

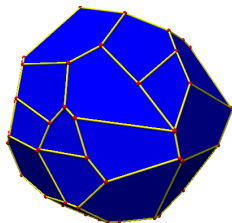
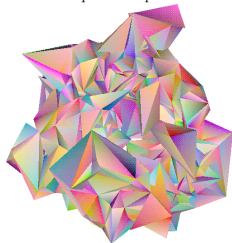
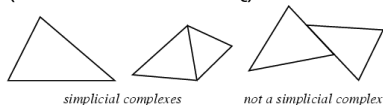
# Model Ponzano-Reggego

## Kwantowa grawitacja na symplecjonalnej dekompozycji rozmaitości różniczkowej

Ryszard Paweł Kostecki

14 stycznia 2007

- ▶ Podstawowa idea: zastąpienie **rozmaitości różniczkowej** przez **rozmaitość symplecjajną** (kawałkami liniową)



- ▶ Klasyczna grawitacja (Regge, 1961)
- ▶ Kwantowa grawitacja (Ponzano i Regge, 1968)

# Idea modelu Reggego

- ▶ Od rozmaitości do sympleksów.
- ▶ Zastąpienie obiektów geometrii różniczkowej:

rozmaitość różniczkowa $\mathcal{M}$	→	kompleks $M$
układ współrzędnych $x^\mu$	→	sieć symplicjalna $\{I_i\}$
tensor metryczny $g$	→	długość krawędzi $l_i$
krzywizna $R$	→	deficyt kąta $\varepsilon$

- ▶ Wyrażenie działania i równań Einsteina przy pomocy obiektów geometrii symplicjalnej.

# Idea modelu Ponzano–Reggego

- ▶ ‘Skwantowanie’ długości krawędzi czworościanu poprzez przypisanie im spinów grupy  $SU(2)$ .
- ▶ W ten sposób każdemu 2-wymiarowemu sympleksowi jest przypisany symbol  $3j$ , zaś czworościanowi symbol  $6j$ .
- ▶ Zinterpretowanie sympleksyjnej dekompozycji rozmaitości jako dużego grafu “wymiany” wielu spinów.
- ▶ Identyfikacja feynmanowskiej kwantyzacji (całki po trajektoriach) sympleksyjnego działania Einsteina.

## Wstęp

Model Reggego

Model Ponzano–Reggego

## Model Reggego

Krzywizna

Metryka

Transport równoległy

Tensor krzywizny

Równanie Bianchiego

Działanie Einsteina

Równania Einsteina

## Model Ponzano–Reggego

Symbole  $3j$

Symbole  $6j$

Symbole  $6j$  i geometria  
czworościanu

Formuła Cayleya

Asymptotyka symbolu  $6j$

Symbole  $3nj$  i rozmaitość  
sympleksyjna

Normalizacja

Kwantyzacja działania  
Einsteina

## Podsumowanie

## Referencje

# Część I

## Klasyczna grawitacja w modelu Reggego

### Wstęp

Model Reggego

Model Ponzano-Reggego

### Model Reggego

Krzywizna

Metryka

Transport równoległy

Tensor krzywizny

Równanie Bianchiego

Działanie Einsteina

Równania Einsteina

### Model Ponzano-Reggego

Symbole  $3j$

Symbole  $6j$

Symbole  $6j$  i geometria  
czworościanu

Formuła Cayleya

Asymptotyka symbolu  $6j$

Symbole  $3nj$  i rozmiarowość  
symplecjalna

Normalizacja

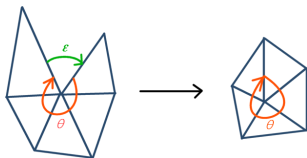
Kwantyzacja działania  
Einsteina

### Podsumowanie

### Referencje

# Krzywizna

Po dokonaniu symplecticznej triangulacji  $n$ -wymiarowej rozmiatości różniczkowej możemy uzyskać jej krzywiznę z deficytu kąta.



Dla  $\dim(\mathcal{M}) = n$  można z każdym  $(n - 2)$ -wymiarowym sympleksem (kością)  $h$  związać deficyt kąta  $\varepsilon_h$ :

$$\varepsilon_h = 2\pi - \sum_i \theta_h^i,$$

gdzie  $i = 1, \dots, p$  są  $n$ -wymiarowymi sympleksami stykającymi się przy kości  $h$ , zaś  $\theta_h^i$  to kąty dwuścienne między  $(n - 1)$ -wymiarowymi ściankami  $(i, i + 1)$ , które mają wspólną kość  $h$ .

Metryka w  $M_n$  jest zdefiniowana następująco:

1. Metryka we wnętrzu każdego  $n$ -wym. sympleksu  $T_n$  jest euklidesowa.
2. W metryce związanej z  $T_n$  brzeg  $T_n$  jest złożony z  $(n + 1)$  płaskich sympleksów  $T_{n-1}$ .
3. Jeśli sympleks  $T_{n-1}$  jest wspólnym brzegiem  $T_n$  i  $T'_n$ , to odległość między dwoma punktami na  $T_{n-1}$  jest taka sama zarówno wg  $T_n$  jak i  $T'_n$ .
4. Dla  $P \in T_n, P' \in T'_n$  definiujemy  $|PP'| := \inf\{|PQ + QP'|\}$ , gdzie  $Q \in T_{n-1}$ .

