61:85-1/988-X

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
УЗБЕКСКОЙ ССР

ТАШКЕНТСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И.ЛЕНИНА

На правах рукописи

БЕРДИКУЛОВ Мусирмонкул Абдиллаевич

УДК 517.98 + 519.21

УСЛОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЖИДАНИЯ И МАРТИНГАЛЫ НА ЙОРДАНОВЫХ БАНАХОВЫХ АЛГЕБРАХ С ПОЛУКОНЕЧНЫМ СЛЕДОМ

(01.01.01 – математический анализ)

Д и с с е р т а ц и я

на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научные руководители:
академик АН УзССР Т.А.САРЫМСАКОВ,
доктор физико-математических
наук Ш.А.АЮПОВ

Ташкент – 1984

СОДЕРЖАНИЕ

В В Е Д Е Н И Е

В 1953 году в работе Сигала [38] были заложены основы некоммутативного интегрирования. Он рассмотрел алгебру неограниченных операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана, являющуюся некоммутативным аналогом пространства измеримых функций на пространстве с мерой. В дальнейшем алгебры измеримых операторов были рассмотрены в работах Стайнспринга [41] ,Санкарана [36] ,[37] , Падманабхана [35] , Нельсона [33] , Йедона [53] и других.

Нельсон [33] доказал, что алгебра тотально измеримых операторов [54] является пополнением алгебры фон Неймана в топологии сходимости по мере (топология построенная при помощи полуконечного следа).

Развитие теории алгебр фон Неймана и некоммутативного интегрирования дало толчок исследованиям по теории вероятностей на алгебрах фон Неймана.

Условные математические ожидания (у.м.о.) на алгебрах фон Неймана рассматривались в работах Умегаки [50 - 52] , Томийямы [46],[47], Арвесона [23], Такесаки [45], Накамура - -Турумару [32] , Моя [34] и других. В этих работах у.м.о. определяется аксиоматически. Основываясь на результатах Томийямы [46] , у.м.о. можно рассматривать как проекционное (т.е. $P^*=P$, $P^2=P$) отображение с единичной нормой.В своих работах Накамура - Турумару [32], Мой [34] и Умегаки [5I]дали характеризационные свойства у.м.о. Мартингалы на алгебрах фон Неймана изучались в работах Кукулеску [25],[26], Умегаки [5I], Ленса [31], Данг-Нгока [27], Барнета [24] и других. В этих работах получены теоремы о сходимости мартингалов на алгебрах фон Неймана (конечных или полуконечных).

В середине 60-х годов в работах Топпинга [48] и Штёрмера [43] впервые были рассмотрены неассоциативные вещественные аналоги алгебр фон Неймана - JW - алгебры, т.е. слабо замкнутые йордановы алгебры самосопряженных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве. После появления работы Альфсена, Шульца, Штёрмера [19] и Шульца [39] (были введены JB - и JBW - -алгебры) бурно начала развиваться теория йордановых банаховых алгебр.

Недавно Ш.А.Аюповым было введено понятие упорядоченной йордановой алгебры (OJ - алгебры) [1] , [3] . Были изучены йордановы банаховы алгебры с конечным следом. В частности изучены условия существования у.м.о. и различные сходимости мартингалов [6] ,[21] .

Более широкий и естественный класс JBW - алгебр составляют JBW - алгебры с точным нормальным полуконечным следом (он совпадает с классом всех локально модулярных JBW - алгебр [48]). Поэтому возникает задача о рассмотрении вышеупомянутых вопросов в JBW - алгебрах с полуконечным следом.

Данная диссертация посвящена решению следующих проблем:

В йордановой банаховой алгебре с полуконечным следом

- построить теорию интегрирования по следу;
- описать алгебру неограниченных элементов;
- изучить существование условных математических ожиданий относительно данной подалгебры и их свойства;
- получить теоремы о сходимости в среднем и почти всюду мартингалов.

При решении этих задач нельзя применять технику, хорошо развитую для алгебр фон Неймана. Это обусловлено тем, что существуют неоператорные (исключительные) йордановы банаховы алгебры (йорданова алгебра эрмитовых 3 х 3 матриц над числами Кэли, обозначаемая M_3^8), а также тем, что в йордановых алгебрах произведение элементов неассоциативно и нет операции инволюции. Кроме того, неприменимость техники бикоммутанта и бедный запас унитарных элементов значительно усложняют изучение йордановых банаховых алгебр по сравнению с алгебрами фон Неймана.

При построении теории интегрирования и доказательстве вероятностных теорем важную роль играет порядок, и поэтому наши исследования основаны на модификации алгебраического подхода к классической и некоммутативной теории вероятностей на основе понятий полуполя и O^* - алгебры, предложенного Т.А. Сарымсаковым [I4] ,[I5] ,[I7].

Кратко изложим основные результаты диссертации. Работа состоит из введения и двух глав.

Первая глава посвящена построению теории интегрирования на йордановых банаховых алгебрах с полуконечным следом.

В первом параграфе приведены необходимые сведения из теории йордановых банаховых алгебр (JB - и JBW - алгебр), теории упорядоченных йордановых алгебр (OJ - алгебр) и теории следов.

В § I.2 рассматривается JBW - алгебра A с точным нормальным полуконечным следом τ .

Пусть
$$K=\{x\in A \mid \tau(x^2)<+\infty\},$$

$$\mathfrak{M}_\tau = \{ x \in A \mid \tau(|x|) < +\infty \}.$$

Доказано, что K и $\mathfrak{M}_\tau$ являются йордановыми идеалами алгебры A, причем

$$\mathfrak{M}_\tau = K^2 = \{ xy \mid x, y \in K \}.$$

Определим L_1 - норму на $\mathfrak{M}_\tau$, полагая $\|x\|_1 = \tau(|x|)$ для $x \in \mathfrak{M}_\tau$, и L_2 - норму на K, полагая $\|x\|_2 = \sqrt{\tau(x^2)}$ для $x \in K$. Пополнение $\mathfrak{M}_\tau$ (соотв. K) по L_1 - норме (соотв. по L_2 -норме) обозначим через $L_1(\tau)$ (соотв. через $L_2(\tau)$).

Для $x \in \mathfrak{M}_\tau$ функционал φ_x, определенный как $\varphi_x(a) = \tau(ax)$ для $a \in A$, является нормальным, и имеет место равенство

$$\tau((ab)x) = \tau(a(bx)) \quad \forall a, b \in A.$$

Доказан следующий результат, в котором содержится неассоциативный аналог теоремы Радона-Никодима.

Т е о р е м а 2.8. Пусть A - JBW - алгебра, τ -точный нормальный полуконечный след на A, N - предсопряженное банахово пространство к A. Тогда банаховы пространства $L_1(\tau)$ и N изометрически изоморфны.

С л е д с т в и е 2.4. Отображение $x \longrightarrow \varphi_x$, где $\varphi_x(a) = \tau(ax)$ $a \in A, x \in L_1(\tau)$ (соотв. $a \in L_1(\tau)$, $x \in A$) является изометрическим и порядковым изоморфизмом между $L_1(\tau)$ и N (соотв. между A и $[L_1(\tau)]^*$).

Эти результаты необходимы в главе 2 для доказательства существования условных математических ожиданий на йордановых алгебрах.

В § I.3 при помощи точного нормального полуконечного следа τ на JBW - алгебре A строится топология t сходимости по мере.

Определение 3.I. Топологией сходимости по мере на A назовем топологию, в которой базис окрестностей нуля образует множества вида $N(\varepsilon,\delta)$, $\varepsilon>0$, $\delta>0$, где

$$N(\varepsilon,\delta)=\{a\in A \mid \exists p\in\nabla,\ p^{\perp}\in\mathfrak{M}_{\tau},\ \tau(p^{\perp})\leq\delta,\ \|U_p a\|\leq\varepsilon\}.$$

Пусть $\hat{A}$ - пополнение A в топологии t. Тогда алгебра $(\hat{A},t)$ является отделимой топологической йордановой алгеброй.

Основным результатом этого параграфа является

Теорема 3.2. Алгебра $\hat{A}$ является OJ - алгеброй, совокупность ограниченных элементов которой совпадает с A.

В дальнейшем алгебру $\hat{A}$ назовем OJ - алгеброй тотально измеримых элементов относительно JBW - алгебры A.

В § I.4 доказано, что пространства $L_1(\tau)$ и $L_2(\tau)$ инъективно вкладываются в OJ - алгебру $\hat{A}$ (теорема 4.I).

Если A_0 - максимальная сильно ассоциативная подалгебра JBW - алгебры A, и сужение m следа τ на A_0 полуконечно, то A_0 изометрически изоморфна пространству $L_\infty(S,m)$ измеримых существенно ограниченных действительных функций на пространстве (S,m) с полуконечной мерой.

При этом пространства L_1^0, L_2^0, $\hat{A}_0$, построенные по A_0 изоморфны соответственно пространствам $L_1(S,m)$, $L_2(S,m)$, $L_0(S,m)$, где $L_0(S,m)$ - пространство всех измеримых функций на S.

Следствие 4.2 $L_p^0=L_p\cap\hat{A}_0$, $p=1,2$.

Далее, имеет место

Т е о р е м а 4.2. Элемент $x=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda\, de_\lambda \in \hat{A}$ принадлежит $L_1(\tau)$ тогда и только тогда, когда $\int_{-\infty}^{+\infty}|\lambda|\, d\tau(e_\lambda)<+\infty$ при этом $\tau(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda\, d\tau(e_\lambda)$. Элемент $x\in\hat{A}$ принадлежит $L_2(\tau)$ тогда и только тогда, когда $x^2\in L_1(\tau)$.

Из этой теоремы видно, что пространства $L_1(\tau)$ и $L_2(\tau)$ в точности совпадают с пространствами интегрируемых и интегрируемых с квадратом элементов из $\hat{A}$. В случае, когда JBW - алгебра A есть эрмитова часть W^* - алгебры $\mathcal{U}$, пространства $L_1(\tau)$ и $L_2(\tau)$ изоморфны соответственно пространствам самосопряженных интегрируемых и интегрируемых с квадратом операторов, измеримых относительно $\mathcal{U}$.

Вторая глава посвящена изучению условных математических ожиданий и мартингалов на йордановых банаховых алгебрах с полуконечным следом.

Впервые условные математические ожидания на алгебрах фон Неймана были рассмотрены в работах Умегаки [50]-[52], где, в частности, он получил характеризационные теоремы для у.м.о. в конечных и в полуконечных алгебрах фон Неймана, и доказал некоммутативные аналоги теорем о сходимости в среднем для у.м.о. В работах Кукулеску [26], Данг-Нгока [27], Ленса [31], Барнета [24], С.Гольдштейна [28], М.Ш.Гольдштейна [12] и других были получены различные варианты теорем о сходимости мартингалов в среднем и почти всюду.

Мы вводим понятие у.м.о. на JBW - алгебре A с точным нормальным полуконечным следом τ следующим образом: Пусть A_1 – JBW – подалгебра, содержащая единицу $\mathbb{1}$.

Определение I.I. Линейное отображение $\Phi : A \to A_1$ назовем у.м.о. относительно A_1, если

I) $\Phi(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$;

2) $x \geqslant 0 \Longrightarrow \Phi(x) \geqslant 0$ (т.е. Φ – положительно);

3) $\Phi(xy) = \Phi(x)y$ для $x \in A$, $y \in A_1$.

Если выполняется равенство

4) $\tau(\Phi(x)) = \tau(x)$ для $x \in \mathfrak{M}_\tau$,

то у.м.о. Φ назовем τ – инвариантным.

Теорема I.I. Пусть $\Phi : A \to A_1$ τ – инвариантное у.м.о. Тогда

5) $\Phi(x)^2 \leq \Phi(x^2) \quad \forall x \in A$;

6) $\Phi(\Phi(x)) = \Phi(x) \; \forall x \in A$, $A_1 = \{x \in A \mid \Phi(x) = x\}$;

7) $\tau(x\Phi(y)) = \tau(\Phi(x)y) \; \forall x \in A, \; y \in \mathfrak{M}_\tau$;

8) если $x_\alpha \uparrow x$, то $\Phi(x_\alpha) \uparrow \Phi(x)$;

9) $x \geqslant 0$, $\Phi(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$;

I0) $\|\Phi(x)\| \leq \|x\| \; \forall x \in A$;

II) $\|\Phi(x)\|_1 \leq \|x\|_1 \; \forall x \in \mathfrak{M}_\tau$;

I2) $\|\Phi(x)\|_2 \leq \|x\|_2 \; \forall x \in K$.

По условиям II), I2) τ – инвариантное у.м.о. можно продолжить до линейного отображения из $L_p(\tau)$ в $L_p(\tau_1)$

$(\tau_1 = \tau/_{A_1})$ $(p=1,2)$, которое также будем называть у.м.о.

