

Opis zainteresowań i planów naukowych

Ryszard Paweł Kostecki

Perimeter Institute for Theoretical Physics, 31 Caroline St North, Waterloo, Ontario N2L 2Y5, Canada

ryszard.kostecki@fuw.edu.pl

29 stycznia 2018

1 Wstęp

Moim głównym długoterminowym zainteresowaniem badawczym jest zastosowanie teorii informacji do konstrukcji matematycznych i pojęciowych podstaw dla takiego uogólnienia mechaniki kwantowej, które umożliwiłoby zarówno rekonstrukcję geometrii czasoprzestrzeni, jako własności emergentnej (w opozycji do idei kwantowania grawitacji), jak i dostarczenie podstaw matematycznych dla efektywnych kwantowych teorii pola. Problem ten znajduje się na przecięciu kilku dziedzin: badań uogólnionych teorii probabilistycznych uogólniających mechanikę kwantową (takich jak logiki kwantowe, zbiory wypukłe, algebry operatorów, oraz domknięte symetryczne monoidalne kategorie), fizyki matematycznej kwantowych teorii pola, a także różnych podejść do emergencji czasoprzestrzeni opartych o związki kwantowej informacji z geometrią czasoprzestrzenną (takich jak: termodynamika horyzontów czasoprzestrzennych, związek splątania z geometrycznymi własnościami czarnych dziur, a także związek złożoności obliczeniowej z geometrią czasoprzestrzeni w modelach AdS/CFT).

2 Projekt “Quantum information geometric foundations”

W ramach tych badań przez ostatnie kilka lat skupiłem się na rozwoju nowego modelu, umożliwiającego testowanie wybranych pojęć i struktur matematycznych dla sformułowanego powyżej ogólnego kierunku badań. Model ten jest oparty o kwantową (lokalną oraz nielokalną) geometrię informacji na zbiorach stanów na W^* -algebrach, i jako taki stanowi jednocześnie uogólnienie mechaniki kwantowej w sformułowaniu algebraicznym (rozwijanego m. in. przez von Neumanna, Segala, Haaga, Araki) oraz podejścia do podstaw teorii wnioskowania statystycznego, a także mechaniki statystycznej oraz termodynamiki, opartego o geometrię informacji (rozwijanego m. in. przez Chentsova, Jaynesa, Amari, Ingardena). Model ten umożliwia zarówno zmierzenie się z generycznymi problemami, które musi podjąć każde uogólnienie mechaniki liniowej poza ściśle liniową strukturę (a więc zmianę teorii pomiaru, określenie zakresu kontekstualności obserwabli, wykazanie zgodności struktur dynamicznych z kinematycznymi, itp.), jak i konstrukcję czasoprzestrzeni wyłaniających się z określonych własności geometrii informacji stanów kwantowych. Ponadto w modelu tym dają się explicite zdefiniować procedury renormalizacyjne dla teorii z nieskończoną liczbą stopni swobody. Kluczową własnością tego modelu jest interpretacja własności geometrycznych przestrzeni stanów jako opisujących ograniczenia w komunikacji pomiędzy różnymi użytkownikami (agentami). W tym sensie standardowa mechanika kwantowa rozumiana jest jako teoria jednego użytkownika, lub dowolnej liczby jego identycznych kopii wyposażonych w trywialną (idealną) teorię komunikacji pomiędzy nimi (mechanika kwantowa pełni tutaj rolę analogiczną, zarówno matematycznie jak i koncepcyjnie, do szczególnej teorii względności). Uogólnienie poza mechanikę kwantową, dostarczone przez kwantową geometrię informacji, umożliwia opisanie tego, do jakiego stopnia kwantowa komunikacja między użytkownikami nie posiada powyższego idealnego charakteru. Emergentne współrzędne czasoprzestrzenne (którym można nadać interpretację podobną do współrzędnych na rozmaitościach termodynamicznych) są w tej interpretacji zmiennymi współdzielonymi przez różnych użytkowników (agentów) jako kontekstualne klasyczne parametry kontrolne.

Wyniki częściowe pracy nad tym modelem, oraz rozmaite rezultaty techniczne otrzymane przy okazji tych badań, opublikowałem w serii artykułów i preprintów, a także przedstawiłem je w serii wystąpień na międzynarodowych konferencjach i seminariach. Obecnie kończę spisywać główny tekst, podsumowujący wyniki badań nad matematycznym sformułowaniem tej teorii. Będzie on stanowił punkt wyjścia do współpracy nad możliwymi konkretnymi zastosowaniami tego modelu do problemów kwantowej kryptografii oraz kwantowej kontekstualności. Ze względu sformułowanie na poziomie analizy funkcjonalnej W^* -algebr, przy zachowaniu maksymalnej możliwej kompatybilności z algebraicznym

podejściem do relatywistycznej kwantowej teorii pola, problemy wpływu ograniczeń relatywistycznych na kwantową komunikację są bezpośrednio wyrażalne w tym modelu. Przy czym jestem w równym stopniu zainteresowany zrozumieniem ograniczeń tego modelu, a więc badaniem takich własności kwantowej kryptografii i kontekstualności, które z określonych przyczyn są w nim niewyrażalne. Jest to zresztą bezpośrednio związane z moimi dalszymi planami badawczymi.