Metryka jest więc euklidesowa na  $T_n$  i  $T_{n-1}$ . Na kościach  $T_{n-2}$  metryka ma postać  $\mathbb{R}^{n-2} \times 2$ -wymiarowy stożek, wzięty z wycięcia kąta  $\varepsilon$ .

## Wstęp

Model Reggego  
Model Ponzano-Reggego

## Model Reggego

Krzywizna

### Metryka

Transport równoległy  
Tensor krzywizny  
Równanie Bianchiego  
Działanie Einsteina  
Równania Einsteina

## Model Ponzano-Reggego

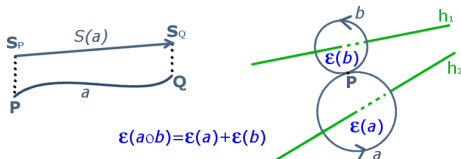
Symbole 3j  
Symbole 6j  
Symbole 6j i geometria czworoscianu  
Formuła Cayleya  
Asymptotyka symbolu 6j  
Symbole 3nj i rozmaitość symplecjalna  
Normalizacja  
Kwantyzacja działania Einsteina

## Podsumowanie

## Referencje

# Transport równoległy Levi-Civity

(Ortogonalne odwzorowanie między przestrzeniami wektorowymi)



- ▶ Deficyty kąta związane z homotopijnie równoważnymi (ściągalskimi bez przecięć) pętlami są sobie równe.
- ▶ Jeśli  $c = a \circ b$  to  $S(c)\vec{V} = S(b) \cdot S(a)\vec{V}$ .
- ▶  $\vec{V}$  ma dwie ortogonalne części:  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$ .  $S$  nie zmienia  $\vec{V}|_{\mathbb{R}^{n-2}}$ , natomiast część  $\in \mathbb{R}^2$  zostaje obrócona o kąt  $\varepsilon$ . Zatem  $S$  jest ortogonalną macierzą  $n \times n$  z niezmienniczą podprzestrzenią  $\mathbb{R}^{n-2}$ , będącą osią obrotu  $S$ .

Weźmy teraz wierzchołek z którego wychodzi  $p$  krawędzi. Obracając się wokół niego  $p$  pętlami otrzymujemy

$$S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \cdot \dots \cdot S_p = I.$$

## Wstęp

Model Reggego  
Model Ponzano-Reggego

## Model Reggego

Krzywizna  
Metryka  
Transport równoległy  
Tensor krzywizny  
Równanie Bianchiego  
Działanie Einsteina  
Równania Einsteina

## Model Ponzano-Reggego

Symbole  $3j$   
Symbole  $6j$   
Symbole  $6j$  i geometria  
czworoscianu  
Formuła Cayleya  
Asymptotyka symbolu  $6j$   
Symbole  $3nj$  i rozmiarłość  
symplecjalna  
Normalizacja  
Kwantyzacja działania  
Einsteina

## Podsumowanie

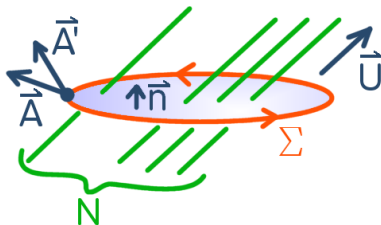
## Referencje



# Tensor krzywizny (I)

Transport równoległy można wykorzystać do wprowadzenia tensora krzywizny.

Założmy że mamy zbiór (wiązkę) równoległych krawędzi należących do symplecjoidalnej dekompozycji  $\mathcal{M}_3$  i że krzywizna indukowana przez krawędzie jest na tyle mała, że  $M_3$  jest w przybliżeniu euklidesowa. Niech:  $\vec{U}$  – wektor równoległy do krawędzi,  $\vec{A}$  – dowolny wektor, zaś  $\vec{n}$  – wektor normalny do powierzchni  $\Sigma$  zakreślonej przez pętlę obrotu.



## Tensor krzywizny (II)

Po obrocie  $\vec{A} \rightarrow \vec{A}'$ , gdzie  $\vec{A}'$  jest obrócony względem  $\vec{A}$  o kąt  $\sigma = N\varepsilon$ , gdzie  $N = \rho\Sigma \cos \angle(\vec{U}, \vec{n})$ . Mamy:

$$\vec{A}' = S(\sigma, \vec{U})\vec{A}$$

$$\frac{dA'_j(\phi)}{d\phi} = \frac{d}{d\phi} \left( e^{\phi U^i \epsilon_{ijk}} \right) A^k = U^i \epsilon_{ijk} \left( R(\phi, \vec{U})\vec{A} \right)^k = (\vec{U} \times \vec{A})_j$$