Следующая теорема показывает, что не для всякой данной JBW - подалгебры $A_1 \subset A$ существует у.м.о.

Т е о р е м а 1.5. Пусть $A_1 - JBW$ - подалгебра A , содержащая $\mathbb{1}$. Для того, чтобы существовало τ - инвариантное у.м.о. $\varphi : A \to A_1$ необходимо и достаточно, чтобы τ_1 - сужение следа τ на A_1 был полуконечным.

Т е о р е м а 1.6. Пусть τ_1 является полуконечным следом на A_1 . Тогда τ - инвариантное у.м.о. относительно A единственно.

В дальнейшем τ - инвариантное у.м.о. относительно JBW - подалгебры A_1 и его продолжения на $L_p(\tau)$ $(p=1,2)$ будем обозначать через $M(\cdot|A_1)$.

В § 2.2 доказаны характеризационные теоремы для у.м.о. на йордановых алгебрах.

Пусть $A - JB$ - алгебра, A_1 ее JB -подалгебра содержащая $\mathbb{1}$.

Т е о р е м а 2.1. Если $P : A \longrightarrow A_1$ линейное идемпотентное (т.е. $P(P(x)) = P(x)\ \forall x \in A$) отображение с единичной нормой и $P(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$, тогда

1) $P(a) \geqslant 0$ для $a \in A^+$, т.е. P - положительно;
2) $P(ax) = aP(x)$ для $a \in A_1$, $x \in A$.

В случае, когда A является эрмитовой частью C^* - алгебры, из этой теоремы вытекает теорема 1 работы [46] .

Пусть $A - JBW$ - алгебра с точным нормальным полуконечным следом τ .

Т е о р е м а 2.2. Пусть $P: A \longrightarrow A$ линейное положительное идемпотентное τ - инвариантное отображение с $P(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$. Тогда $A_1 = P(A)$ - область значений P - является JBW - подалгеброй и

$$P(x) = M(x|A_1) \quad \forall x \in A .$$

Пусть $x \in L_2(\tau)$ и $x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, de_\lambda$ - спектральное разложение элемента x. Очевидно $\{e_\lambda\} \subset A$. Через $W(x)$ обозначим JBW - подалгебру A порожденную $\{e_\lambda\}$. Если $S \subset L_2(\tau)$ некоторое подмножество, то через $W(S)$ обозначим JBW - подалгебру A, порожденную множеством $\{W(x), x \in S\}$. Иногда будем обозначать $L_2(\tau)$ через $L_2(A)$.

Т е о р е м а 2.3. Пусть $L = L_2(\tau)$ и $P: L \longrightarrow L$ линейное положительное идемпотентное отображение. Тогда следующие условия эквивалентны:

(i) отображение P совпадает с у.м.о. $M(\cdot|A_1)$ относительно некоторой JBW - подалгебры A_1;

(ii) $P(L) = L_2(W(P(L)))$.

В параграфах 2.3 и 2.4 получены теоремы о сходимости в среднем и почти всюду для мартингалов на йордановых алгебрах.

Пусть A - JBW - алгебра с точным нормальным полуконечным следом τ. Пусть $\{A_n\}$ - возрастающая последовательность JBW - подалгебр A с $\mathbb{1}$, причем $\bigcup\limits_n A_n$ слабо плотно в A. Предположим, что след $\tau_n = \tau|A_n$ - сужение следа τ на A_n, также полуконечно, $n = 1, 2, \ldots$.

О п р е д е л е н и е 3.I. Последовательность элементов $\{x_n\}$ в $L_1(\tau)$ назовем мартингалом (возрастающим) если для всех $n=1,2,\ldots$:

(i) $x_n \in L_1(\tau_n)$;

(ii) $M(x_{n+1}|A_n)=x_n$.

Мартингал $\{x_n\}$ называется L_1 - ограниченным, если $\sup\limits_n \|x_n\|_1 < +\infty$.

Определение 3.3. L_1 - ограниченный мартингал называется равномерно интегрируемым, если

а) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \sup\{|\tau(x_n y)| : n, y\in A, \|y\|\le 1, \|y\|_1 \le \varepsilon\}=0$;

б) для любого $\varepsilon>0$ существует идемпотент $e\in \mathfrak{M}_\tau$ такой, что

$$|\tau((U_{e^\perp} x_n)y)| < \varepsilon,\ n=1,2,\ldots,\ y\in A, \|y\|\le 1.$$

Теорема 3.2. Для того, чтобы мартингал $\{x_n\}\subset L_1(\tau)$ был равномерно интегрируемым, необходимо и достаточно, чтобы множество $\{x_n\}$ было относительно слабо компактным.

Используя эту теорему, мы получаем следующий результат.

Теорема 3.3. Пусть $\{x_n\}$ мартингал в $L_1(\tau)$ Следующие условия эквивалентны:

(i) $\{x_n\}$ - равномерно интегрируемый мартингал;

(ii) существует $x\in L_1(\tau)$ такой, что $\|x_n - x\|_1 \to 0$, $n\to\infty$;

(iii) существует $x\in L_1(\tau)$ такой, что $x_n = M(x|A_n)$, $n=1,2,\ldots$.

Т е о р е м а 3.4. Пусть $\{x_n\}$ мартингал в $L_2(\tau)$. Следующие условия эквивалентны:

а) $\sup_n \|x_n\|_2 < +\infty$

б) существует $x \in L_2(\tau)$ такой, что $\|x_n - x\|_2 \to 0$, $n \to \infty$;

в) существует $x \in L_2(\tau)$ такой, что $x_n = M(x \mid A_n)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Пусть теперь $\{A_n\}$ – убывающая последовательность JBW- подалгебр A, содержащих $\mathbb{1}$. Положим $A_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

О п р е д е л е н и е 3.4. Убывающим мартингалом называется последовательность $\{x_n\} \subset L_1(\tau)$ такая, что

1) $x_n \in L_1(\tau_n)$;

2) $M(x_n \mid A_{n+1}) = x_{n+1}$.

Имеет место следующий результат.

Т е о р е м а 3.5. Пусть $\{x_n\}$ убывающий мартингал в $L_2(\tau)$ (в $L_2(\tau) \cap A$). Тогда существует $x \in L_2(\tau)$ (соотв. $x \in L_2(\tau) \cap A$) такой, что x_n сходится к x по L_2 - норме (соотв. сильно).

В конце параграфа изучено отображение $x = x^{|e} = U_e x + U_{\mathbb{1}-e} x$ для $x \in A$ (здесь e - идемпотент в A), которое совпадает с у.м.о. относительно JBW - подалгебры $A_1 = A^{|e} = U_e(A) + U_{\mathbb{1}-e}(A)$.

$\hat{}$ Определение 4.2. Последовательность $\{x_n\}$ в $\hat{A}$ назовем сходящейся к элементу $x \in \hat{A}$ почти всюду (п.в.) (соотв. S почти всюду), если для любого $\varepsilon > 0$ существует идемпотент $q \in \nabla$ такой, что $\tau(\mathbb{1} - q) < \varepsilon$ и

$$U_q(x_n - x) \in A, n = 1, 2, \ldots, \|U_q(x_n - x)\| \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

Соответственно

$$U_q(x_n - x)^2 \in A, n = 1, 2, \ldots, \|U_q(x_n - x)^2\| \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

$\hat{}$ Замечания. 4. Если алгебра A ассоциативна, то $\hat{A}$ изоморфна алгебре $L_0(S, m)$ всех измеримых функций на пространстве (S, m) с полуконечной мерой. В этом случае понятия сходимости почти всюду и S - почти всюду совпадают и означают обычную сходимость функций почти всюду.

5. Если JBW - алгебра A специальна и является эрмитовой частью алгебры фон Неймана, то условие $\|U_q(x_n - x)^2\| \longrightarrow 0$ означает, что $\|q \cdot (x_n - x)^2 \cdot q\| \longrightarrow 0$, т.е. $\|(x_n - x) \cdot q\| \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$. Следовательно, в этом случае сходимость S - почти всюду совпадает со сходимостью операторов почти равномерно в смысле [35], [38], в то время как сходимость п.в. означает, что $\|q \cdot (x_n - x) \cdot q\| \to 0$ [26].

Теорема 4.1. Пусть $\{x_n\} - L_1$ - ограниченный мартингал. Тогда существует элемент $x \in L_1(\tau)$ такой, что $x_n \longrightarrow x$ п.в.

Теорема 4.2. Пусть $\{x_n\} - L_2$ - ограниченный мартингал. Тогда $\{x_n\}$ S - п.в. сходится к некоторому элементу $x \in L_2(\tau)$ и $M(x|A_n) = x_n$ для всех $n = 1, 2, \ldots$.

Определение 4.3. Последовательность $\{x_n\}$ в A назовем сходящейся к $x \in A$ почти равномерно, если для любого нормального состояния ρ на A и $\varepsilon > 0$, существует идемпотент $q \in \nabla$ такой, что $\rho(\mathbb{1} - q) < \varepsilon$ и $\|U_q(x_n - x)\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Теорема 4.3. Для любого $x \in A$ $M(x|A_n) \to x$ почти равномерно при $n \longrightarrow \infty$.

Пользуясь случаем, выражаю искреннюю благодарность своим научным руководителям академику АН УзССР Т.А.Сарымсакову, доктору физико-математических наук Ш.А.Аюпову за постоянное внимание и поддержку при написании этой работы.

ГЛАВА I

ПРОСТРАНСТВА L_1 И L_2 ДЛЯ ЙОРДАНОВЫХ БАНАХОВЫХ АЛГЕБР С ПОЛУКОНЕЧНЫМ СЛЕДОМ

§ 1.1. Необходимые сведения

а). Йордановы алгебры

Всюду в работе будем рассматривать йордановы алгебры над полем действительных чисел R.

Определение 1.1. Пусть A – векторное пространство над R и в A введена операция умножения xy, $x,y\in A$, которая, вообще говоря, неассоциативна. A называется йордановой алгеброй, если

1. $xy=yx$;
2. $(x+y)z=xz+yz$;
3. $\alpha(xy)=(\alpha x)y$;
4. $(x^2y)x=x^2(yx)$

для любых $x,y,z\in A$, $\alpha\in R$.

Пусть $\mathcal{U}$ – ассоциативная (не обязательно коммутативная) алгебра над R с умножением xy, $x,y\in\mathcal{U}$. Определим на $\mathcal{U}$ новую операцию умножения $x\circ y$, связанную с исходной следующим образом

$$x\circ y=\frac{1}{2}(xy+yx),$$

которая называется симметризованным или йордановым произведением. При этом получается новая алгебра $\mathcal{U}^{(+)}$, которая, как легко проверить, является йордановой алгеброй. Всякое векторное подпространство $\mathcal{U}^{(+)}$, замкнутое относительно операции $x \circ y$, также является йордановой алгеброй. Такие йордановы алгебры называют специальными. Неспециальные йордановы алгебры называют исключительными.

Пример I.I. Пусть H – гильбертово пространство над R со скалярным произведением (ξ, η), $\xi, \eta \in H$. Рассмотрим множество A пар $\{\alpha, \xi\}$, $\alpha \in R$, $\xi \in H$ с покоординатными линейными операциями и с умножением:

$$\{\alpha, \xi\} \circ \{\beta, \eta\} = \{\alpha\beta + (\xi, \eta), \beta\xi + \alpha\eta\}.$$

Непосредственно проверяется, что A с этими операциями является йордановой алгеброй. Такие йордановы алгебры называются абстрактными спин-факторами [48],[49]. Они являются частным случаем алгебры симметричной билинейной формы [13] и, в частности, специальны ([13], стр. 74 упр.I).

Пример I.2. Пусть Q – алгебра чисел Кэли (октавы), Q_n – алгебра $n \times n$ матриц с элементами из Q, $*$ – инволюция на Q_n, которая заключается в транспонировании матрицы и применении операции сопряжения к каждому ее элементу. Множество $H(Q_n) = \{x \in Q_n : x^* = x\}$ эрмитовых матриц замкнуто в Q_n относительно операции $x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$. Оказывается, только при $n \leq 3$ множество $H(Q_n)$ с операцией $x \circ y$ является йордановой алгеброй, причем при $n \leq 2$ она специальна. Йорданова алгебра $H(Q_3)$ является исключительной [13]. Эту алгебру будем также обозначать M_3^8.