3 Post-kwantowa informacja na n -grupoidach

W moich dalszych planach naukowych znajduje się przede wszystkim praca nad połączeniem doświadczeń zgromadzonych w latach 2009–2017 podczas badań powyższego modelu z doświadczeniami zgromadzonymi w latach 2004–2008 podczas badań nad możliwością zastosowania geometrycznych i logicznych (teorio-typowych) własności teorii toposów i wyższych n -kategoryjnych struktur (n -grupoidy, n -stacki) do modelowania przestrzeni oraz obserwabli w teorii względności oraz teorii kwantowej. Plany te wykraczają poza zakres zadań badawczych realizowanych ramach projektu badawczego w którym chcę wziąć obecnie udział, lecz stanowią szerszy kontekst motywacyjny określonego podejścia badawczego, które reprezentuję, i myślę, że warto o nich tutaj wspomnieć. Ponadto pierwszy krok realizacji tych planów wydaje mi się być adekwatny do zadań tego projektu badawczego (co wyjaśnię poniżej).

Punktem wyjścia tego kierunku badań są obserwacje: 1) struktury skończenie wymiarowej mechaniki kwantowej dają się wyrazić nie tylko jako określona kategoria, ale także jako język programowania odpowiadający specyficznej teorii typów, 2) wewnętrzna struktura przestrzeni kwantowych uogólnień pochodnych Radona-Nikodyma (tzw. względnych operatorów modularnych, będących podstawową wielkością mierzoną w kwantowej teorii informacji) jest grupoidem, umożliwiającym charakteryzację przynajmniej części z własności W^* -algebr (każdy zbiór stanów kwantowych może być rozważany jako zbiór względnych operatorów modularnych, struktura grupoidowa stanów wiernych jest zaś dodatkową własnością), 3) szczególna (oraz częściowo ogólna) teoria względności daje się przeformułować w terminach teorii kategorii, w oparciu o grupoid względnych prędkości. Z drugiej strony, w podstawach teorii kwantowej mamy do czynienia z dwoma otwartymi problemami: 1) w kinematycznych rozszerzeniach mechaniki kwantowej (takich jak uogólnione teorie probabilistyczne, czy też pojawiające się w kontekście doświadczeń typu Bella teorie kwantowych korelacji) nie są uwzględniane nietrywialne struktury geometryczne przestrzeni stanów, które z jednej strony mogą być odpowiedzialne za ograniczenia w komunikacji pomiędzy poszczególnymi użytkownikami (agentami), a z drugiej strony stanowią źródło emergentnych czasoprzestrzeni; 2) bardzo ważnym nierozwiązanym problemem podstaw kwantowej teorii pola jest relacja między lagranżowskim a hamiltonowskim sformułowaniem dynamiki: pierwsze nie posiada matematycznie ścisłego sformułowania poza podejściem perturbacyjnym, zaś drugie (implementowane np. przez snopy W^* -algebr nad rozmaitościami o sygnaturze lorentzowskiej) jest ograniczone do ustalonej z góry globalnie hiperbolicznej struktury czasoprzestrzennej.

Z perspektywy kategoryjnej logiki przestrzeni i typ są tym samym i są implementowane przez obiekty, natomiast dowód i program są implementowane przez morfizmy między obiektami. W szczególności grupoidy oraz n -grupoidy odpowiadają z jednej strony określonym intuicjonistycznym teoriom typów (w oparciu o tę obserwację został sformułowany nowy projekt podejścia do podstaw matematyki, tzw. univalent foundations, w którym dowód matematyczny jest jawnie postulowany jako wtórny wobec implementującego go kodu komputerowego, sformułowanego w określonej intuicjonistycznej teorii typów zależnych), zaś z drugiej strony odpowiadają wyższym klasom homotopii na przestrzeniach topologicznych. Punktem wyjścia proponowanego podejścia jest uogólnienie podstawowej struktury kinematycznej z kategorii zbiorów stanów kwantowych nad W^* -algebrami wyposażonych we względną entropię do kategorii odpowiednio „kwantowych” n -grupoidów wyposażonych w kategoryjne uogólnienie względnej kwantowej entropii (skonstruowane w oparciu o uogólnienie prac Lawvere’a nt. przestrzeni metrycznych, oraz Baeza–Fritza na temat funktorialnej charakteryzacji względnej entropii). Przejście od rozmaitości do grupoidów, a z nich do n -grupoidów jako elementarnych kinematycznych przestrzeni w podstawach teorii kwantowej i teorii względności umożliwia uwzględnienie wyższych homotopicznych niezmienników jako podstawowego typu, opisującego kinematykę przestrzeni teorii efektywnej – z już zrenormalizowanymi obserwabliami, zależnymi od określonego typu parametrów kontrolnych. Obcięcie do poziomu n odpowiada, z perspektywy topologicznych kwantowych teorii pola, rozważaniu diagramów Feynmana tylko do n -tego rzędu perturbacji. Z drugiej strony, wyposażenie tych przestrzeni w strukturę względnej entropii umożliwiłoby opis lokalnych i Nielokalnych własności geometrycznych bardziej szczegółowych od homotopicznych niezmienników, przede wszystkim własności tzw. operator product expansions (idea geometryzacji snopów przestrzeni stanów nad W^* -algebrami w celu