Całkując otrzymujemy:

$$\vec{A}(\sigma) = \vec{U} \times \int_0^\sigma \vec{A}(\phi) d\phi = \vec{U} \times \int_0^\sigma (\vec{A}(0) + o(\phi)) d\phi$$

$$\vec{A}(\sigma) = \vec{U} \times (\vec{A}(0)\sigma + o(\sigma^2))$$

$$\vec{A}(\sigma) \approx \sigma \vec{U} \times \vec{A}(0) = N\varepsilon \vec{U} \times \vec{A} = \rho\varepsilon (\vec{U} \times \vec{A})(\vec{U} \circ \vec{\Sigma})$$

czyli w ogólności:

$$\vec{A}' = \rho\varepsilon (\vec{U} \wedge \vec{A})(\vec{U}, \vec{\Sigma}).$$

# Tensor krzywizny (III)

W przypadku klasycznej geometrii różniczkowej wyrażenie na obrócony wektor  $A'_\mu$  ma postać:

$$A'_\mu = R_{\mu\alpha\beta}^\sigma \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \Sigma_\gamma A_\sigma. \quad (1)$$

Przekształcając wyrażenie  $\vec{A}' = \rho \epsilon (\vec{U} \wedge \vec{A}) (\vec{U}, \vec{\sigma})$  otrzymujemy:

$$\begin{aligned} A'_\mu &= \rho \epsilon \epsilon_{\mu\sigma\lambda} U^\lambda A^\sigma U_\delta \Sigma^\delta = \rho \epsilon \delta_\delta^\gamma \epsilon_{\mu\sigma\lambda} U^\lambda U^\delta A^\sigma \Sigma_\gamma = \\ &= \rho \epsilon \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\alpha\beta\delta} \epsilon_{\mu\sigma\lambda} U^\lambda U^\delta A^\sigma \Sigma_\gamma. \end{aligned}$$

Podstawiając  $U_{\mu\sigma} := \epsilon_{\mu\sigma\lambda} U^\lambda$  i definiując **tensor krzywizny**:

$$R_{\mu\sigma\alpha\beta} := \rho \epsilon U_{\mu\sigma} U_{\alpha\beta}, \quad (2)$$

otrzymujemy klasyczny wzór (1):

$$A'_\mu = \rho \epsilon U_{\mu\sigma} U_{\alpha\beta} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} A^\sigma \Sigma_\gamma = R_{\mu\alpha\beta}^\sigma \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \Sigma_\gamma A_\sigma.$$

Skośnosymetryczny tensor  $U_{\mu\sigma}$  zadaje orientację krawędzi.

Własności:  $U_{\mu\sigma} U^{\mu\sigma} = 2$ ;  $U_{\mu\sigma} U^{\alpha\beta} + U_{\mu\alpha} U^{\beta\sigma} + U_{\mu\beta} U^{\sigma\alpha} = 0$ . Ze wzoru (2) i pierwszej własności wynika wzór na **skalar krzywizny**:

$$R = 2\rho\epsilon.$$

# Równanie Bianchiego

Obrót wokół kości  $\vec{U}_p$  jest zadany macierzą:

$$(S_p)_{jk} = e^{\varepsilon_p U_p^i \epsilon_{ijk}}.$$

Sumując obroty wokół wszystkich kości wychodzących z danego wierzchołka mamy:

$$S_1 S_2 \cdots S_m = 1,$$

czyli

$$\prod_{p=1}^m \exp(\varepsilon_p U_p^i \epsilon_{ijk}) = 1,$$
$$\exp\left(\sum_{p=1}^m \varepsilon_p U_p^i \epsilon_{ijk}\right) = 1,$$
$$\sum_{p=1}^m \varepsilon_p U_p^i \epsilon_{ijk} = 0.$$

Równanie to pełni w geometrii symplecjoidalnej rolę spełnianą w geometrii różniczkowej przez tożsamość Bianchiego.

# Działanie Einsteina–Reggego

Klasyczne działanie Einsteina–Hilberta:

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi} \int R d^4x \sqrt{-\det g}.$$

W przypadku symplecjajalnym  $R$  jest dystrybucją, której nośnikami są kości szkieletu symplecjajalnego.

- ▶ Działanie Einsteina–Reggego jest addytywną funkcją kości:

$$S_{ER} = \sum_i F(l_i, \varepsilon_i),$$

- ▶ Kości są jednorodne, zatem  $F$  jest proporcjonalne do długości krawędzi:

$$F(l_i) = l_i \cdot f(\varepsilon_i),$$

- ▶  $l_i$  może być rozpatrywane jako superpozycja dwóch krawędzi o tych samych długościach takich że  $\varepsilon_i = \varepsilon'_i + \varepsilon''_i$ , zatem  $f(\varepsilon_i) = f(\varepsilon'_i) + f(\varepsilon''_i)$ , co implikuje:

$$f(\varepsilon) = \text{const} \cdot \varepsilon.$$

# Działanie i równania Einsteina–Reggego

Ostatecznie mamy:

$$S_{ER} = \text{const} \cdot \sum_i \varepsilon_i l_i.$$

Z drugiej strony  $S = \frac{1}{16\pi} \int (2\varepsilon\rho) d^4x$ . W rezultacie:

$$S_{ER} = \frac{1}{8\pi} \sum_i \varepsilon_i l_i.$$

Dla  $\dim \mathcal{M} = n$  zamiast długości krawędzi  $l_i$  mamy w działaniu rozmiar  $(n-2)$ -kości  $L_i$ . Równania Einsteina otrzymuje się z wariacji  $\delta S = 0$ .