Пусть A – произвольная йорданова алгебра. Для элемента $a \in A$ определим линейный оператор $R_a : A \to A$ следующим образом: $R_a x = ax$, $x \in A$. Этот оператор называется оператором умножения на a. Основное йорданово тождество 4. в определении 1.1 можно переписать в виде $[R_x, R_{x^2}] = 0$, где $[\ ,\ ]$ означает коммутатор. В йордановой алгебре A введем *тройное йорданово произведение*:

$$\{xyz\} = (xy)z + (zy)x - (xz)y.$$

Если йорданова алгебра A специальна и вложена в алгебру $\mathfrak{U}^{(+)}$ для некоторой ассоциативной алгебры $\mathfrak{U}$, то нетрудно проверить, что

$$\{xyz\} = \frac{1}{2}(xyz + zyx).$$

В частности, тройное йорданово произведение $\{aba\}$ в $\mathfrak{U}^{(+)}$ равно aba.

Для любых элементов $a, b \in A$ определим отображение $U_{a,b}: x \longrightarrow \{axb\}$ из A в A, и положим $U_a = U_{a,a}$, т.е. $U_a x = \{axa\}$. Очевидно $U_{a,b}$, U_a - это линейные операторы, т.к.

$$U_{a,b} = R_a R_b + R_b R_a - R_{ab},$$
$$U_a = 2R_a^2 - R_{a^2}.$$

Важным инструментом в теории йордановых алгебр является пирсовское разложение. Пусть A - йорданова алгебра с единицей $\mathbb{1}$, e - идемпотент в A, т.е. $e^2 = e$. Из очевидных равенств $e + (\mathbb{1} - e) = \mathbb{1}$, $e(\mathbb{1} - e) = 0$ вытекает, что

$$U_e + 2U_{e,\mathbb{1}-e} + U_{\mathbb{1}-e} = I,$$

где I - тождественный оператор на A. Введем обозначения

$$x_1 = U_e x, \quad x_{1/2} = 2U_{e,\mathbb{1}-e} x, \quad x_0 = U_{\mathbb{1}-e} x,$$
$$J_1(e) = U_e(A), \ J_{1/2}(e) = 2U_{e,\mathbb{1}-e}(A), \ J_0(e) = U_{\mathbb{1}-e}(A).$$

Тогда $x = x_1 + x_{1/2} + x_0$, $A = J_1(e) + J_{1/2}(e) + J_0(e)$.

Это разложение A в сумму подпространств называется пирсовским разложением, $J_i(e)$ называется пирсовскими компонентами A по идемпотенту e , $i = 1, \frac{1}{2}, 0$. Имеет место следующий результат [I3].

Т е о р е м а I.I (Альберт). Пусть A - йорданова алгебра с единицей, e - идемпотент в A . Тогда A раскладывается в прямую сумму пирсовских компонент

$$A = J_1(e) \oplus J_{1/2}(e) \oplus J_0(e), \quad \text{причем}$$
$$J_i(e) = \{x \in A : ex = ix\}, \quad i = 1, \tfrac{1}{2}, 0 .$$

Таблица умножения для пирсовских компонент такова:

$$J_1^2(e) \subset J_1(e); \ J_1(e) J_0(e) = \{0\}; \ J_0^2(e) \subset J_0(e);$$
$$J_{1/2}^2(e) \subset J_0(e) + J_1(e); \ J_0(e) J_{1/2}(e) \subset J_{1/2}(e);$$
$$J_1(e) J_{1/2}(e) \subset J_{1/2}(e) .$$

Одним из основных результатов теории йордановых алгебр является следующая

Т е о р е м а I.2 [I3] (Ширшов). Всякая йорданова алгебра от двух порождающих специальна.

Отметим следующее тождество, которое используется в дальнейшем

$$(U_x y)^2 = U_x U_y x^2, \quad \text{т.е.} \quad \{xyx\}^2 = \{x\{yx^2y\}x\},$$

для любых $x, y \in A$.

Определение I.2. Элементы x, y йордановой алгебры A называются операторно коммутирующими, если коммутируют операторы R_x и R_y, т.е. $y(xa)=x(ya)$ для всех $a\in A$, или учитывая коммутативность A, $(xa)y=x(ay)$ для всех $a\in A$.

Определение I.3. Подалгебра (йорданова) $A_0\subset A$ называется сильно ассоциативной, если любые два ее элемента операторно коммутируют в A.

Определение I.4. Семейство элементов $M\subset A$ назовем совместным, если подалгебра $\mathfrak{I}(M)$, порожденная этим семейством, сильно ассоциативна. Если два элемента $a, b\in A$ совместны, то это будем записывать как $a\leftrightarrow b$.

Центром йордановой алгебры A называется множество элементов, совместных со всеми элементами A, т.е. пересечение всех максимальных сильно ассоциативных подалгебр в A.

Определение I.5. Подмножество M йордановой алгебры A называется идеалом (йордановым), если оно является подпространством A и $xy\in M$ для $x\in M, y\in A$.

б) Йордановы банаховы алгебры

Определение I.6. [I9]. Йорданова алгебра A с единицей называется йордановой банаховой алгеброй или JB-алгеброй, если в ней задана норма, относительно которой A является банаховым пространством, и удовлетворяющая условиям

$$(i)\ \|a^2\|=\|a\|^2\ ;\quad (ii)\ \|a^2\|\le\|a^2+b^2\|,$$

для всех $a, b\in A$.

Через A^+ обозначим множество положительных элементов алгебры A , т.е. $A^+=\{a^2 : a\in A\}$.

О п р е д е л е н и е I.7.[39] JB - алгебра A называется JBW - а л г еб р о й, если она обладает предсопряженным пространством, т.е. существует банахово пространство N такое, что A изометрически изоморфна пространству N^*, топологически сопряженному к N .

Примером JBW - алгебры является JW - алгебра [48] - слабо замкнутая йорданова алгебра самосопряженных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве.

Для того, чтобы сформулировать один из основных результатов работы [39] , дающий другое эквивалентное определение JBW- алгебры, нам понадобятся несколько понятий. Положительный линейный функционал ρ на JB - алгебре A называется с о с т о я н и е м, если $\rho(1)=1$. Линейный функционал ρ называется н о р м а л ь н ы м, если для любой сети $\{x_\alpha\}\subset A$, монотонно убывающей к нулю, $\varphi(x_\alpha)\longrightarrow 0$. Говорят, что JB -алгебра A обладает р а з д е л я ю щ и м семейством нормальных состояний, если для любого $a\in A^+, a\neq 0$ существует нормальное состояние ρ на A такое, что $\rho(a)>0$. JB - алгебра A называется м о н о т о н н о п о л н о й, если для любой возрастающей и ограниченной сверху сети $\{x_\alpha\}$ в A существует точная верхняя грань $x=\sup x_\alpha$.

Т е о р е м а I.3 JB - алгебра A обладает предсопряженным пространством (т.е. является JBW - алгеброй) тогда и только тогда, когда она монотонно полна и имеет разделяющее семейство нормальных состояний. Если эти условия выполнены, то предсопряженное пространство к A единственно и может быть отождествленно с пространством N всех нормальных линейных функционалов на A (в естественной двойственности между A и $N \subset A^*$).

Т е о р е м а I.4 [39] . Всякая JBW - алгебра A допускает единственное разложение $A = eA + (1-e)A$ с центральным идемпотентом $e \in A$, такое, что алгебра eA специальна и изоморфна JW - алгебре, а алгебра $(1-e)A$ исключительна и изоморфна алгебре $C(X, M_3^8)$ всех непрерывных отображений некоторого гиперстоуновского компакта X в M_3^8 . Обратно, для любого гиперстоуновского компакта алгебра $C(X, M_3^8)$ является JBW - алгеброй.

Напомним, что компактное хаусдорфово пространство называется г и п е р с т о у н о в с к и м, если алгебра $C(X)$ всех непрерывных функций на X обладает предсопряженным пространством.

Наряду с топологией нормы на JBW -алгебрах можно рассматривать и другие топологии. С л а б о й топологией на JBW - алгебре A назовем топологию $\sigma(A, N)$ - поточечной сходимости на элементах предсопряженного пространства N .

С и л ь н о й топологией на A называется локально выпуклая топология на A , порожденная семейством преднорм $\rho(a^2)^{\frac{1}{2}}$, $\rho \in K$, где K - множество всех нормальных состояний на A . Имеет место следующий результат [I9].

Т е о р е м а I.5. Для монотонных сетей в JBW - алгебре A понятия порядковой, сильной и слабой сходимости совпадают. Умножение в A слабо непрерывно по каждой переменной раздельно и сильно непрерывно по совокупности переменных на ограниченных по норме подмножествах из A .

О п р е д е л е н и е I.7. JW - алгебра A называется о б р а т и м о й, если $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n + a_n \cdots a_2 \cdot a_1 \in A$ для всех $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$, где „·" ассоциативное умножение на $\mathcal{B}(H)$ - алгебре всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H ,на котором действует A .

Примером необратимой JW -алгебры является спин фактор размерности > 6 (см. пример I.I).

Пусть A - произвольная JW -алгебра. Через $R(A)$ будем обозначать слабо замкнутую вещественную $*$ - алгебру в $\mathcal{B}(H)$, порожденную A . И пусть $\mathcal{U}(A)$ слабо замкнутая комплексная $*$ - алгебра (т.е. алгебра фон Неймана) в $\mathcal{B}(H)$, порожденная A . Очевидно, $\mathcal{U}(A)$ можно отождествить с бикоммутантом A'' JW- алгебры A в $\mathcal{B}(H)$.

Имеет место следующий результат (см. [42] - [44]).

П р е д л о ж е н и е I.I. Если A - обратимая JW - алгебра, то $R(A)_{SA} = A$, $\mathcal{U}(A) = R(A) + iR(A)$, где SA означает множество всех самосопряженных элементов $*$ -алгебры.

в) Упорядоченные йордановы алгебры

О п р е д е л е н и е I.8. [I6]. Порядок „$\geqslant$" на йордановой алгебре E назовем согласованным с алгебраическими операциями, если выполняются следующие условия:

I) если $x \geqslant y$, то $x+z \geqslant y+z$ для любого $z \in E$;

2) если $x \geqslant y$, то $\lambda x \geqslant \lambda y$ для любого $\lambda \in R$, $\lambda \geqslant 0$;

3) если $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x \leftrightarrow y$, то $xy \geqslant 0$;

4) $x^2 \geqslant 0$ для любого $x \in E$.

О п р е д е л е н и е I.9. [I6]. Йорданову алгебру E с единицей назовем OJ - а л г е б р о й, если на ней задан порядок, согласованный с алгебраическими операциями, и выполнены следующие два условия:

(I) если $\{x_\alpha\}$ - возрастающая, ограниченная сверху сеть положительных элементов из E, то существует $x = \sup x_\alpha$ причем $x \longleftrightarrow y$, если $x_\alpha \longleftrightarrow y$ для всех α;

(II) всякая максимальная сильно ассоциативная подалгебра в E является решеткой относительно индуцированного порядка.

Т е о р е м а I.6.[5]. Для любого элемента $a \in E$ оператор U_a положителен (т.е. $U_a(E^+) \subset E^+$) и нормален (т.е. если $x_\alpha \uparrow x$, то $U_a x_\alpha \uparrow U_a x$).

Элемент $a \in E$ называется о г р а н и ч е н н ы м, если $-\lambda \mathbb{1} \leq a \leq \lambda \mathbb{1}$ при некотором $\lambda \in R$, $\lambda \geqslant 0$. Все элементы JBW - алгебры ограничены. Элемент $s \in E$ называется с и м м е т р и е й, если $s^2 = \mathbb{1}$.

г) Следы

О п р е д е л е н и е I.I0. С л е д о м на JBW - алгебре A назовем функцию $\tau : A^+ \longrightarrow [0, +\infty]$, удовлетворяющую условиям:

(i) $\tau(a+b) = \tau(a) + \tau(b) \quad \forall\, a, b \in A^+$;

(ii) $\tau(\lambda a) = \lambda \tau(a) \quad a \in A^+$, λ - неотрицательное число (считается, что $0(+\infty) = 0$);

(iii) $\tau(U_s a) = \tau(a) \quad a \in A^+$, s - симметрия в A.

След τ называется к о н е ч н ы м, если $\tau(\mathbb{1}) < +\infty$;

полуконечным, если для любого $a \in A^+$ существует $b \in A^+$, $b \neq 0$ такой, что $b \leq a$ и $\tau(b) < +\infty$;
точным, если $\tau(a) > 0$ для всех ненулевых $a \in A^+$;
нормальным, если для любой монотонно возрастающей и ограниченной сверху сети $\{x_\alpha\}$ в A^+ имеет место равенство $\tau(\sup x_\alpha) = \sup \tau(x_\alpha)$.

Совокупность ∇ всех идемпотентов JBW - алгебры, наделенная индуцированным частичным порядком и ортодополнением, определенным по формуле $e^\perp = \mathbb{1} - e$, является логикой и полной решеткой [16].