opisu teorii efektywnych była zaproponowana przez Haaga i Ojime, i rozwinięta później przez Bostelmana w kierunku operator product expansions; proponowanym przeze mnie *novum* jest przejście do n -grupoidów oraz rezygnacja z bazowej czasoprzestrzeni na rzecz przestrzeni parametrów kontrolujących teorię efektywną). Struktura n -stacku, opisująca fibracje n -grupoidów nad kategorią bazową odpowiadałaby fibracji przestrzeni teorii efektywnych nad określoną kategorią opisującą eksperymentalne parametry kontrolne. W tym sensie konflikt między podejściami lagranżowskim i hamiltonowskim zostałby rozwiązany, biorąc jako punkt wyjścia teorie efektywne rzędu n .

Zaletą oparcia się na podejściu kategorijskim jest możliwość bezpośredniego powiązania takich zagadnień jak złożoność obliczeniowa, kontekstualność, oraz wpływ wielo-agentowej komunikacji (a więc bezpieczeństwa kryptograficznego) z jednej strony z narzędziami geometrycznymi, a z drugiej strony z konkretnym wykonywalnym kodem (oraz koncepcjami ściśle programistycznymi), zapisywalnym w takich językach programowania jak Coq czy Nuprl. W tym sensie badanie uogólnień mechaniki kwantowej oparte o geometrię informacji i kategorijską teorię typów może dostarczyć nowych wyników i narzędzi zarówno dla kwantowej teorii pola jak i dla informatyki kwantowej.

4 Przestrzenie operatorowe i 2-grupoidy

Kluczowym otwartym problemem, z którym powyżej sformułowana idea badawcza musi się skonfrontować, jest skonstruowanie odpowiednio „kwantowej” struktury opartej na bazie n -grupoidu, umożliwiającej jednocześnie lokalizację funktorialnej względnej entropii do odpowiednich struktur geometrii różniczkowej. Wymaga to konstrukcji odpowiedniego kategorijskiego uogólnienia teorii całkowania i różniczkowania na takie struktury. Aby uzyskać bardziej konkretne rozumienie jaki kierunek powinny obrać te uogólnienia, chciałbym w pierwszej kolejności zbadać możliwość implementacji powyższych idei na przestrzeniach operatorowych. Z perspektywy kategorijskiej, przestrzenie operatorowe wydają się być o jeden poziom kategorijski wyżej niż algebry operatorów, więc powinna się w nich dać odnaleźć naturalna struktura 2-grupoidowa. Z drugiej strony, z perspektywy badań informatyki kwantowej, przestrzenie operatorowe umożliwiają matematyczną implementację tzw. nierówności Grothendiecka, związanych z różnymi operatorowymi normami, a nierówności te przekładają się na konkretne mierzalne efekty łamania kwantowych protokołów komunikacji. W tym sensie, próba realizacji powyższego programu w konkretnych ramach teorii przestrzeni operatorowych może mieć bezpośrednie rezultaty zarówno dla badania kwantowej nielokalności i kontekstualności. Tego rodzaju sformułowanie dałoby też konkretny model do zbadania hipotezy roboczej dotyczącej możliwości uogólnienia procesu „emergencji czasoprzestrzeni” poza przestrzenie stanów nad W^* -algebrami, opartego na analogii między grupoidami względnych gęstości stanów kwantowych a grupoidami względnych prędkości. Czysto heurystyczną, ale bardzo sugestywną, hipotezą jest, że przy takim sformułowaniu dałoby się wyrazić bardziej ogólny związek między kwantową złożonością obliczeniową a grawitacyjnym działaniem, poza granicami modelu AdS/CFT.