$$\delta S_{ER} = \frac{1}{8\pi} \left( \sum_i l_i \delta \varepsilon_i + \sum_i \varepsilon_i \delta l_i \right).$$

Pierwszy człon znika w każdym wymiarze. W  $\dim(\mathcal{M}) = 3$  powyższe równanie daje  $\varepsilon_i = 0$  (3-wymiarowe szkielety Einsteina są płaskie). W  $\dim(\mathcal{M}) = 4$  mamy:

$$\sum_i \varepsilon_i \frac{\partial L_i}{\partial l_j} = 0.$$

# Część II

## Kwantowa grawitacja Ponzano-Reggego

### Wstęp

Model Reggego

Model Ponzano-Reggego

### Model Reggego

Krzywizna

Metryka

Transport równoległy

Tensor krzywizny

Równanie Bianchiego

Działanie Einsteina

Równania Einsteina

### Model Ponzano-Reggego

Symbole  $3j$

Symbole  $6j$

Symbole  $6j$  i geometria  
czworościanu

Formuła Cayleya

Asymptotyka symbolu  $6j$

Symbole  $3nj$  i rozmaitość  
symplicjalna

Normalizacja

Kwantyzacja działania  
Einsteina

### Podsumowanie

### Referencje

# Symbol 3j Wignera

Funkcja falowa trzech cząstek o spinach  $j_1, j_2, j_3$  i ich rzutów  $m_1, m_2, m_3$  ( $-j_i \leq m_i \leq j_i$ ) ma postać

$$\psi_0 = \sum_{m_1, m_2, m_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \psi_{j_1 m_1}^{(1)} \psi_{j_2 m_2}^{(2)} \psi_{j_3 m_3}^{(3)},$$

gdzie  $j_1 + j_2 + j_3$  musi być całkowite, zaś skalar

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \det \begin{bmatrix} j_2 + j_3 - j_1 & j_3 + j_1 - j_2 & j_1 + j_2 - j_3 \\ j_1 - m_1 & j_2 - m_2 & j_3 - m_3 \\ j_1 + m_1 & j_2 + m_2 & j_3 + m_3 \end{bmatrix}$$

nazywa się **symbolami 3j Wignera**. Ponieważ przy składaniu spinów mamy do czynienia z warunkiem

$$|j_1 - j_2| \leq j_3 \leq j_1 + j_2,$$

możemy utożsamić  $j_1, j_2, j_3$  z bokami trójkąta, natomiast symbol 3j ze ścianką tego trójkąta.



# Symbole 6j Racaha (I)

Dla układu 2 cząstek posiadających zadany moment pędu  $j$ ,  $m$  mamy

$$\Psi_{jm} = (-1)^{j_1 - j_2 + m} \sqrt{(2j+1)} \sum_{m_1, m_2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix} \Psi_{j_1 m_1}^{(1)} \Psi_{j_2 m_2}^{(2)}.$$

Współczynniki

$$C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{jm} = (-1)^{j_1 - j_2 + m} \sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix}$$

są **współczynnikami Clebsha–Gordana** i określają zależność elementów macierzowych wektorowej wielkości fizycznej od wartości rzutu momentu pędu. Można określić analogiczne wzory dla nieprzywiedlnego tensora dowolnego rzędu (Racah 1942). W tym celu należy się posłużyć **współczynnikami 6j Racaha**, zdefiniowanymi przy pomocy symboli 3j jako

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \sum_{m_1, \dots, m_6} (-1)^{\sum_i (j_i - m_i)} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} j_1 & j_5 & j_6 \\ m_1 & -m_5 & m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & j_2 & j_6 \\ m_4 & m_2 & -m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & j_5 & j_3 \\ -m_4 & m_5 & m_3 \end{pmatrix}$$

## Wstęp

Model Reggego  
Model Ponzano-Reggego

## Model Reggego

Krzywizna  
Metryka  
Transport równoległy  
Tensor krzywizny  
Równanie Bianchiego  
Działanie Einsteina  
Równania Einsteina

## Model Ponzano-Reggego

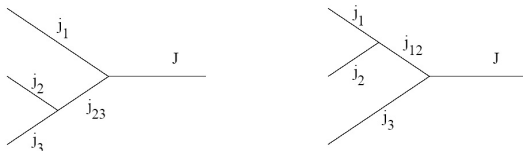
Symbole 3j  
**Symbole 6j**  
Symbole 6j i geometria czworoscianu  
Formuła Cayleya  
Asymptotyka symbolu 6j  
Symbole 3nj i rozmiarowość symplecticzna  
Normalizacja  
Kwantyzacja działania Einsteina