Лемма 1.1. Пусть τ след на JBW - алгебре A. Для любых идемпотентов $e, f \in \nabla$ имеет место равенство

$$\tau(e \vee f) + \tau(e \wedge f) = \tau(e) + \tau(f).$$

В частности $\tau(e \vee f) \leq \tau(e) + \tau(f)$.

Доказательство. По лемме 3.4 из [20] идемпотенты $e \vee f - e$ и $f - e \wedge f$ эквивалентны через симметрию, т.е. существует симметрия $s \in A$ такая, что $U_s(e \vee f - e) = f - e \wedge f$. Поэтому, в силу определения следа имеем

$$\tau(e \vee f - e) = \tau(f - e \wedge f).$$

Далее, $\tau(e \vee f) + \tau(e \wedge f) = \tau(e + e \vee f - e) + \tau(e \wedge f) = \tau(e) + \tau(e \vee f - e) + \tau(e \wedge f) = \tau(e) + \tau(f - e \wedge f) + \tau(e \wedge f) = \tau(e) + \tau(f)$. Лемма доказана.

§ I.2. Пространства L_1 и L_2

Пусть A – JBW - алгебра с точным нормальным полуконечным следом τ . Наша основная цель - построить пространства $L_1(\tau)$ и $L_2(\tau)$ для A по следу τ и доказать, что пространство $L_1(\tau)$ является предсопряженным для A , как в классическом и некоммутативном случаях.

Для $a, b \in A$ рассмотрим подалгебру $J(a,b)$ порожденную этими элементами. По теореме Ширшова она специальна. Если $\overline{J(a,b)}$ слабое замыкание подалгебры $J(a,b)$, то она также специальна [29] , т.е. является JW - подалгеброй (лемма 2.3 в [29]).

Приведем одну известную теорему.

Т е о р е м а 2.I. [22] . Всякий нормальный след τ на JW - алгебре A можно продолжить до нормального следа τ_1 на $\mathcal{U}(A)$- обертывающей алгебры фон Неймана. Если след τ точен (соотв. конечен, полуконечен), то след τ_1 также точен (соотв. конечен, полуконечен).

З а м е ч а н и е I. Из этой теоремы и сказанного выше вытекает, что, если в вычислениях под следом участвуют два элемента JBW – алгебры, то вычисления можно проводить, выйдя в обертывающую алгебру фон Неймана и тем самым переходя к ассоциативному умножению.

Т е о р е м а 2.2. Для $a, b \in A$ верно равенство

$$\tau(U_a b^2) = \tau(U_b a^2).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть J – JW - подалгебра A от двух порождающих $a, b \in A$. И пусть $\mathcal{U}(J)$ ее обертывающая алгебра фон Неймана, а $\hat{\tau}$ - продолжение

τ на $\mathcal{U}(J)$ по теореме 2.1. Так как $\hat{\tau}$ – след и $U_a b^2 = a\cdot b^2\cdot a$ (где „$\cdot$" – ассоциативное произведение в $\mathcal{U}(J)$), то

$$\hat{\tau}(U_a b^2)=\hat{\tau}(a\cdot b^2\cdot a)=\hat{\tau}\left((a\cdot b)\cdot(a\cdot b)^*\right)=$$

$$=\hat{\tau}\left((a\cdot b)^*\cdot(a\cdot b)\right)=\hat{\tau}(b\cdot a^2\cdot b)=\hat{\tau}(U_b a^2).$$

Значит, $\tau\left(U_a b^2\right)=\tau\left(U_b a^2\right)$. Теорема доказана.

Рассмотрим множества

$$K=\left\{x\in A \,\middle|\, \tau(x^2)<+\infty\right\},$$

$$\mathfrak{M}=\left\{x\in A^+ \,\middle|\, \tau(x)<+\infty\right\}.$$

Т е о р е м а 2.3. Множество K является йордановым идеалом алгебры A.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $x,y\in K$, то

$$2x^2+2y^2-(x+y)^2=x^2+y^2-2xy=(x-y)^2\geqslant 0.$$

То есть $(x+y)^2\leq 2x^2+2y^2$. Следовательно,

$$\tau\left((x+y)^2\right)\leq 2\tau(x^2)+2\tau(y^2)<+\infty.$$

Это означает, что $x+y\in K$.

Пусть $a\in A$ и $x\in K$, покажем $ax\in K$.

Ясно, что $a^2\leq\|a\|^2\mathbb{1}$, тогда

$$U_x a^2\leq\|a\|^2 x^2 \quad \text{и} \quad U_a U_x a^2\leq\|a\|^2 U_a x^2.$$

По тождеству $U_a U_x a^2=(U_a x)^2$ и по теореме 2.2 имеем

$$\tau((U_a x)^2)=\tau(U_a U_x a^2)\le \|a\|^2\tau(U_a x^2)=$$

$$=\|a\|^2\tau(U_x a^2)\le \|a\|^4\tau(x^2)<+\infty .$$

Значит, $U_a x\in K$. Так как $ax=\frac{1}{2}(U_{a+1\!\!1}x-U_a x-x)$, то $ax\in K$. Теорема доказана.

Пусть $K^2=\{xy\,|\,x,y\in K\}$. Нетрудно видеть, что $\mathfrak{M}=(K^2)^+$.

Действительно, пусть $x\in\mathfrak{M}$. Отсюда $x^{\frac{1}{2}}\in K$ и, значит, $x=(x^{\frac{1}{2}})^2\in (K^2)^+$.

Обратно, если $z\in K^2$ и $z\geqslant 0$, причем $z=xy$, $x,y\in K$, то $z=xy\le x^2+y^2$. Поэтому

$$\tau(z)\le\tau(x^2)+\tau(y^2) .$$

Следовательно, $z\in\mathfrak{M}$. Отсюда $\mathfrak{M}=(K^2)^+$.

Образуем множество

$$\mathfrak{M}_\tau=\mathfrak{M}-\mathfrak{M}=\{x-y\,|\,x,y\in\mathfrak{M}\}.$$

Легко показать, что $\mathfrak{M}_\tau$ является йордановым идеалом JBW - алгебры A .

В самом деле, для $a\in A$, $x\in\mathfrak{M}$ по теореме 2.2 получим

$$\tau(U_a x)=\tau(U_{\sqrt{x}}a^2)\le\|a\|^2\tau(x)<+\infty .$$

Значит, $U_a x\in\mathfrak{M}$ для $x\in\mathfrak{M}$, $a\in A$. В силу тождества $ax=\frac{1}{2}(U_{a+1\!\!1}x-U_a x-x)$ имеем $ax\in\mathfrak{M}_\tau$ для $a\in A$, $x\in\mathfrak{M}_\tau$.

Нетрудно видеть, что $\mathfrak{M}_\tau = K^2$. Это вытекает из следующего. Если $z \in K^2$, т.е. $z = xy$, $x, y \in K$, то

$$z = xy = \frac{1}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2 \in (K^2)^+ - (K^2)^+ = \mathfrak{M} - \mathfrak{M}.$$

След τ продолжим на $\mathfrak{M}_\tau$, полагая, для

$z = x - y \in \mathfrak{M}_\tau$, как $\hat{\tau} = \tau(x) - \tau(y)$.

Проверим корректность такого продолжения. Пусть $z = x' - y'$, где $x', y' \in \mathfrak{M}$ такие, что $x' \neq x$, $y' \neq y$. Тогда $x - y = x' - y'$. Отсюда $x + y' = x' + y$. Поэтому $\tau(x + y') = \tau(x' + y)$, т.е. $\tau(x) + \tau(y') = \tau(x') + \tau(y)$. Следовательно, $\tau(x) - \tau(y) = \tau(x') - \tau(y')$. Очевидно, $\hat{\tau}$ является следом. В дальнейшем продолжение следа τ на $\mathfrak{M}_\tau$ также будем обозначать через τ.

З а м е ч а н и е 2. Так как $\mathfrak{M}_\tau$ идеал в A, то элемент $x \in A$ принадлежит $\mathfrak{M}_\tau$ тогда и только тогда, когда модуль $|x|$ элемента x принадлежит $\mathfrak{M}_\tau$.

В дальнейшем идеалом определения следа τ назовем идеал $\mathfrak{M}_\tau = \{ x \in A \mid \tau(|x|) < +\infty \}$.

Т е о р е м а 2.4. Для любых $a \in A$ и $x \in \mathfrak{M}_\tau$ имеют место соотношения

$$|\tau(ax)| \leq \tau(|ax|) \leq \|a\| \tau(|x|).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $-|ax| \leq ax \leq |ax|$ то $|\tau(ax)| \leq \tau(|ax|)$. Пусть $J - JW$ - подалгебра от двух порождающих a и x (можно доказать, что след $\tau/_J$ - являющийся сужением следа τ на J также полуконечен, если a лежит в $\mathfrak{M}_\tau$. В общем случае след $\tau|_J$ может не быть полуконечным).

Пусть $\mathcal{U}(J)$ - обертывающая алгебра фон Неймана для J, $\hat{\tau}$ - продолжение $\tau|_J$ на $\mathcal{U}(J)$. Тогда

$$|\hat{\tau}(ax)| = \frac{1}{2}|\hat{\tau}(a\cdot x) + \hat{\tau}(x\cdot a)| = |\hat{\tau}(a\cdot x)| \leq \|a\|\hat{\tau}(|x|).$$

Далее, пусть $t \in A$ такая симметрия, что $|ax| = t(ax)$. Тогда $t \in \mathcal{U}(J)$, $\|t\| = 1$ и по равенству

$$t(ax) = \frac{1}{4}(t\cdot a\cdot x + t\cdot x\cdot a + a\cdot x\cdot t + x\cdot a\cdot t),$$

получим

$$\tau(|ax|) = |\tau(t(ax))| \leq \frac{1}{4}\Big(|\hat{\tau}(t\cdot a\cdot x)| + |\hat{\tau}(t\cdot x\cdot a)| +$$

$$+ |\hat{\tau}(a\cdot x\cdot t)| + |\hat{\tau}(x\cdot a\cdot t)|\Big) = \frac{1}{4}\Big(|\hat{\tau}((t\cdot a)\cdot x)| + |\hat{\tau}((a\cdot t)\cdot x)| +$$

$$+ |\hat{\tau}((t\cdot a)\cdot x)| + |\hat{\tau}((a\cdot t)\cdot x)|\Big) \leq \frac{1}{2}\Big(\|t\cdot a\|\,\hat{\tau}(|x|) +$$

$$+ \|a\cdot t\|\,\hat{\tau}(|x|)\Big) \leq \|t\|\,\|a\|\,\tau(|x|) = \|a\|\,\tau(|x|).$$

Теорема доказана.

Следствие 2.1. Для $x \in \mathfrak{M}_\tau$ имеет место равенство

$$\tau(|x|) = \sup_{\|a\| \leq 1} |\tau(ax)|.$$

Доказательство. По теореме 2.4 $|\tau(ax)| \leq \tau(|x|)$, когда $\|a\| \leq 1$. Пусть s - такая симметрия, что $|x| = sx$, тогда $\tau(|x|) = \tau(sx)$ и $\|s\| = 1$.

Следствие доказано.

Отображение $x \to \tau(|x|)$ определяет норму на идеале $\mathfrak{M}_\tau$. Обозначим $\|x\|_1 = \tau(|x|)$ и назовем $\|x\|_1$ L_1-нормой элемента $x \in \mathfrak{M}_\tau$. Пополнение $\mathfrak{M}_\tau$ по L_1 -норме обозначим через $L_1(\tau)$.

Т е о р е м а 2.5. Для любых $x, y \in K$ имеют место неравенства

$$\tau(xy)^2 \le \tau(x^2)\tau(y^2),$$
$$\tau(|xy|)^2 \le \tau(x^2)\tau(y^2).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о, в силу замечания I вытекает из аналогичных фактов для алгебры фон Неймана как в теореме 2.4.

Определим на K L_2- норму, полагая $\|x\|_2 = \sqrt{\tau(x^2)}$. Используя теорему 2.5, можно показать, что это действительно норма. Пополнение K по норме $\|\cdot\|_2$ обозначим через $L_2(\tau)$.

Т е о р е м а 2.6. Для $x \in \mathfrak{M}_\tau$ функционал φ_x определенный как $\varphi_x(a) = \tau(ax)$ для $a \in A$, является нормальным на A.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть сначала $x \in \mathfrak{M}_\tau^+$, тогда в силу замечания I

$$\varphi_x(a) = \tau(ax) = \hat{\tau}(a \cdot x) = \hat{\tau}(a \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}}) =$$
$$= \hat{\tau}(x^{\frac{1}{2}} \cdot a \cdot x^{\frac{1}{2}}) = \tau(U_{\sqrt{x}}\, a).$$

Отсюда, φ_x- нормальный (т.к. след τ и оператор $U_{\sqrt{x}}$ - нормальны).

