokładności przewidzieć konkretne liczbowe wyniki, lecz ścisłe w tym sensie, że jesteśmy w stanie zdefiniować dziedzinę funkcji, jej kodziedzinę, własności, itd. Motywacją poszukiwania sformułowania teorii kwantowej, która wykraczałaby poza mechanikę kwantową, to jest poza teorię opartą na przestrzeniach Hilberta, jest przekonanie, że istniejące podejścia opierające się na przestrzeniach Hilberta i perturbacjach dynamiki pełnią rolę analogiczną do teorii epicykli w modelu Ptolemeusza mechaniki nieba. Natomiast intencją przyświecającą nieliniowemu sformułowaniu teorii kwantowej jest to, że może być ono tym dla mechaniki kwantowej czym były elipsy keplerowskie do teorii Ptolemeusza. I to jest główna motywacja.

2 Prosty przykład zastosowania sformułowanego uogólnienia?

W kwantowej teorii pola punktem wyjścia jest założenie, że mamy do czynienia z pojęciem czasoprzestrzeni od razu danym i niezależnym od tego pojęciem przestrzeni Hilberta i operatorów na niej. Do tej kinematycznej struktury dodany jest postulat, że opis “predykcyjnej” (“efektywnej”) dynamiki powinien być przeprowadzany jako perturbacja opisu sytuacji w której tej dynamiki brak (tj. mamy do czynienia wyłącznie ze “swobodną” dynamiką). Tego rodzaju postulat opiera się na wykorzystaniu addytywnych własności operatorów liniowych,

bo dodanie perturbacji do hamiltonianu ma sens wtedy, gdy pracujemy z operatorami liniowymi. W tym sensie matematyczna struktura z jaką mamy do czynienia determinuje sposób w jaki podchodzimy do problemu. Prócz tego standardowe przewidywania wymagają dodatkowego uzupełnienia perturbacji o renormalizację, i dopiero ta procedura uwzględnia znane eksperymentalne więzy. Prowadzi to do trudnej kwestii: w jaki sposób przetłumaczyć tę specyficzną strukturę (uwarunkowaną częściowo matematycznymi a częściowo interpretacyjnymi założeniami) na opis oparty o referencyjną ewolucję unitarną zadaną nieliniową hamiltonowską ewolucją oraz rzuty entropowe z więzami wyrażającymi sytuację eksperymentalną. Rezultaty zawarte w mojej pracy stanowią początek programu badawczego, i na obecnym etapie rozwoju przedstawionej teorii mamy do czynienia z pewną niekompatybilnością sposobów definiowania badanych problemów pomiędzy zaproponowanym podejściem a istniejącymi podejściami.

W rezultacie, jeśli chodzi o związki z przewidywaniami efektywnych kwantowych teorii pola, to w chwili obecnej przedstawione sformułowanie musi zostać jeszcze wzbogacone o dodatkowy “słownik” umożliwiający tłumaczenie pomiędzy tym podejściem a podejściami istniejącymi. Chciałbym tu podać przykład konkretnego rezultatu w tym kierunku, który zawarty jest w mojej pracy. Kwantowa teoria pola opiera się na paradygmacie rozdzielania *a priori* niezależne tło, czyli czasoprzestrzeń (która może być zadana po prostu jako przestrzeń Minkowskiego, a może być to również różniczkowa wyposażona w jakąś inną metrykę lorentzowską) oraz niezależnie zadaną przestrzeń Hilberta z kwantową dynamiką (opisywaną przez “swobodną” ewolucję, oraz jej perturbację i renormalizację). W mojej pracy zbadałem¹ pewne konsekwencje przyjęcia alternatywnego postulatu: czasoprzestrzeń jest obiektem emergentnym (wyłaniającym się), który powstaje jako efektywny opis własności czysto kwantowej struktury matematycznej. Punktem wyjścia jest wyłącznie geometria stanów kwantowych – nie mamy do czynienia z czasoprzestrzenią jako strukturą matematyczną istniejącą zawsze “w tle” kwantowych konstrukcji. Konkretnym zagadnieniem, które w tej pracy zbadałem, była konstrukcja emergentnej czasoprzestrzeni w oparciu o zbiór stanów kwantowych z metryką riemannowską indukowaną przez funkcjonal względnej entropii kwantowej (niesymetryczną odległość) Umegakiego. Przy pewnych dodatkowych założeniach (dokładnie takich, że stany są wierne) to jest normalna różniczkowość riemannowska. Oprócz tak wprowadzonej struktury różniczkowości riemannowskiej, przestrzeń stanów kwantowych może być wyposażona również w globalne pole wektorowe “referencyjnej” globalnej ewolucji stanów kwantowych, zadanej np. uogólnioną ewolucją hamiltonowską. W mojej pracy pokazałem, że czasoprzestrzeń Schwarzschilda może być wyprowadzona z tych dwóch kwantowych nieliniowych struktur, korzystając z obrotu Poincaré (Wicka), który zamienia kwantową metrykę o sygnaturze $(+++)$ w metrykę o sygnaturze $(-+++)$ “obracając” ją według globalnego pola wektorowego zadanego przez referencyjną ewolucję stanów kwantowych. Następujące po tym obrocie zapomnienie o wewnętrznej strukturze punktów tej przestrzeni (zapomnienie, że są one stanami kwantowymi, np. macierzami gęstości) produkuje czasoprzestrzeń emergentną.