## Podsumowanie

## Referencje

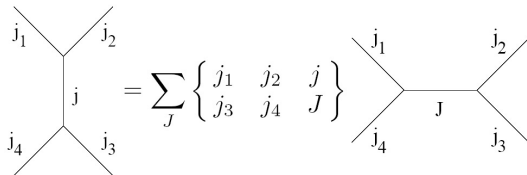
# Symbol 6j Racaha (II)

Symbol 6j można traktować jako rodzaj uogólnienia współczynników Clebscha–Gordana. Schematycznie można go opisać jako:



$$|j_1, (j_2, j_3) j_{23}, J \rangle =$$

$$\sum_{j_{12}} \sqrt{(2j_{12} + 1)(2j_{23} + 1)} (-1)^{j_1 + j_2 + j_3 + J} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_{12} & j_{23} & J \end{matrix} \right\} |(j_1, j_2) j_{12}, j_3, J \rangle.$$



# Symbole $6j$ Racaha (III)

Bezpośredni kombinatoryczny wzór służący do obliczania wartości symbolu  $6j$  jest następujący:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \end{array} \right\} = \Delta(a, b, c)\Delta(a, e, f)\Delta(c, d, e)\Delta(b, d, f) \cdot \sum_x (-1)^x (x+1)!$$

$$\cdot [(a+b+d+e-x)!(a+c+d+f-x)!(b+c+e+f-x)!(x-a-b-c)! \cdot (x-a-e-f)!(x-c-d-e)!(x-b-d-f)!]^{-1},$$

gdzie

$$\Delta(a, b, c) = \sqrt{\frac{(a+b-c)!(b+c-a)!(c+a-b)!}{(a+b+c+1)!}}$$

## Wstęp

Model Reggego  
Model Ponzano-Reggego

## Model Reggego

Krzywiżna  
Metryka  
Transport równoległy  
Tensor krzywizny  
Równanie Bianchiego  
Działanie Einsteina  
Równania Einsteina

## Model Ponzano-Reggego

Symbole  $3j$   
**Symbole  $6j$**   
Symbole  $6j$  i geometria czworosięca  
Formuła Cayleya  
Asymptotyka symbolu  $6j$   
Symbole  $3nj$  i rozmaitość symplecjalna  
Normalizacja  
Kwantyzacja działania Einsteina

## Podsumowanie

## Referencje

# Symbole $6j$ i geometria czworościanu

Model  
Ponzano-Reggego

Ryszard Paweł  
Kostecki

Spiny w każdym z symboli  $3j$  z których składa się symbol  $6j$  musi

$$\begin{cases} a \leq b + c \\ b \leq c + a \\ c \leq a + b \end{cases}$$

Założmy że mamy czworościan którego krawędzie oznaczamy numerami reprezentacji w taki sposób, że dla każdej ścianki spełnione są powyższe warunki. Wówczas z każdą ścianką możemy związać **przestrzeń euklidesową**, interpretując liczby przypisane krawędziom jako ich długości. W ten sposób symbol  $3j$  utożsamiamy z dwuwymiarowym sympleksem natomiast symbol  $6j$  z sympleksem trójwymiarowym.

Wstęp

Model Reggego  
Model Ponzano-Reggego

Model Reggego

Krzywizna  
Metryka  
Transport równoległy  
Tensor krzywizny  
Równanie Bianchiego  
Działanie Einsteina  
Równania Einsteina

Model  
Ponzano-Reggego

Symbole  $3j$   
Symbole  $6j$   
**Symbole  $6j$  i geometria czworościanu**  
Formuła Cayleya  
Asymptotyka symbolu  $6j$   
Symbole  $3j$  i rozmierność symplecjalna  
Normalizacja  
Kwantyzacja działania Einsteina

Podsumowanie

Referencje

# Formuła Cayleya (I)

Dla zadanych długości  $j_1, j_2$  i  $j_3$  boków trójkąta można obliczyć jego powierzchnię przy pomocy kombinatorycznej formuły Herona:

$$A^2 = \frac{1}{16}(j_1 + j_2 + j_3)(j_1 + j_2 - j_3)(j_1 - j_2 + j_3)(-j_1 + j_2 + j_3)$$
$$= -\frac{1}{16} \begin{vmatrix} 0 & j_1^2 & j_2^2 & 1 \\ j_1^2 & 0 & j_3^2 & 1 \\ j_2^2 & j_3^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Analogiczna formuła Cayleya zadaje zależność pomiędzy objętością czworościanu a długościami jego krawędzi:

$$2^3(3!)^2 V^2 = \begin{vmatrix} 0 & j_{34}^2 & j_{24}^2 & j_{23}^2 & 1 \\ j_{34}^2 & 0 & j_{14}^2 & j_{13}^2 & 1 \\ j_{24}^2 & j_{14}^2 & 0 & j_{12}^2 & 1 \\ j_{23}^2 & j_{13}^2 & j_{12}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

gdzie  $j_{nm}$  jest długością krawędzi łączącej wierzchołki  $n$  z  $m$ .