Пусть $x \in \mathfrak{M}_\tau$ произвольный. Тогда $x = x_+ - x_-$, $x_+, x_- \in \mathfrak{M}_\tau^+$ и $\varphi_x(a) = \tau(ax) = \tau(ax_+) - \tau(ax_-) = \varphi_{x_+}(a) - \varphi_{x_-}(a)$.

Поэтому φ_x - нормальный функционал [39] . Теорема доказана.

Лемма 2.1. Функционал $\varphi_a(x) = \tau(ax)$ для $a \in A$, L_1 - непрерывен на $\mathfrak{M}_\tau$.

Доказательство. Пусть $x_\alpha \to x$ по L_1 - норме в $\mathfrak{M}_\tau$, т.е. $\| x_\alpha - x \|_1 \to 0$. Тогда по теореме 2.4

$$|\varphi_a(x_\alpha - x)| = |\tau(a(x_\alpha - x))| \le \|a\| \tau(|x_\alpha - x|) \to 0.$$

Лемма доказана.

Пусть $x = x_1 + x_{1/2} + x_0$ пирсовское разложение элемента x по идемпотенту $e \in A$.

Лемма 2.2. Для $x \in \mathfrak{M}_\tau$ $\tau(x_{1/2}) = 0$

Доказательство. По определению следа τ $\tau(U_s x) = \tau(x)$ для симметрии $s \in A$. Так как τ можно рассмотреть как линейный функционал на $\mathfrak{M}_\tau$, то

$$\tau(x - U_s x) = 0 .$$

Если положим $s = 2e - \mathbb{1}$, то $U_s x = x_1 - x_{1/2} + x_0$.

Поэтому $0 = \tau(x - U_s x) = \tau(2 x_{1/2}) = 2\tau(x_{1/2})$.

То есть $\tau(x_{1/2}) = 0$. Лемма доказана.

Следствие 2.2. Если $e \in \mathfrak{M}_\tau$, то $\tau(a_{1/2}) = 0 \; \forall a \in A$.

Теорема 2.7. Для $a, b \in A$ и $x \in \mathfrak{M}_\tau$ верно равенство $\tau((ab)x) = \tau(a(bx))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть сначала $b=e$ -идемпотент в A и $a=a_1+a_{1/2}+a_0$, $x=x_1+x_{1/2}+x_0$ - пирсовские разложения элементов a и x соответственно. Тогда по лемме 2.2 имеем

$$\tau(x_{1/2}(a_1+a_0))=\tau(a_{1/2}(x_1+x_0))=0.$$

Так как

$$(ae)x=a_1x_1+\frac{1}{2}a_{1/2}x_{1/2}+\frac{1}{2}a_{1/2}(x_1+x_0)+a_1x_{1/2},$$

$$a(ex)=a_1x_1+\frac{1}{2}a_{1/2}x_{1/2}+\frac{1}{2}(a_1+a_0)x_{1/2}+a_{1/2}x_1,$$

то

$$\tau((ae)x)=\tau(a_1x_1+\frac{1}{2}a_{1/2}x_{1/2})=\tau(a(ex)).$$

Следовательно, имеем $\tau((ab)x)=\tau(a(bx))\ \forall a\in A, x\in \mathfrak{M}_\tau$ и для простых $b\in A$ (т.е. b есть конечная линейная комбинация идемпотентов в A).

Пусть b - произвольный элемент A и $\{b_\alpha\}$ - сеть простых элементов A , сходящаяся к b по норме. Тогда $b_\alpha \longrightarrow b$ слабо. По следствию 3.4 в [19] $ab_\alpha\to ab$ слабо. Так как φ_x слабо непрерывно на A , то $\varphi_x(ab_\alpha)$ сходится к $\varphi_x(ab)$, т.е. $\tau((ab_\alpha)x)\longrightarrow\tau((ab)x)$.

Далее, т.к. $b_\alpha\to b$ по норме, то $b_\alpha x\longrightarrow bx$ по L_1 -норме. Действительно, по теореме 2.4

$$\|b_\alpha x-bx\|_1=\tau(|(b_\alpha-b)x|)\le\|b_\alpha-b\|\tau(|x|)\longrightarrow 0.$$

Поэтому, $\varphi_a(b_\alpha x)\longrightarrow\varphi_a(bx)$ по лемме 2.I, т.е.

$$\tau(a(b_\alpha x))\longrightarrow\tau(a(bx)).$$

Наконец, в равенстве $\tau((ab_\alpha)x)=\tau(a(b_\alpha x))$ переходим к пределу $b_\alpha \longrightarrow b$ по норме и получим $\tau((ab)x)=\tau(a(bx))$ для любого $b\in A$. Теорема доказана.

Следствие 2.3. Для $a,b\in A$ и $x\in L_1(\tau)$ верно равенство $\tau((ab)x)=\tau(a(bx))$.

Теперь рассмотрим связь пространства $L_1(\tau)$ с предсопряженным пространством JBW - алгебры.

Теорема 2.8. Пусть A - JBW - алгебра, τ - точный нормальный полуконечный след на A , N - предсопряженное банахово пространство к A . Тогда банаховы пространства $L_1(\tau)$ и N изометрически изоморфны.

Доказательство. По теореме 2.6 функционал φ_x определенный как $\varphi_x(a)=\tau(ax)$ для $x\in \mathfrak{M}_\tau$, является нормальным на A , т.е. $\varphi_x\in N$. Значит, отображение $x\longrightarrow\varphi_x$ есть линейное отображение $\mathfrak{M}_\tau$ в N ,причем

$$\|x\|_1=\tau(|x|)=\sup_{\|a\|\leq 1}|\tau(ax)|=\|\varphi_x\|,$$

где $\|\varphi_x\|$ норма функционала φ_x . Следовательно, $x\longrightarrow\varphi_x$ есть изометрическое вложение $\mathfrak{M}_\tau$ в N .

Так как $L_1(\tau)$ - пополнение $\mathfrak{M}_\tau$ по L_1 - норме и N - полно. то теорема будет доказана, если мы покажем, что множество $\mathcal{B}=\{\varphi_x,\ x\in\mathfrak{M}_\tau\}$ плотно в N .

Допустим противное, т.е. пусть $\mathcal{B}$ не плотно в N ,т.е. $\overline{\mathcal{B}}\neq N$. Тогда существует непрерывный линейный функционал $a\in N^*=A,\ a\neq 0$ такой, что $<b,a>=0$ для всех $b\in\mathcal{B}$, где $<b, a>$ - значение функционала a в точке b .В частности $<\varphi_x, a> = \tau(ax) = 0$ для любого $x \in \mathfrak{M}_\tau$.

Теорема будет доказана, если мы покажем, что $a = 0$.

Пусть сначала $a \in A^+$. Тогда существует сеть положительных элементов $\{a_\alpha\}$ в $\mathfrak{M}_\tau$, такая, что $a = \sup_\alpha a_\alpha$. Очевидно, $\tau(ax) = 0$, $x \in \mathfrak{M}_\tau^+$ влечет $\tau(U_{\sqrt{x}} a) = 0$ (см. теорему 2.6). В силу нормальности следа τ и оператора $U_{\sqrt{x}}$ имеем

$$0 = \tau(ax) = \tau(U_{\sqrt{x}} a) = \sup_\alpha \tau(U_{\sqrt{x}} a_\alpha) \quad \forall\, x \in \mathfrak{M}_\tau^+ .$$

Отсюда $\tau(U_{\sqrt{x}} a_\alpha) = 0$ $\forall \alpha$, $x \in \mathfrak{M}_\tau^+$. Полагая $x = a_\alpha$ получим $\tau(a_\alpha^2) = 0$ $\forall \alpha$.Так как τ -точный, то $a_\alpha = 0$ $\forall \alpha$. Следовательно, $a = \sup_\alpha a_\alpha = 0$.

Пусть теперь $a \in A$ произвольный, и $a = t|a|$ его полярное разложение. Тогда по теореме 2.7 имеем

$$\tau(|a|x) = \tau((ta)x) = \tau(a(tx)) = 0 .$$

(Т.к. $tx \in \mathfrak{M}_\tau$). В силу предыдущих рассуждений имеем, что $|a| = 0$, т.е. $a = 0$. Теорема доказана.

Так как $\mathfrak{M}_\tau$ плотно в $L_1(\tau)$ по L_1 -норме и $|\tau(x)| \le \|x\|_1$ для $x \in \mathfrak{M}_\tau$, то L_1 - непрерывный функционал τ (след) на $\mathfrak{M}_\tau$ можно продолжить до непрерывного линейного функционала $\hat{\tau}$ на $L_1(\tau)$.

Продолжение следа τ на $L_1(\tau)$ также будем обозначать через τ .

С л е д с т в и е 2.4. Отображение $x \longrightarrow \varphi_x$, где $\varphi_x(a)=\tau(ax)$, $a\in A$, $x\in L_1(\tau)$ (соотв. $a\in L_1(\tau)$, $x\in A$) является изометрическим и порядковым изоморфизмом между $L_1(\tau)$ и N (соотв. между A и $[L_1(\tau)]^*$).

Доказательство вытекает из предыдущей теоремы и следующей леммы.

Л е м м а 2.3. Пусть τ -точный нормальный полуконечный след на JBW - алгебре A. Элемент $a\in A$ положителен тогда и только тогда, когда $\tau(ax)\geqslant 0$ для всех $x\in L_1^+(\tau)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $a\geqslant 0$, то, учитывая, что τ - след (см. замечание I), имеем для $x\in L_1^+(\tau)$: $\tau(ax)=\tau(U_{\sqrt{a}}x)\geqslant 0$, в силу положительности оператора $U_{\sqrt{a}}$.

Обратно, если $\tau(ax)\geqslant 0$ для всех $x\in L_1^+(\tau)$, то $\tau(aU_e x)\geqslant 0$, где $e=s(a_-)$ -носитель отрицательной части a. Тогда $a_-\geqslant 0$ и $\tau(a_-x)\geqslant 0$. С другой стороны

$$0\leq\tau(aU_e x)=2\tau(a(e(ex)))-\tau(a(ex))=$$
$$=-2\tau(a_-x)+\tau(a_-x)=-\tau(a_-x).$$

Здесь мы воспользовались следствием 2.3.
Следовательно, $\tau(a_-x)\leq 0$ для $x\in L_1^+(\tau)$, которое показывает, что $\tau(a_-x)=0$. Отсюда как в теореме 2.8 получим, что $a_-=0$. Значит $a=a_+\geqslant 0$. Лемма доказана.

Пространство $L_2(\tau)$ является, очевидно, гильбертовым пространством, относительно скалярного произведения

$(x,y)=\tau(xy)$, $x,y\in L_2(\tau)$. По теореме Рисса всякий непрерывный линейный функционал на $L_2(\tau)$ имеет вид $\varphi_a(x)=(x,a)=\tau(ax)$. Поэтому имеет место следующий результат.

Теорема 2.9. Для $a, x\in L_2(\tau)$ отображение $a\longrightarrow\varphi_a$, где $\varphi_a(x)=\tau(ax)$ является изометрическим изоморфизмом между $L_2(\tau)$ и $[L_2(\tau)]^*$.

§ I.3. Топология сходимости по мере

Пусть A - JBW - алгебра с точным нормальным полуконечным следом τ.

Определение 3.I. Топологией сходимости по мере на JBW - алгебре A назовем топологию, в которой базис окрестностей нуля образуют множества вида $N(\varepsilon,\delta)$, $\varepsilon,\delta>0$, где

$$N(\varepsilon,\delta)=\{a\in A \mid \exists p\in\nabla,\ p^{\perp}\in\mathfrak{M}_{\tau},\ \tau(p^{\perp})\leq\delta,\ \|U_p a\|\leq\varepsilon\}.$$

Рассмотрим свойства множеств $N(\varepsilon,\delta)$

Теорема 3.I. Множества $N(\varepsilon,\delta)$ обладают следующими свойствами:

(i) $N(\varepsilon_1,\delta_1)+N(\varepsilon_2,\delta_2)\subset N(\varepsilon_1+\varepsilon_2,\ \delta_1+\delta_2)$;

(ii) $\lambda N(\varepsilon,\delta)\subset N(|\lambda|\varepsilon,\delta)$, $\lambda\in R$;

(iii) $(-\lambda,\lambda)x\subset N(\lambda\|x\|,\delta)$, где $\lambda\in R$, $\lambda\geqslant 0$, $\forall\delta>0$;

(iv) $N^2(\varepsilon,\delta)\subset N(\varepsilon^2,\ 2\delta)$, где $N^2(\varepsilon,\delta)=$

$= \{ a^2 , a \in N(\varepsilon, \delta) \}$;

(v) $xN(\varepsilon,\delta) \subset N(\|x\|\varepsilon, 3\delta)$;

(vi) если $\varepsilon < 1$, то $N(\varepsilon,\delta) \cap \nabla = \{ e \in \nabla : \tau(e) \le \delta \}$;

(vii) $\bigcap\limits_{\varepsilon,\delta>0} N(\varepsilon,\delta) = \{0\}$;

(viii) если $0 \le y \le x \in N(\varepsilon,\delta)$, то $y \in N(\varepsilon,\delta)$,

т.е. все множества $N(\varepsilon,\delta)$ заполнены.