Natomiast w kontekście kwantowej teorii informacji zastosowanie przedstawionego sformułowania jest dość bezpośrednie, i wyraźniej mieści się w ramach już istniejących podejść. Przede wszystkim chciałbym zaznaczyć, że opis zmian rozkładów prawdopodobieństwa poprzez maksymalizację względnej entropii z więzami jest znanym i coraz silniejszym prądem badań w teorii informacji oraz w teorii wnioskowania statystycznego. Istnieje kilka monografii poświęconych tym zagadnieniom (jednak nie dotyczą one teorii kwantowej). Dlatego wspomniane przeze mnie rezultaty, dotyczące wyprowadzenia reguły Bayesa z maksymalizacji względnej entropii z więzami są istotne, bo pokazały, że bayesowski paradygmat daje się włączyć w szerszą strukturę, znacznie bardziej geometryczną, opisywaną przy pomocy względnej entropii. Analo-

¹Ta część pracy była wykonana we współpracy z Pawłem Duchem.

gicznie, otrzymany przeze mnie² rezultat (wyprowadzenie reguły von Neumanna–Lüdersa jako szczególnego przypadku maksymalizacji względnej kwantowej entropii z więzami) pokazuje, że można kwantowy pomiar włączyć w znacznie szerszą geometryczną (i nieliniową) kwantową teorię informacji. Tak więc podczas gdy (jak pokazali m.in. Alicki, Majewski, Czachor) nieliniowe uogólnienia odwzorowań całkowicie dodatnich są нефизyczne, prowadzą bowiem do pewnych niespójności, to entropowe rzuty pozwalają dokonywać nieliniowych odwzorowań, które wychodzą poza paradygmat odwzorowań całkowicie dodatnich. To jest kluczowe, z punktu widzenia teoretycznego, zastosowanie przedstawionego uogólnienia.

3 Czym różnią się odwzorowania dodatnie od całkowicie dodatnich. Jakiś przykład?

Dodatnie odwzorowanie to takie, dla którego obraz operatorów dodatnich znajduje się w operatorach dodatnich. Natomiast odwzorowanie całkowicie dodatnie zadane jest jako takie odwzorowanie $T : \mathfrak{B}(\mathcal{H}_1) \rightarrow \mathfrak{B}(\mathcal{H}_2)$ dla którego odwzorowanie

$$T \otimes \text{id}_{\mathbb{M}_n(\mathbb{C})} : \mathfrak{B}(\mathcal{H}_1) \otimes \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{B}(\mathcal{H}_2) \otimes \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$$

jest dodatnie dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Przykładem odwzorowania dodatniego, które nie jest całkowicie dodatnie jest transpozycja macierzy.

4 Proszę podać przykład przestrzeni nierefleksywnej.

Komutatywne i niekomutatywne przestrzenie L_1 oraz L_∞ .

5 Każdy stan na algebrze generuje poprzez konstrukcję GNS przestrzeń Hilberta. Ale – wbrew temu, co Pan powiedział – nie może to być wiązka (tzn. nie może być lokalnie trywialna) bowiem różne stany prowadzą do nierównoważnych reprezentacji algebry.