# Formuła Cayleya (II)

Przypadki:

- ▶  $V^2 > 0$  – czworościan jest euklidesowy  
(istnieje niezdegenerowane izometryczne zanurzenie w euklidesową przestrzeń metryczną  $\mathbb{E}^3$ )
- ▶  $V^2 = 0$  – czworościan jest płaski  
(istnieje izometryczne zanurzenie w  $\mathbb{E}^2$ )
- ▶  $V^2 < 0$  – czworościan jest hiperpłaski  
(istnieje niezdegenerowane izometryczne zanurzenie w przestrzeń metryczną Minkowskiego)

W przypadku  $V^2 > 0$  oznaczymy przez  $\theta_a, \dots, \theta_f$  kąty pomiędzy prostymi prostopadłymi do ścianek przylegających do krawędzi  $a, \dots, f$ .

## Wstęp

Model Reggego  
Model Ponzano-Reggego

## Model Reggego

Krzywiżna  
Metryka  
Transport równoległy  
Tensor krzywizny  
Równanie Bianchiego  
Działanie Einsteina  
Równania Einsteina

## Model Ponzano-Reggego

Symbole  $3j$   
Symbole  $6j$   
Symbole  $6j$  i geometria  
czworościanu

### Formuła Cayleya

Asymptotyka symbolu  $6j$   
Symbole  $3nj$  i rozmiarowość  
symplekcyjna  
Normalizacja  
Kwantyzacja działania  
Einsteina

## Podsumowanie

## Referencje

# Asymptotyka symbolu $6j$

Ponzano i Regge (1968) wprowadzili (udowodnioną przez Robertsa w 1999) asymptotyczną formułę dla sytuacji kiedy parametry symbolu  $6j$  stają się semiklasyczne (momenty pędu osiągają duże wartości równomiernie we wszystkich kierunkach):

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{array} \right\} \approx \frac{1}{\sqrt{12\pi V}} \cos \left( \sum_i j_i \theta_i + \frac{\pi}{4} \right). \quad (3)$$

W przypadku  $V^2 < 0$  zespolona wartość  $V$  implikuje zespoloną wartość  $\theta_i$ . Podstawiając  $\theta_j := n\pi + i\text{Im}\theta_j$  i korzystając z rozwinięcia WKB Ponzano i Regge policzyli:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{array} \right\} \approx \frac{1}{2\sqrt{12\pi|V|}} \cos \Phi \exp \left( - \left| \sum_i j_i \text{Im}\theta_i \right| \right), \quad (4)$$

gdzie  $\Phi = \sum_i (j_i - \frac{1}{2}) \cdot \text{Re}\theta_i$ . Obydwa te rozwinięcia zachowują oryginalne symetrie i tożsamości symbolu  $6j$ .

## Wstęp

Model Reggego  
Model Ponzano-Reggego

## Model Reggego

Krzywizna  
Metryka  
Transport równoległy  
Tensor krzywizny  
Równanie Bianchiego  
Działanie Einsteina  
Równania Einsteina

## Model Ponzano-Reggego

Symbole  $3j$   
Symbole  $6j$   
Symbole  $6j$  i geometria czworosięanu  
Formuła Cayleya  
Asymptotyka symbolu  $6j$   
Symbole  $3nj$  i rozmierność symplecjalna  
Normalizacja  
Kwantyzacja działania Einsteina

## Podsumowanie

## Referencje

# Symbole $3nj$ i rozmaitość symplecjalna (I)

Model  
Ponzano-Reggego

Ryszard Paweł  
Kostecki

W bardziej ogólnym przypadku, dla  $n \geq 2$  mamy do czynienia z symbolami  $3nj$ . Diagram  $D$  reprezentujący symbol  $3nj$  określony jest za pomocą symboli  $3j$  w następujący sposób:

1.  $D$  jest 2-wymiarową rozmaitością kombinatoryczną.
2. Zachodzi 1-1 odpowiedniość między krawędziami  $D$  i spinami w  $[D]$ .
3. Zachodzi 1-1 odpowiedniość między ściankami  $D$  i  $3j$ -symbolami w  $[D]$ .
4. cianki  $D$  składają się z krawędzi  $D$  występujących jako spiny w odpowiednim  $3j$ -symbolu w  $[D]$ .
5. Zapominamy o orientacji sympleksów.