Доказательство.

(i). Пусть $x \in N(\varepsilon_1, \delta_1)$, $y \in N(\varepsilon_2, \delta_2)$, т.е. существуют $p, q \in \nabla$ такие, что $p^\perp, q^\perp \in \mathcal{M}_\tau$, $\tau(p^\perp) \le \delta_1$, $\tau(q^\perp) \le \delta_2$ и $\|U_p x\| \le \varepsilon_1$, $\|U_q y\| \le \varepsilon_2$.

Положим $e = p \wedge q$, тогда

$$\tau(e^\perp) = \tau(p^\perp \vee q^\perp) \le \tau(p^\perp) + \tau(q^\perp) \le \delta_1 + \delta_2 .$$

Далее, так как $e \longleftrightarrow p$, то $U_e x = U_{ep} x = U_e U_p x$ (см. [30] тождество (66)). В силу положительности оператора U_e и из неравенства

$$-\varepsilon_1 \mathbb{1} \le U_p x \le \varepsilon_1 \mathbb{1}$$

имеем $-\varepsilon_1 \mathbb{1} \le U_e U_p x \le \varepsilon_1 \mathbb{1}$, т.е. $\|U_e x\| \le \varepsilon_1$.

Аналогично $\|U_e y\| \le \varepsilon_2$. Следовательно,

$$\| U_e (x+y) \| \le \|U_e x\| + \|U_e y\| \le \varepsilon_1 + \varepsilon_2 ,$$

т.е. $x+y \in N(\varepsilon_1+\varepsilon_2, \delta_1+\delta_2)$.

(ii). Очевидно.

(iii). Пусть $x \in A$, $|\eta| < \lambda$ и $x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, de_\lambda$ – спектральное разложение элемента x. Тогда для $\lambda > \|x\|$ имеем $e_{-\lambda} = e_\lambda^\perp = 0$ и если $e = e_{-\lambda} \vee e_\lambda^\perp$, то $\tau(e) = 0 < \delta \ \ \forall \ \delta > 0$ и $\|U_{e^\perp} x\| \leq \|x\|$.

Далее
$$\|U_{e^\perp}(\eta x)\| = |\eta| \|U_{e^\perp} x\| \leq \lambda \|x\| .$$

(iv). Пусть $x \in N(\varepsilon, \delta)$, т.е. существует идемпотент $p \in \nabla : p^\perp \in \mathcal{M}_\tau, \tau(p^\perp) \leq \delta, \ \|U_p x\| \leq \varepsilon$.

Если $x = x_1 + x_{1/2} + x_0$ пирсовское разложение элемента x по идемпотенту p, то
$$x_1 = U_p x \ , \ \ x_{1/2} = 2 U_{p,p^\perp} x \ , \ \ x_0 = U_{p^\perp} x .$$

Пусть $g = S(x_{1/2})$ – носитель компоненты $x_{1/2}$. Положим $q = p \wedge g^\perp$, тогда $q \leq g^\perp$, т.е. $q \in J_0(g)$.

Так как $g = S(x_{1/2}) = S(x_{1/2}^2)$, то $x_{1/2}^2 \in J_1(g)$.

Поэтому $q x_{1/2}^2 = 0$. Отсюда
$$U_q(x^2) = U_q(x_1^2 + x_{1/2}^2 + x_0^2 + 2 x_{1/2}(x_1 + x_0)) =$$
$$= U_q x_1^2 + U_q x_{1/2}^2 = U_q x_1^2 .$$

В самом деле, т.к. $q \leq p$, то $U_q = U_{qp} = U_q U_p$

и значит $U_q(J_0(p)) = U_q(J_{1/2}(p)) = \{0\}$. Так как

$x_1 = U_p x$, т.е. $\|x_1\| \leq \varepsilon$,то

$$\| U_q x^2 \| = \| U_q x_1^2 \| \leq \| x_1^2 \| = \| x_1 \|^2 \leq \varepsilon^2 .$$

Причем $\tau(q^\perp) = \tau(p^\perp \vee q)$. Так как $q = s(x_{1/2})$ и $x_{1/2} \in J_{1/2}(p) = J_{1/2}(p^\perp)$, то по следствию леммы 2.3 из [9] $q = P_1 + P_2$, где P_1 и P_2 ортогональные идемпотенты, эквивалентные через симметрию, причем $P_1 \leq p^\perp$. Значит

$$\tau(q^\perp) = \tau(p^\perp \vee P_1 \vee P_2) = \tau(p^\perp \vee P_2) \leq \tau(p^\perp) +$$

$$+ \tau(P_2) = \tau(p^\perp) + \tau(P_1) \leq 2\tau(p^\perp) \leq 2\delta .$$

Следовательно, $x^2 \in N(\varepsilon^2, 2\delta)$.

(V). Пусть $x \in A$, $y \in N(\varepsilon, \delta)$, т.е. существует идемпотент $p \in \nabla$, $p^\perp \in \mathfrak{M}_\tau$, $\tau(p^\perp) \leq \delta$, $\|U_p y\| \leq \varepsilon$.

Пусть $x = x_1 + x_{1/2} + x_0$, $y = y_1 + y_{1/2} + y_0$ пирсовские разложения элементов x и y по идемпотенту p. Положим $e_1 = s(x_{1/2})$, $e_2 = s(y_{1/2})$, $q = p \wedge e_1^\perp \wedge e_2^\perp$.

В силу следствия леммы 2.3 из [9] $e_1 = e_1' + e_1''$, $e_2 = e_2' + e_2''$, где $e_i' e_i'' = 0$, e_i' и e_i'' эквивалентны через симметрию и $e_i' \leq p^\perp$ $(i = 1, 2)$. Следовательно,

$$\tau(q^{\perp})=\tau(p^{\perp}\vee e_1\vee e_2)=\tau(p^{\perp}\vee e_1''\vee e_2'')\leq$$
$$\leq\tau(p^{\perp})+\tau(e_1'')+\tau(e_2'')\leq 3\tau(p^{\perp})\leq 3\delta .$$

Далее,

$$U_q(xy)=U_qU_p(x_1y_1+x_{1/2}y_{1/2}+x_0y_0+$$
$$+x_{1/2}(y_0+y_1)+(x_0+x_1)y_{1/2})=U_qU_p(x_1y_1+$$
$$+x_{1/2}y_{1/2})=U_q(x_1y_1+x_{1/2}y_{1/2}).$$

Но $q\leq e_1^{\perp}=S(x_{1/2})^{\perp}$, следовательно, $qx_{1/2}=0$, т.е. $x_{1/2}\in J_0(q)$. Аналогично, $y_{1/2}\in J_0(q)$ и, значит, $x_{1/2}y_{1/2}\in J_0(q)$, т.е. $U_q(x_{1/2}y_{1/2})=0$. Поэтому $U_q(xy)=U_q(x_1y_1)$. Но $\|x_1y_1\|\leq\|x_1\|\,\|y_1\|\leq\|x\|\varepsilon$.

Итак, $\|U_q(xy)\|\leq\|x\|\varepsilon$, $\tau(q^{\perp})\leq 3\delta$, т.е. $xy\in N(\|x\|\varepsilon, 3\delta)$.

(vi) если $e\in\nabla$, $\tau(e)\leq\delta$, то для $p=\mathbb{1}-e$: $\tau(p^{\perp})=\tau(e)\leq\delta$, $U_pe=0$, т.е. $e\in N(\varepsilon,\delta)$ $\forall\varepsilon>0$.

Обратно, пусть $e\in N(\varepsilon,\delta)$, $\varepsilon<1$. Тогда существует идемпотент $q\in\nabla$ такой, что $q^{\perp}\in\mathfrak{M}_{\tau}$, $\tau(q^{\perp})\leq\delta$, $\|U_qe\|\leq\varepsilon$.

Пусть $p=e\wedge q$, тогда $U_qe\geq U_qp=p$.

Если $p\neq 0$, то $\|p\|=1$ и, значит $\|U_qe\|\geq\|p\|=$

$=1>\varepsilon$ что невозможно. Следовательно, $p=0$. Так как идемпотенты $e\vee q-q$ и $e-e\wedge q=e$ эквивалентны через симметрию ([20] лемма 3.4), то $\tau(e)=\tau(e\vee q-q)\leq$ $\leq\tau(\mathbb{1}-q)\leq\delta$. Следовательно, $N(\varepsilon,\delta)\cap\nabla=$ $=\{e\in\nabla,\tau(e)\leq\delta\}$ при $\varepsilon<1$.

(vii). Пусть $x\in\bigcap\limits_{\varepsilon,\delta>0}N(\varepsilon,\delta)$, $x\neq0$, тогда в силу (iv) $x^2\in\bigcap\limits_{\varepsilon,\delta>0}N(\varepsilon,\delta)$. Существует число $\eta>0$ и идемпотент $e\in\nabla, e\longleftrightarrow x^2$, $e\neq0$ такие, что $x^2\geqslant\eta e$. Пусть $\delta<\tau(e)$, $\varepsilon<\eta$ произвольны. Так как $x^2\in N(\varepsilon,\delta)$, то существует $p\in\nabla$, $p^\perp\in\mathcal{M}_\tau,\tau(p^\perp)\leq\delta$, $\|U_p x^2\|\leq\varepsilon$. В силу положительности оператора U_p имеем

$$0\leq U_p(\eta e)\leq U_p x^2,$$

т.е. $\eta\|U_p e\|\leq\varepsilon$.Значит $\|U_p e\|\leq\frac{\varepsilon}{\eta}<1$.

Отсюда как и в (vi) вытекает, что $p\wedge e=0$, т.е. $\tau(e)\leq\tau(\mathbb{1}-p)\leq\delta$. Это противоречит выбору δ . Следовательно, $x=0$.

Свойство ($viii$) очевидно. Теорема доказана.

Топологию сходимости по мере обозначим через t . Пусть $\hat{A}$ - пополнение A в топологии t ([11] гл.III, § 6).

С л е д с т в и е 3.I. Алгебра $\hat{A}$ относительно топологии t является отделимой топологической йордановой алгеброй, т.е. все алгебраические операции непрерывны по совокупности переменных.

Теперь докажем основную теорему этого параграфа.

Т е о р е м а 3.2. Алгебра $\hat{A}$ является OJ - алгеброй, совокупность ограниченных элементов которой совпадает с A.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы I.4 рассмотрим отдельно два случая

I) $A = C(X, M_3^8)$;

2) $A - JW$ - алгебра.

Пусть $A = C(X, M_3^8)$, τ - точный нормальный полуконечный след на A. Тогда сужение τ на центр A является полуконечной мерой, т.е. для любого центрального идемпотента e существует ненулевой центральный идемпотент $f \le e$ такой, что $\tau(f) < +\infty$.

В самом деле, пусть $e = \chi_{X_0}$, где $X_0 \subset X$, q_1, q_2, q_3 три минимальных ортогональных идемпотента в M_3^8 с суммой равной единице. Рассмотрим функцию $f_1 = q_1 \chi_{X_0} \in C(X, M_3^8)$. По условию существует идемпотент $g_1 \in C(X, M_3^8)$ такой, что $g_1(x) \le f_1(x)$ и $\tau(g_1) < +\infty$. Так как q_1 - атом, то $g_1 = q_1 \chi_{X_1}$, где $X_1 \subset X_0$. Аналогично, рассматривая функцию $f_2 = q_2 \chi_{X_1}$ найдем подмножество $X_2 \subset X_1$ такое, что $\tau(q_2 \chi_{X_2}) < +\infty$ и $X_3 \subset X_2$ такое, что $\tau(q_3 \chi_{X_3}) < +\infty$. Тогда для $f = \chi_{X_3}$

имеем

$$\tau(f)=\tau(\chi_{X_3})=\tau(q_1\chi_{X_3}+q_2\chi_{X_3}+q_3\chi_{X_3})<+\infty$$

Отсюда следует, что в X существует дизъюнктное семейство подпространств X_α таких, что $\tau(\chi_{X_\alpha})<+\infty$ и $X=\bigcup_\alpha X_\alpha$. Поэтому $C(X,M_3^8)=\prod_\alpha C(X_\alpha,M_3^8)$ и сужение τ_α следа τ на каждой JBW - алгебре $C(X_\alpha,M_3^8)$ конечно. По конструкции работы [9] пополнение $C(X_\alpha,M_3^8)$ в топологии t_α, определенной конечным следом τ_α, есть $S(X_\alpha,M_3^8)$ - OJ- алгебра всех допустимых отображений X_α в M_3^8. Поэтому пополнение $C(X,M_3^8)$ в топологии t является $\prod S(X_\alpha,M_3^8)$, т.е. $S(X,M_3^8)=\prod_\alpha S(X_\alpha,M_3^8)$ - OJ - алгебра, как прямоё произведение OJ - алгебр.