Jest to wiązka lokalnie trywialna w sytuacji, kiedy przestrzeń bazowa składa się ze stanów wiernych. Wtedy wszystkie reprezentacje GNS nad tą przestrzenią są unitarnie równoważne. W bardziej ogólnej sytuacji, dla stanów normalnych niekoniecznie wiernych, Odziejewicz i Śliżewska w pracy z 2011 roku zaproponowali konstrukcję (omówioną w mojej pracy), w której zawarty jest dodatkowy prawy rzut na nośnik stanu nad którym znajduje się włókno wiązki, co oznacza reprezentowanie mniejszej algebry, – takiej, dla której dany stan normalny jest wierny.

6 Ulubiona metryka monotoniczna w zbiorze stanów mieszanych?

Zdecydowanie jest to metryka Bogoljubowa–Kubo–Mori. Przede wszystkim dlatego, że można ją otrzymać z dwukrotnego różniczkowania względnej entropii Umegakiego $\text{tr}_{\mathcal{H}}(\rho \log \rho - \rho \log \sigma)$, która jest najważniejszą spośród wszystkich możliwych względnych kwantowych entropii, i – tym samym – podstawowym obiektem w kwantowej teorii informacji. Jest to również najciekawsza spośród kwantowych metryk monotonicznych Morozowej–Czencowa–Petza, bo jest ona bezpośrednio związana z niekomutatywnymi przestrzeniami L_1 i L_∞ , czyli nierefleksywnymi przestrzeniami Banacha, a jednocześnie zawiera w sobie całkę po tych funkcjach Morozowej–Czencowa, które tworzą całą rodzinę metryk Wignera–Yanase–Dysona–Hasegawy. W przypadku tej metryki zbiega się wiele wyjątkowych i bardzo ciekawych własności matematycznych

²Ta część pracy była wykonana we współpracy z Wojciechem Kamińskim, Frankiem Hellmannem, oraz Carlosem Guedesem.

oraz kanonicznych zastosowań w fizyce (zarówno w kwantowej teorii informacji, jak i w kwantowej mechanice statystycznej).

7 Czy istnieją mierzalne eksperymentalnie, niestandardowe efekty przewidywane przez uogólnioną mechanikę kwantową w wersji zaproponowanej w rozprawie?

Rzuty przy pomocy maksymalizacji względnej entropii z więzami umożliwiają opis zmian stanów kwantowych przy bardzo rozmaitych eksperymentalnych więzach (warunkach kontrolnych). Jest to paradygmat częściowo ogólniejszy, a częściowo alternatywny, w stosunku do odwzorowań całkowicie dodatnich. Zazwyczaj przy stosowaniu odwzorowań całkowicie dodatnich do modelowania jakichś sytuacji eksperymentalnych jest tak, że układ eksperymentalny jest skonstruowany w oparciu o pewne intencje i ogólną (schematyczną) wiedzę na temat sytuacji fizycznej, której ten układ ma dotyczyć. Natomiast precyzyjną identyfikację pomiędzy opisem eksperymentalnym a obiektami w formalizmie matematycznym opisującym go wykonuje się dopiero na etapie kalibracji. Sądzę, że w sytuacjach eksperymentalnych małej skali, takich jak praca z wiązkami laserowymi, czy też tomografia kwantowa – gdzie mamy do czynienia z sytuacjami nierozproszeniowej ewolucji pojedynczych stanów kwantowych, da się bezpośrednio (pozytywnie lub negatywnie) zweryfikować nowe nietrywialne efekty związane z nieliniowością opisywaną przy pomocy formalizmu rzutów entropowych oraz nieliniowej ewolucji hamiltonowskiej. Niestety, w chwili obecnej zbyt mało wiem o tym, jak tego rodzaju eksperymentalne urządzenia są skonstruowane, i jak przeprowadza się ich kalibrację, żeby móc wyprowadzić bezpośrednie przewidywania z nowego formalizmu. Jestem jednak przekonany, że – w ścisłej analogii do odwzorowań całkowicie dodatnich, które posiadają swoje konkretne eksperymentalne implementacje i weryfikacje – jest to możliwe. Podstawowym celem mojej pracy naukowej w najbliższym czasie będzie właśnie wyprowadzenie takich konkretnych, mierzalnych przewidywań.