Wstęp

Model Reggego  
Model Ponzano-Reggego

Model Reggego

Krzywizna  
Metryka  
Transport równoległy  
Tensor krzywizny  
Równanie Bianchiego  
Działanie Einsteina  
Równania Einsteina

Model  
Ponzano-Reggego

Symbole  $3j$   
Symbole  $6j$   
Symbole  $6j$  i geometria czworosićianu  
Formuła Cayleya  
Asymptotyka symbolu  $6j$   
**Symbole  $3nj$  i rozmaitość symplecjalna**  
Normalizacja  
Kwantyzacja działania Einsteina

Podsumowanie

Referencje



# Symbole $3nj$ i rozmaitość symplecticzna (II)

## Dekompozycja na czworościany (symbole $6j$ )

- ▶ Dla określonego symbolu  $[D]$  istnieje kilka różnych konfiguracji tych samych krawędzi w wielościanie  $D$ .
- ▶ Jeśli przyjmie się wypukłość wielościanu  $D$  to wtedy (określonymu symbolowi  $3nj$  można jednoznacznie przypisać pewien wielościan  $D$  jeśli zada się wszystkie kąty pomiędzy jego krawędziami).
- ▶ Podanie symplecticznej dekompozycji  $\mathcal{D}(D)$  wielościanu  $D$ , takiej że  $\partial\mathcal{D}(D) = D$  rozwiązuje ten problem.

Niech:

$x_i, i \in 1, \dots, q$  – wewnętrzne krawędzie  $\mathcal{D}(D)$ , zaś  
 $l_j, j \in 1, \dots, r$  – zewnętrzne krawędzie  $\mathcal{D}(D)$ .

Każdej czworościennej komórce  $T_k$  dekompozycji  $\mathcal{D}(D)$  możemy przypisać symbol  $6j [T_k]$ .

### Wstęp

Model Reggego  
Model Ponzano-Reggego

### Model Reggego

Krzywizna  
Metryka  
Transport równoległy  
Tensor krzywizny  
Równanie Bianchiego  
Działanie Einsteina  
Równania Einsteina

### Model Ponzano-Reggego

Symbole  $3j$   
Symbole  $6j$   
Symbole  $6j$  i geometria  
czworościanu  
Formuła Cayleya  
Asymptotyka symbolu  $6j$   
**Symbole  $3nj$  i rozmaitość  
symplecticzna**  
Normalizacja  
Kwantyzacja działania  
Einsteina

### Podsumowanie

### Referencje

# Symbole $3nj$ i rozmaitość symplecjalna (III)

Suma po stanach (długościach wewnętrznych krawędzi)

Z tak skonstruowaną dekompozycją  $\mathcal{D}(D)$  możemy teraz związać sumę

$$S_D = \sum_{x_1} \dots \sum_{x_q} \prod_{k=1}^p [T_k] \cdot (-1)^\chi \prod_{i=1}^q (2x_i + 1) \quad (5)$$

$$\chi = \sum_{j=1}^q (n_j - 2)x_j + \chi_0,$$

gdzie  $n_j$  to liczba czworościanów do których należy krawędź  $j$ , zaś  $\chi_0$  to ustalona faza taka aby wykładnik przy  $(-1)$  był całkowity.

Mamy równość  $S_D = [D]$ , ale tylko w sytuacji jeśli symplecjalna dekompozycja  $\mathcal{D}(D)$  nie posiada żadnych wewnętrznych wierzchołków.

# Normalizacja (I)

Zbadamy teraz jak zachowuje się  $S_D$  w sytuacji kiedy  $D$  jest czworościanem, zaś  $\mathcal{D}(D)$  zawiera tylko jeden wewnętrzny wierzchołek. W tej sytuacji prawa strona równania (5) jest równa:

$$\begin{aligned} S_D &= \sum_{xyzt} (2x+1)(2y+1)(2z+1)(2t+1)(-1)^{x+y+z+t+a+b+c+d+e+f} \\ &\cdot \begin{Bmatrix} a & b & c \\ x & y & z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} f & e & a \\ y & z & t \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d & b & f \\ z & t & x \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} c & e & a \\ t & x & y \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix} \sum_{xyz} (2x+1)(2y+1)(2z+1) \begin{Bmatrix} a & b & c \\ x & y & z \end{Bmatrix}^2 = \\ &= \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix} \sum_{x=0}^{\infty} (2x+1)^2. \end{aligned}$$

$S_D$  jest nieskończone. Ale można to sumowanie obciąć do  $x \leq R$ , gdzie  $R$  jest duże:

$$\mathcal{R}(R) = \sum_{x=0}^R (2x+1)^2 \approx \frac{1}{\pi} \frac{4\pi R^2}{3}.$$

# Normalizacja (II)

Oznacza to, że możemy napisać:

$$[D] = \left\{ \begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \end{array} \right\} = \lim_{R \rightarrow \infty} (\mathcal{R}(R))^{-1} S_{D_{x < R, y < R, z < R, t < R}}$$

Dla ustalonego  $x$  elementy sumy znikają jeśli  $z > x + b$ ,  
 $y > x + c$ ,  $t > x + d$ , więc dla  $x < \min(R - b, R - c, R - d)$   
ograniczenia  $y, z, t < R$  nie mają znaczenia.