Рассмотрим второй случай. Пусть A - JW - алгебра с точным нормальным полуконечным следом τ. Пусть $\mathcal{U}(A)$ - обертывающая алгебра фон Неймана, τ_1 - точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{U}(A)$, продолженный по теореме 2.I.

Известно [40], что в произвольной JW -алгебре A существует три однозначно определенных центральных ортогональных идемпотента e_1, e_2, e_3, $e_1+e_2+e_3=\mathbb{1}$ таких, что

(i) $A_1=e_1A$ - обратимая JW - алгебра, являющаяся эрмитовой частью алгебры фон Неймана $\mathcal{U}(A_1)$;

(ii) $A_2 = e_2 A$ - обратимая JW - алгебра, являющаяся эрмитовой частью вещественной алгебры фон Неймана $R(A_2)$ (здесь $R(A_2) \cap iR(A_2) = \{0\}$ и $\mathcal{U}(A_2) = R(A_2) + iR(A_2)$). Такие JW -алгебры называют ч и с т о в е щ е с т в е н н ы м и;

(iii) $A_3 = e_3 A - JW$ - алгебра типа I_2 и изоморфна прямой сумме JW - алгебр $L^\infty(\Omega, \mu, V)$ всех существенно ограниченных локально (слабо) измеримых отображений локализуемого пространства с мерой (Ω, μ) в некоторой спин фактор V .

Поэтому каждый случай исследуем отдельно.

С л у ч а й (iii). Пусть $A - JW$ - алгебра типа I_2. В силу вышесказанного, можно считать, что A изоморфна алгебре $L^\infty(\Omega, \mu, V)$, где Ω - измеримое пространство с мерой μ , V - спин фактор.

Пусть τ точный нормальный полуконечный след на $L^\infty(\Omega, \mu, V)$. Тогда как и в случае $C(X, M_3^8)$ можно считать, что

$$\Omega = \bigcup_\alpha \Omega_\alpha, \quad \Omega_\alpha \cap \Omega_\beta = \emptyset \quad (\alpha \neq \beta) \quad \text{и}$$
$$L^\infty(\Omega, \mu, V) = \prod_\alpha L^\infty(\Omega_\alpha, \mu_\alpha, V)$$

сужение τ_α следа τ на $L^\infty(\Omega_\alpha, \mu_\alpha, V)$ является конечным следом. Опять же по конструкции работы [9] пополнение $L^\infty(\Omega_\alpha, \mu_\alpha, V)$ в топологии сходимости по мере построенние по конечному следу τ_α , есть алгебра $L^0(\Omega_\alpha, \mu_\alpha, V)$ - алгебра всех локально (слабо) измеримых отображений Ω_α в V, которая есть OJ -алгебра. Тогда

$$\hat{A}=L^0(\Omega,\mu,V)=\prod_\alpha L^0(\Omega_\alpha,\mu_\alpha,V)-OJ-$$ алгебра как прямое произведений OJ - алгебр.

Случай (i), (ii). Пусть A - обратимая JW - алгебра, t_1 - топология сходимости по мере τ_1 на алгебре фон Неймана $\mathcal{U}(A)$. Пополнение $\mathcal{U}(A)$ в топологии t_1 совпадает с алгеброй $M(\mathcal{U}(A))$ - всех тотально измеримых операторов, присоединенных к $\mathcal{U}(A)$ [33], [54]. Отметим, что топология t_1 отделима и все алгебраические операции в $M(\mathcal{U}(A))$ непрерывны в t_1 [33].

Эрмитова часть $M_h(\mathcal{U}(A))$ относительно симметризованного умножения $T_1\circ T_2=\frac{1}{2}(T_1T_2+T_2T_1)$ является OJ - алгеброй [3].

Так как $M(\mathcal{U}(A))$ полна, и $M_h(\mathcal{U}(A))$ замкнута в $M(\mathcal{U}(A))$, то $M_h(\mathcal{U}(A))$ полна в топологии t_1 и $A\subset M_h(\mathcal{U}(A))$. Из доказательства теоремы 3 в [8] вытекает, что замыкание $\bar{A}$ алгебры A в $M_h(\mathcal{U}(A))$ в топологии t_1 является OJ -подалгеброй.

Докажем, что алгебра $\hat{A}$ совпадает с $\bar{A}$. Для этого достаточно показать, что

$$N(\varepsilon,\delta)\subset N^{\mathcal{U}}(\varepsilon,\delta)\cap A\subset N(2\varepsilon,2\delta),$$

т.е. сужение топологии t_1 на A совпадает с топологией t, где

$$N^{\mathfrak{U}}(\varepsilon,\delta)=\{x\in\mathfrak{U}(A)\mid \exists\, p \text{ -проектор в } \mathfrak{U}(A),\ \tau_1(p^{\perp})\le\delta,$$
$$\|p\cdot x\|\le\varepsilon\}.$$ Здесь „$\cdot$" – ассоциативное умножение элементов в $\mathfrak{U}(A)$.

В случае (i) теорема вытекает из очевидного равенства

$$N(\varepsilon,\delta)=N^{\mathfrak{U}}(\varepsilon,\delta)\cap A.$$

Пусть A -чисто вещественная JW -алгебра. Очевидно, $N(\varepsilon,\delta)\subset N^{\mathfrak{U}}(\varepsilon,\delta)$. Далее, пусть $x\in N^{\mathfrak{U}}(\varepsilon,\delta)\cap A$, т.е. существует проектор p в $\mathfrak{U}(A)$ такой, что $\|p\cdot x\|\le\varepsilon$, $\tau_1(p^{\perp})\le\delta$.

Здесь $p=a+ib$, где $a\in A$, причем $a\geqslant 0$ и b - кососэрмитов элемент в $\mathfrak{U}(A)$, т.е. $b^*=-b$.

По теореме 2.I (iii) работы [44] $\|p\cdot x\|\geqslant \max\{\|a\cdot x\|,\|b\cdot x\|\}$. Поэтому $\|a\cdot x\|\le\varepsilon$ и $\|a\|\le 1$.

Легко видеть, что $\|U_a x\|=\|a\cdot x\cdot a\|\le\|a\|\|a\cdot x\|\le\varepsilon$.

Пусть $a=\int_0^1\lambda\, de_\lambda$ - спектральное разложение элемента a.

Положим $e=\int_{1/2}^1 de_\lambda$, тогда легко вычислить, что $e\le 2a$ и $\mathbb{1}-e\le 2(\mathbb{1}-a)$. Поэтому в силу положительности оператора U_x имеем

$$U_x e=U_x e^2\le 4U_x a^2.$$

Отсюда $\|U_x e\|\le 4\|U_x a^2\|$, т.е.

$$\|x\cdot e\cdot x\|\le 4\|x\cdot a^2\cdot x\|$$

Так как $\|x \cdot e \cdot x\| = \|e \cdot x^2 \cdot e\|$ и $\|x \cdot a^2 \cdot x\| =$ $= \|a \cdot x^2 \cdot a\|$, то имеем

$$\|e \cdot x^2 \cdot e\| \leq 4 \|a \cdot x^2 \cdot a\| .$$

Далее, используя соотношения

$$\|a \cdot x^2 \cdot a\| = \|(a \cdot x) \cdot (a \cdot x)^*\| = \|a \cdot x\|^2 \leq \varepsilon^2 ,$$

получим $\|e \cdot x\|^2 = \|e \cdot x^2 \cdot e\| \leq 4 \|a \cdot x^2 \cdot a\| \leq 4 \varepsilon^2$,

т.е. $\|e \cdot x\| \leq 2\varepsilon$. Поэтому $\|U_e x\| \leq 2\varepsilon$. Наконец,

$$\tau(\mathbb{1} - e) \leq 2\tau(\mathbb{1} - a) = 2\tau_1(\mathbb{1} - a - ib) =$$
$$= 2\tau_1(p^\perp) \leq 2\delta .$$

Таким образом $N^{\mathcal{U}}(\varepsilon, \delta) \cap A \subset N(2\varepsilon, 2\delta)$. Теорема доказана.

В дальнейшем OJ - алгебру $\hat{A}$ назовем OJ -алгеброй тотально измеримых элементов относительно JBW -алгебры A .

Следствие 3.2. Пусть $x = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, de_\lambda$ -спектральное разложение элемента $x \in \hat{A}$ [2] . Положим $x_n = \int_{-n}^{n} \lambda \, de_\lambda$. Тогда $x_n \longrightarrow x$ по мере.

Доказательство. Если алгебра $\hat{A}$ изоморфна $S(X, M_3^8)$ или $L^0(\Omega, \mu, V)$, то утверждение следствия вытекает из работы [9] . Для обратимых JW -алгебр утверждение следствия вытекает из аналогичного факта в алгебрах фон Неймана [54] .

§ I.4. Вложение пространств $\hat{L}_1(\tau)$ и $L_2(\tau)$ в OJ -алгебру $\hat{A}$

В этом параграфе докажем, что пространства $L_1(\tau)$ и $L_2(\tau)$ иньективно вкладываются в OJ -алгебру $\hat{A}$,т.е. могут быть рассмотрены как подпространства OJ -алгебры всех тотально измеримых элементов относительно JBW -алгебры A с точным нормальным полуконечным следом τ .

Л е м м а 4.I. I) Пусть $\{a_n\}$ -последовательность элементов в $\mathfrak{M}_\tau$. Если $\|a_n\|_1 \to 0$, то $a_n \to 0$ по мере.

2) Если $\{a_n\} \subset K$ и $\|a_n\|_2 \to 0$, то $a_n \to 0$ по мере.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I) Пусть $\|a_n\|_1 \to 0$, тогда для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ существует номер n_0 такой, что $\|a_n\|_1 < \varepsilon\delta$ при $n \geqslant n_0$.

Если $|a_n| = \int\limits_0^{+\infty} \lambda \, de_\lambda$ - спектральное разложение элемента $|a_n|$, то положим $e = e_\varepsilon$. Очевидно,

$$|a_n| \geqslant \varepsilon e^\perp, \quad e|a_n| = U_e|a_n| \leq \varepsilon \mathbb{1}.$$

Следовательно, $\varepsilon\tau(e^\perp) \leq \tau(|a_n|) \leq \varepsilon\delta$. Это означает, что $a_n \in N(\varepsilon, \delta)$ при $n \geqslant n_0$, т.е. $a_n \to 0$ по мере.

2) Пусть $\|a_n\|_2 \to 0$. Тогда $a_n^2 \to 0$ по мере в силу I). Значит, существует номер n_0 такой, что, при $n \geqslant n_0$ $a_n^2 \in N(\varepsilon, \delta)$ $\forall \varepsilon > 0, \delta > 0$.

То есть, существует идемпотент $p \in \nabla$, $p^{\perp} \in \mathcal{M}_\tau$,

$$\tau(p^{\perp}) \le \delta, \quad \| U_p a_n^2 \| \le \varepsilon .$$

Пусть $a_n^2 = \int\limits_0^{+\infty} \lambda \, de_\lambda$ – спектральное разложение элемента a_n^2. Положим $p = e_\varepsilon$. Тогда

$$|a_n| = \int\limits_0^{+\infty} \lambda^{\frac{1}{2}} de_\lambda \quad \text{и} \quad U_p |a_n| = e_\varepsilon |a_n| \le \varepsilon^{\frac{1}{2}} \mathbb{1},$$

т.е. $\| U_p |a_n| \| \le \varepsilon^{\frac{1}{2}}$. Следовательно $a_n \in N(\varepsilon^{\frac{1}{2}}, \delta)$ при $n \ge n_0$, т.е. $a_n \to 0$ по мере. Лемма доказана.

Из этой леммы видно, что всякая L_p -фундаментальная последовательность является t - фундаментальной $(p=1,2)$, где t - топология сходимости по мере.

