Аюпов Ш.А.

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ OJ -АЛГЕБРЫ

В настоящей работе приводится теорема о вложении OJ -алгебр в универсальные OJ -алгебры. Дается описание некоторых классов универсальных OJ -алгебр. Придерживаемся терминологии работ [1 - 3].

Определение . OJ -алгебра $\mathcal{A}$ называется универсальной, если для всякого спектрального семейства идемпотентов $\{e_\lambda\}$ в $\mathcal{A}$ существует интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\lambda de_\lambda$

Нетрудно проверить, что OJ -алгебра является универсальной тогда и только тогда, когда всякая её максимальная сильно ассоциативная подалгебра является универсальным полуполем.

Из теории полуполей [4] известно, что всякое полуполе может быть вложено в универсальное. Для OJ -алгебр в общем случае этот факт не верен. Например, совокупность $B_h(H)$ всех эрмитовых ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H $(\dim H = \infty)$ является OJ -алгеброй относительно симметризованного умножения $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$. Эта OJ -алгебра не универсальна и не вкладывается ни в какую универсальную /см. теоремы 1-3 /. Однако при некоторых дополнительных предположениях теорема о вложении может быть получена.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{A}, \tilde{\mathcal{A}}$ - OJ -алгебры, причем $\tilde{\mathcal{A}}$ универсальна, $\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}$ OJB -алгебры ограниченных элементов $\mathcal{A}$ и $\tilde{\mathcal{A}}$ соответственно. И пусть Φ_0 йорданов изоморфизм $\mathcal{B}$ на $\tilde{\mathcal{B}}$. Тогда Φ_0 единственным образом можно продолжить до изоморфизма Φ OJ -алгебры $\mathcal{A}$ на заполненную OJ -подалгебру $\tilde{\mathcal{A}}$. Если $\mathcal{A}$ также является универсальной, то Φ является изоморфизмом $\mathcal{A}$ на $\tilde{\mathcal{A}}$.

Пусть $\mathcal{U}$ W^* - алгебра в гильбертовом пространстве H, $E(\mathcal{U})$ - алгебра всех линейных операторов в H , измеримых относительно $\mathcal{U}$ [5]. Тогда совокупность $E_h(\mathcal{U})$ эрмитовых операторов из $E(\mathcal{U})$ с симметризованным умножением является OJ -алгеброй [1,2].

Теорема 2. OJ - алгебра $E_h(\mathcal{U})$ универсальна тогда и только тогда, когда W^* -алгебра $\mathcal{U}$ конечна.

Хотя, как видно из теоремы 2, $E_h(\mathcal{U})$ не всегда универсальна, теорему 1 в одном частном случае можно усилить.

Т е о р е м а 3. Пусть $\mathcal{A}$ OJ - алгебра, OJB -алгебра ограниченных элементов которой изоморфна эрмитовой части W^* -алгебры $\mathcal{U}$. Тогда $\mathcal{A}$ изоморфно вкладывается в OJ - алгебру $E_h(\mathcal{U})$ как заполненная подалгебра.

Рассмотрим теперь одну общую конструкцию чисто исключительных [6,7] универсальных OJ -алгебр. Пусть $\mathcal{M}_3^8$ йорданова алгебра всех эрмитовых 3×3 матриц над числами Кэли. И пусть $\mathcal{M} = \mathcal{M}_3^8 \cup \{\infty\}$ одноточечная компактификация конечномерной JB -алгебры $\mathcal{M}_3^8$. Через $S(X,\mathcal{M}_3^8)$ обозначим совокупность всех непрерывных отображений $f: X \to \mathcal{M}$ некоторого гиперстоуновского компакта X в $\mathcal{M}$ таких, что $f^{-1}(\infty)$ нигде не плотно в X [1]. Пусть ∇ -булева алгебра открыто замкнутых подмножеств X, S_∇ универсальное полуполе, построенное на булевой алгебре ∇ [4].

Т е о р е м а 4. В пространстве $S(X,\mathcal{M}_3^8)$ можно единственным образом определить алгебраические операции и частичный порядок, относительно которых $S(X,\mathcal{M}_3^8)$ является универсальной OJ -алгеброй. При этом (i) OJB -алгеброй ограниченных элементов $S(X,\mathcal{M}_3^8)$ является JBW -алгебра $C(X,\mathcal{M}_3^8)$ всех непрерывных отображений X в $\mathcal{M}_3^8$ [7].

(ii) Всякая максимальная сильно ассоциативная подалгебра $S(X,\mathcal{M}_3^8)$ изоморфна универсальному полуполю S_∇^3

(iii) Центр OJ -алгебры $S(X,\mathcal{M}_3^8)$ изоморфен S_∇.

(iv) Алгебра $S(X,\mathcal{M}_3^8)$ изоморфна тензорному произведению $S_\nabla \otimes \mathcal{M}_3^8$

Из теорем I, 4 вытекает

С л е д с т в и е. Пусть $\mathcal{A}$ OJ - алгебра, подалгебра ограниченных элементов которой изоморфна JBW -алгебра $C(X,\mathcal{M}_3^8)$. Тогда $\mathcal{A}$ изоморфна заполненной подалгебре OJ -алгебры $S(X,\mathcal{M}_3^8)$

Л и т е р а т у р а

I. Саримсаков Т.А., Аюпов Ш.А. ДАН СССР, 1979, т. №

2. Аюпов Ш.А., Докл. АН УзССР, 1979, № 8, 6-8.

3. Аюпов Ш.А. Докл. АН УзССР, 1979, № 9, 3-5.

4. Антоновский М.Я., Болтянский В.Г., Саримсаков Т.А., Топологические алгебры Буля. Ташкент, 1963.

5. Segal I. Ann. Math. 1953, 57, 401-457

6. Alfsen E.M., Shultz F.W., Størmer E., "Advances in Math", 1978, 28, № 1, 11-56

1) В более общей ситуации эта конструкция приведена в работе 8

7. Shultz F.W. "Journ of Funct. Anal", 1979, 31, № 1, 360-376.

8. Саримсаков Т.А., Насиров С.Н., Хаджиев Дж. ДАН СССР, 1975, т.225, № 5, 1018-1019.