Możemy uogólnić powyższy wynik na dekompozycję  $\mathcal{D}(D)$   
wielościanu  $D$ :

$$[D] = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{(\mathcal{R}(R))^p} \sum_{x_1 < R} \dots \sum_{x_q < R} \prod_{k=1}^p [T_k] (-1)^x \prod_{i=1}^q (2x_i + 1).$$

## Wstęp

Model Reggego  
Model Ponzano-Reggego

## Model Reggego

Krzywizna  
Metryka  
Transport równoległy  
Tensor krzywizny  
Równanie Bianchiego  
Działanie Einsteina  
Równania Einsteina

## Model Ponzano-Reggego

Symbole 3j  
Symbole 6j  
Symbole 6j i geometria  
czworościanu  
Formuła Cayleya  
Asymptotyka symbolu 6j  
Symbole 3nj i rozmiarowość  
symplicjalna  
**Normalizacja**  
Kwantyzacja działania  
Einsteina

## Podsumowanie

## Referencje

# Kwantyzacja działania Einstein (I)

Podstawiając do sumy

$$S = \sum_{x_1} \dots \sum_{x_q} \prod_{k=1}^p [T_k] (-1)^{x_0} (-1)^{\sum_{j=1}^q (n_j - 2)x_j} \prod_{j=1}^q (2x_j + 1)$$

asymptotyczne rozwinięcie symbolu  $6j$

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\sqrt{12\pi V}} \cos \left( \sum_i j_i \theta_i^k + \frac{\pi}{4} \right)$$

otrzymujemy

$$S = \sum_{x_1} \dots \sum_{x_q} \prod_{k=1}^p (-1)^{x_0} \frac{1}{2\sqrt{12\pi V_k}} \left( e^{i(\sum_j^q j_j \theta_j^k + \frac{\pi}{4})} + \right. \\ \left. - e^{-i(\sum_j^q j_j \theta_j^k + \frac{\pi}{4})} \right) \prod_{j=1}^q e^{-i\pi(n_j - 2)x_j} (2x_j + 1)$$

## Wstęp

Model Reggego  
Model Ponzano-Reggego

## Model Reggego

Krzywizna  
Metryka  
Transport równoległy  
Tensor krzywizny  
Równanie Bianchiego  
Działanie Einsteina  
Równania Einsteina

## Model Ponzano-Reggego

Symbole  $3j$   
Symbole  $6j$   
Symbole  $6j$  i geometria czworościanu  
Formuła Cayleya  
Asymptotyka symbolu  $6j$   
Symbole  $3nj$  i rozmierność symplecjalna  
Normalizacja  
**Kwantyzacja działania Einsteina**

## Podsumowanie

## Referencje

# Kwantyzacja działania Einsteina (II)

Wybieramy z tej sumy tylko człon zawierający iloczyn samych dodatnich eksponentów:

$$\prod_{j=1}^q \exp(i(\sum_{k=1}^{p_j} (\theta_j^k x_j) + \pi p_j x_j + 2\pi x_j)) = \prod_{j=1}^q \exp(ix_j(2\pi - \sum_{k=1}^{p_j} (\pi - \theta_j^k))) = \\ = \exp(i \sum_{j=1}^q x_j \varepsilon_j) = \exp(i8\pi S_{ER}).$$

Wynika z tego że w sumie  $S_D$  występuje człon

$$\sum_{x_1} \dots \sum_{x_q} \prod_{k=1}^p (-1)^{x_0} \frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{12\pi V_k}} \prod_{j=1}^q (2x + 1) e^{i8\pi S_{ER}}$$

czyli

$$\int \prod_i d\mu(x_i) e^{i8\pi S_{ER}(x_i)}$$

# Podsumowanie

- ▶ Klasyczna grawitacja w modelu Reggego wyraża się przez działanie  $S_{ER} = \sum_i l_i \epsilon_i$ .
- ▶ Kwantowa grawitacja w modelu Ponzano–Reggego pojawia się pod postacią całki  $\int d\mu(x_i) \exp(i \sum_l l_l \epsilon_l \cdot 8\pi)$ .
- ▶ Uwagi
  - ▶ Są to wyniki dla symplecticznej dekompozycji 3-wymiarowej rozmaitości. W wyższych wymiarach nie ma problemów z klasycznym modelem Reggego, ale nie jest jasny sens kwantyzacji Ponzano-Reggego.
  - ▶ Otwarty problem: nieokreślone znaczenie fizyczne pozostałych elementów sumy  $S_D$  w kwantyzacji Ponzano–Reggego.
  - ▶ Otwarty problem: dyffeomorficzna niezmienniczość.
  - ▶ Aktualne badania: Lorentzowska wersja kwantyzacji Ponzano-Reggego (L. Freidel i inni)

- ▶ T. Regge, **General Relativity without coordinates**, *Il Nuovo Cimento*, Vol.19, N.3, 1961, p.558
- ▶ G. Ponzano, T. Regge, **Semiclassical limit of Racah coefficients**, *Spectroscopic and group theoretical methods in physics*, Amsterdam 1968, p.1
- ▶ J. Roberts, **Classical  $6j$ -symbols and the tetrahedron**, *Geometry and Topology*, Vol.3 (1999), p.21
- ▶ T. Regge, R.M. Williams, **Discrete structures in gravity**, *J.Math.Phys.* 41 (2000) p.3964.