УДК 517.98

Ш. А. АЮПОВ

ТЕОРЕМА РАДОНА—НИКОДИМА ДЛЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ НА JBW-АЛГЕБРАХ

Йордановы банаховы алгебры, обладающие предсопряженным пространством, JBW-алгебры [1, 2], представляют собой абстрактный неассоциативный аналог W^*-алгебр [3]. Здесь мы докажем один вариант теоремы Радона — Никодима для нормальных положительных линейных функционалов на JBW-алгебрах. В частном случае, когда JBW-алгебра является эрмитовой частью W^*-алгебры, наш результат совпадает с результатом Сакаи [3, теорема 1.24.4].

Пусть A — JBW-алгебра, N — ее предсопряженное банахово пространство, отождествленное с пространством всех нормальных линейных функционалов на A [2, теорема 2.3]. Для φ, $\psi \in N$ запись $\psi \leqslant \varphi$ означает, что $\psi(x) \leqslant \varphi(x)$ для всех $x \in A$, $x \geqslant 0$. Если $a \in A$, $\varphi \in N$, то равенство

$$(L_a \varphi)(x) = \varphi(ax),\ x \in A,$$

определяет нормальный линейный функционал $L_a \varphi$ на А, т. е $L_a \varphi \in N$ для всех $a \in A$, $\varphi \in N$ (см. [2, лемму 2.2]). Основным результатом данной статьи является следующая

Теорема. Пусть φ, ψ — нормальные положительные линейные функционалы на JBW-алгебре A и $\psi \leqslant \varphi$. Тогда существует элемент $d \in A$, $0 \leqslant d \leqslant 1$, такой, что $\psi = L_d \varphi$, т. е. $\psi(x) = \varphi(dx)$ для всех $x \in A$.

Доказательство. Пусть $U = \{a \in A : \|a\| \leqslant 1\}$ — единичный шар в A. Тогда U является выпуклым подмножеством, компактным в *-слабой топологии в A, т. е. топологии $\sigma(A,N) = \sigma(N^*,N)$. Через $\sigma(N, A) = \sigma(N, N^*)$ обозначим слабую топологию в N. Отображение

$$L : a \to L_a \varphi : A \to N$$

при фиксированном $\varphi \in E$ является непрерывным линейным отображением из $\{A, \sigma(A, N)\}$ в $\{N, \sigma(N, A)\}$. В самом деле, линейность L очевидна. Если $a_\alpha \to a$ *-слабо в А, то в силу *-слабой непрерывности умножения в JBW-алгебрах по каждому аргументу [1, следствие 3.4], имеем, что $a_\alpha x \to ax$ *-слабо для любого $x \in A$. Это по определению $\sigma(A, N)$ означает, что $f(a_\alpha x) \to f(ax)$ для всех $f \in N$ и, в частности, $\varphi(a_\alpha x) \to \varphi(ax)$, т. е. $(L_{a_\alpha} \varphi)(x) \to (L_a \varphi)(x)$ для всех $x \in A$. По определению $\sigma(N, A)$ последнее означает, что $L_\alpha \varphi \to L_a \varphi$ слабо. Следовательно, отображение $L : a \to L_a \varphi$ непрерывно. Поэтому оно отображает выпуклое *-слабо компактное множество U из A в выпуклое слабо компактное множество $V = L(U)$ из N.

Покажем, что в условиях теоремы $\psi \in V$. Допустим противное, т. е. $\psi \bar{\in} V$, Тогда из замкнутости и выпуклости V в силу теоремы Хана-Банаха вытекает, что существует элемент $x_0 \in A = N^*$, такой, что

$$|f(x_0)| \leqslant 1 \text{ для всех } f \in V, \tag{1}$$

$$|\psi(x_0)| > 1. \tag{2}$$

С другой стороны, пусть x_0^+, x_0^- — соответственно положительная и отрицательная части элемента x_0 в A, $e = r\left(x_0^+\right)$ — носитель элемента x_0^+ (см. [1, §4]). Тогда

$$\varphi([e-(1-e)]\,x_0) = \varphi\left(x_0^+ + x_0^-\right) = \varphi(|x_0|) \geqslant \psi(|x_0|). \tag{3}$$

Так как $\|e-(1-e)\| = 1$, то $L_{e-(1-e)}\varphi \in V$ и в силу (1) $|\varphi([e-(1-e)]\,x_0)| = |(L_{e-(1-e)}\varphi)(x_0)| \leqslant 1$. Отсюда согласно (3) имеем $\psi(|x_0|) \leqslant 1$.

Следовательно, $|\psi(x_0)| \leqslant \psi(|x_0|) \leqslant 1$, что противоречит соотношению (2). Поэтому существует такой элемент $a \in U$, что

$$\psi = L_a\varphi. \tag{4}$$

Пусть $p = r(a^+)$ — носитель положительной части элемента a. Тогда из положительности ψ и неравенства $p-(1-p) \leqslant 1$ следует, что

$$\psi(1) \geqslant \psi(p-(1-p)) = \varphi([p-(1-p)]a) = \varphi(a^+ + a^-),$$

т. е.

$$\varphi(a^+) + \varphi(a^-) \leqslant \psi(1). \tag{5}$$

В то же время

$$\varphi(a^+) - \varphi(a^-) = \varphi(a) = \psi(1).$$

Отсюда и из (5) $0 \leqslant \psi(a^-) \leqslant \varphi(a^-) \leqslant 0$, т. е.

$$\psi(a^-) = 0. \tag{6}$$

Положим $d = a^+$. Так как $\|d\| = \|a^+\| \leqslant \|a\| \leqslant 1$, то, очевидно, $0 \leqslant d \leqslant 1$. Покажем, что $\psi = L_d\varphi$. Для любого $x \in A$ в силу неравенства Шварца и соотношений (4), (6) имеем

$$[\varphi(a^-x)]^2 \leqslant \varphi([a^-]^2)\,\varphi(x^2) = \varphi(a\bar{a})\,\varphi(x^2) =$$
$$= \psi(a^-)\,\varphi(x^2) = 0, \text{ т. е. } \varphi(a^-x) = 0.$$

Поэтому из (4) следует

$\psi(x) = \varphi(ax) = \varphi(a^+x) - \varphi(a^-x) = \varphi(a^+x) = \varphi(dx)$ для всех $x \in A$, т. е. $\psi = L_d\varphi$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Alfsen E. M., Shultz F. M., Stormer E. A. Gelfand-Neumark theorem for Jordan algebras.— Advances in Math., 1978, v. 28, N 1, p. 11—56. 2. Shultz F. M. On normed Jordan algebras which are Banach dual spaces.— J. Functional Analysis, 1979, v. 31, N 3, p. 360—376. 3. Sakai S. C*-algebras and W*-algebras. Berlin, 1971, p. 256.

Институт математики им. В. И. Романовского
АН УзССР

Поступило
10. 05. 1984 г.