Пусть x произвольный элемент $L_1(\tau)$, $\{x_n\} \subset \mathcal{M}_\tau$ L_1 - фундаментальная последовательность, определяющая элемент x. Тогда $\{x_n\}$ является t - фундаментальной и, следовательно, определяет некоторый элемент $\hat{x} \in \hat{A}$, причем $\hat{x}$ не зависит от выбора L_1 -фундаментальной последовательности $\{x_n\}$, определяющей элемент x (в силу леммы 4.I). Поэтому корректно определено отображение

$$\psi : L_1(\tau) \longrightarrow \hat{A} .$$

Аналогично, учитывая лемму 4.I, определяется отображение $\psi_1 : L_2(\tau) \longrightarrow \hat{A}$. Очевидно, эти отображения ψ и ψ_1 линейны. Мы покажем, что они являются вложениями, т.е. инъективны.

Предварительно докажем следующую лемму.

Л е м м а 4.2. Пусть $\{a_n\}$ L_1 - фундаментальная последовательность в $\mathfrak{M}_\tau$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если e - идемпотент в $\mathfrak{M}_\tau$ с $\tau(e) \le \delta$, то $|\tau(ea_n)| \le \varepsilon$ для всех $n = 1, 2, \ldots$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем n_0 так, что $\|a_n - a_m\|_1 \le \varepsilon/2$ при $n, m \geqslant n_0$. И пусть δ выбрано так, что $\|a_k\|\delta \le \varepsilon/2$ при $k = 1, 2, \ldots, n_0$. Если $e \in \mathfrak{M}_\tau$ с $\tau(e) \le \delta$, то по теореме 2.4

$$|\tau(ea_k)| \le \|a_k\| \tau(e) \le \|a_k\| \delta \le \varepsilon/2$$

для $k = 1, 2, \ldots, n_0$. Если $k > n_0$, то

$$|\tau(ea_k)| \le |\tau(e(a_k - a_{n_0}))| + |\tau(ea_{n_0})| \le$$
$$\le \|e\| \tau(|a_k - a_{n_0}|) + \|a_{n_0}\| \tau(e) \le$$
$$\le \|a_k - a_{n_0}\|_1 + \|a_{n_0}\| \delta \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Лемма доказана.

Т е о р е м а 4.I. Отображения Ψ и Ψ_1 инъективны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. И н ъ е к т и в н о с т ь Ψ. Пусть $a \in L_1(\tau), \Psi(a) = 0$. Покажем, что $a = 0$. Предположим, $a \ne 0$ и $\{a_n\}$ L_1 - фундаментальная последовательность в $\mathfrak{M}_\tau$, определяющая a, т.е. $a_n \to a$ по L_1 - норме. Тогда существует элемент $b \in \mathfrak{M}_\tau$ такой, что $\|b\| \le 1$ и $\tau(ba_n)$ отлично от нуля для достаточно больших n в силу теоремы 2.8.

(Так как $\mathfrak{M}_\tau$ слабо плотно в A, то

$$\|a_n\|_1 = \sup_{\substack{b \in \mathfrak{M}_\tau \\ \|b\| \le 1}} |\tau(ba_n)| \;).$$

Теперь допустим, что $a_n \to 0$ по мере. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно, а $\delta > 0$ выбрано как в лемме 4.2. Тогда $a_n \in N(\varepsilon, \delta)$ при достаточно больших n. Значит, существует

$$p \in \nabla,\ \tau(p^{\perp}) \le \delta,\ \|U_p a_n\| \le \varepsilon .$$

Для идемпотента $q \in \nabla$ имеем

$$\tau(q a_n) = \tau((q - p \wedge q) a_n) + \tau((p \wedge q) a_n) .$$

Так как идемпотенты $q - p \wedge q$ и $p \vee q - p$ эквивалентны через симметрию [20], то

$$\tau(q - p \wedge q) = \tau(p \vee q - p) \le \tau(\mathbb{1} - p) = \tau(p^{\perp}) \le \delta .$$

По лемме 4.2 $|\tau((q - p \wedge q) a_n)| \le \varepsilon$.

Далее, т.к. $p \wedge q \le p$, то $p \wedge q \longleftrightarrow p$ поэтому в силу теоремы 2.7 получим

$$|\tau((p \wedge q) a_n)| = |\tau(U_{p \wedge q} a_n)| = |\tau(U_{p \wedge q} U_p a_n)| \le$$

$$\le \|U_p a_n\| \tau(p \wedge q) \le \varepsilon \tau(q) .$$

Значит, $\tau(q a_n) \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$ для идемпотента q с $\tau(q) < +\infty$ в силу произвольности ε. По спектральной теореме всякий $b \in M_\tau$ можно аппроксимировать по норме конечными комбинациями идемпотентов из M_τ. Но функционал вида $\varphi_h(z) = \tau(hz)$ по норме непрерывен по z для любого $h \in M_\tau$. Поэтому $\tau(a_n b) \to 0$ для любого $b \in M_\tau$, т.е. $a_n \longrightarrow 0$ по L_1 - норме. Следовательно $a=0$. Значит, Ψ – инъективно.

И н ъ е к т и в н о с т ь Ψ_1. Пусть $a \in L_2(\tau)$, $\Psi_1(a)=0$. И пусть $\{a_n\}$ L_2- фундаментальная последовательность элементов K определяющая a. Предположим $a \neq 0$. Так как $\|c\|_2 = \sup\limits_{\substack{b\in\mathfrak{M}_\tau \\ \|b\|_2 \le 1}} |\tau(cb)|$ для $c \in K$

(в силу L_2- плотности $\mathfrak{M}_\tau$ в $L_2(\tau)$), то существует элемент $b \in \mathfrak{M}_\tau$ такой, что $\|b\|_2 \le 1$ и $\tau(ba_n)$ отлично от нуля для достаточно больших n. Но с другой стороны для любого $\varepsilon > 0$ $(\delta=\varepsilon)$, существует идемпотент $e \in \nabla$ такой, что $e^\perp \in \mathfrak{M}_\tau$, $\tau(e^\perp) \le \varepsilon$, $\|U_e a_n\| \le \varepsilon$ в силу того, что $a_n \longrightarrow 0$ по мере. Если разложим $a_n = U_e a_n + 2U_{e,e^\perp} a_n + U_{e^\perp} a_n$, то

$$\tau(ba_n) = \tau(bU_e a_n) + 2\tau(bU_{e,e^\perp} a_n) + \tau(bU_{e^\perp} a_n).$$

Далее,

$$|\tau(ba_n)| \le |\tau(bU_e a_n)| + 2|\tau(bU_{e,e^\perp} a_n)| + |\tau(bU_{e^\perp} a_n)| \le \|U_e a_n\|\tau(|b|) + 2|\tau(b(e(e^\perp a_n)))| +$$
$$+ 2|\tau(b(e^\perp(ea_n)))| + 2|\tau(b(e^\perp(e^\perp a_n)))| + |\tau(b(e^\perp a_n))| \le \varepsilon\|b\|_1 + 2|\tau((be)(e^\perp a_n))| +$$

$$+2|\tau((be^{\perp})(ea_n))|+2|\tau((be^{\perp})(e^{\perp}a_n))|+$$
$$+\|b\|\tau(|e^{\perp}a_n|)\le\varepsilon\|b\|_1+2\|be\|\tau(|e^{\perp}a_n|)+$$
$$+2\|be^{\perp}\|_2\|ea_n\|_2+2\|be^{\perp}\|\tau(|e^{\perp}a_n|)+\|b\|\tau(|e^{\perp}a_n|)\le$$
$$\le\varepsilon\|b\|_1+2\|b\|\|e^{\perp}\|_2\|a_n\|_2+5\|b\|\tau(a_n^2)^{\frac{1}{2}}\tau(e_n^{\perp})^{\frac{1}{2}}\le$$
$$\le\varepsilon\|b\|_1+7\|b\|\|a_n\|_2\varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь мы воспользовались теоремами 2.4, 2.5 и 2.7. В силу L_2 - фундаментальности $\{a_n\}$ вытекает, что $\{\|a_n\|_2\}$ - ограничено. Значит $\tau(ba_n)\longrightarrow 0$ в силу произвольности ε. Следовательно, $a_n\longrightarrow 0$ по L_2 -норме, т.е. $a=0$. Теорема доказана.

Как будет показано ниже, элементы $L_1(\tau)$ (соотв. $L_2(\tau)$) играют роль интегрируемых (соотв. интегрируемых с квадратом) элементов из $\hat{A}$, а τ - роль интеграла от них.

Л е м м а 4.3. а) Если $a\in A$, $b\in L_1(\tau)$, то $ab\in L_1(\tau)$ и $\|ab\|_1\le\|a\|\|b\|_1$.

б) Если $b\in L_p(\tau)$, $b=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda de_\lambda$ - его спектральное разложение $(b)_n=\int_{-n}^{n}\lambda de_\lambda$, то $(b)_n\to b$ по L_p -норме $(p=1,2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) Пусть $\{b_n\}-L_1-$

фундаментальная последовательность в $\mathfrak{M}_\tau$ такая, что $b_n \to b$ в $L_1(\tau)$. Тогда $b_n \to b$ по мере и в силу теоремы 3.I имеем $ab_n \to ab$ по мере.
Кроме того, последовательность $\{ab_n\}$ L_1- фундаментальна, т.к. $\|ab_n - ab_m\|_1 \le \|a\| \|b_n - b_m\|_1$ по теореме 2.4. Значит, $ab \in L_1(\tau)$, причем $\|ab_n\|_1 \to \|ab\|_1$.
Далее, т.к. $\|ab_n\|_1 \le \|a\| \|b_n\|_1$ для всех $n=1,2,\dots$, то переходя к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\|ab\|_1 \le \|a\| \|b\|_1 .$$

б) Так как $(b)_n \to b$ по мере, то достаточно проверить L_p -фундаментальность последовательности $\{(b)_n\}$, $p=1,2$.

Пусть $p=1$. Для любых m, n, $m<n$ имеем

$$\|(b)_n - (b)_m\|_1 = \tau(|(b)_n - (b)_m|) =$$

$$= \tau(|b|_n - |b|_m) = \tau(|b|_n) - \tau(|b|_m) .$$

Числовая последовательность $\{\tau(|b|_n\}$ n возрастает и ограничена сверху, т.к., если положить $g_n = \int_{-n}^{n} de_\lambda \in \nabla$, то по а) имеем $\tau(|b|_n) = \tau(g_n|b|) \le \|g_n\| \tau(|b|) \le \|b\|_1$.

Поэтому эта числовая последовательность сходится, и значит,

$$\|(b)_n - (b)_m\|_1 \to 0 \text{ при } n, m \to \infty .$$

Пусть теперь $p=2$. Тогда при $m<n$ очевидно, имеем

$$\|(b)_n - (b)_m\|_2^2 = \tau([(b)_n - (b)_m]^2) =$$

$$=\tau\left((b^2)_{n^2}-(b^2)_{m^2}\right)=\tau\left((b^2)_{n^2}\right)-\tau\left((b^2)_{m^2}\right).$$

Как и в случае $p=1$,числовая последовательность $\{\tau((b^2)_{n^2})\}$ возрастает и ограничена сверху. Поэтому $\|(b)_n-(b)_m\|\to 0$ при $n,m\to\infty$. Лемма доказана.

С л е д с т в и е 4.I. Функционал $\varphi_a(x)=\tau(ax)$ для $a\in A$ L_1- непрерывен на $L_1(\tau)$.

Доказательство вытекает из леммы 4.3.

Пусть A_0 - максимальная сильно ассоциативная подалгебра JBW -алгебры A . Предположим сужение m следа τ на булеву алгебру идемпотентов A_0 полуконечно. Тогда A_0 изометрически изоморфно (в известном смысле) пространству $L_\infty(S,m)$ - измеримых существенно ограниченных действительных функций на пространстве S с полуконечной с мерой m .

При этом пространства L_1^0 , L_2^0 , $\hat{A}_0$ построенные по JBW -алгебре A_0 , изоморфны соответственно $L_1(S,m)$, $L_2(S,m)$ и $L_0(S,m)$, где $L_0(S,m)$ - пространство всех измеримых функций на S .

Имеет место следующее

С л е д с т в и е 4.2. $L_p^0=L_p\cap\hat{A}_0$ $(p=1,2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Включение $L_p^0\subset L_p\cap\hat{A}_0$ очевидно. Обратно, если $a\in L_p\cap\hat{A}_0$, то $(a)_n\in A_0$, а по лемме 4.3. $(a)_n\to a$ по L_p - норме, т.е. $a\in L_p^0$.

Из этого факта и из изоморфизмов

$$A_0 \cong L_\infty(S, m),$$
$$L_p^0 \cong L_p(S, m), \quad (p = 1, 2),$$
$$\hat{A}_0 \cong L_0(S, m)$$

вытекает следующий результат

Т е о р е м а 4.2. Пусть $\hat{A}$ - ОЈ - алгебра тотально измеримых элементов относительно JBW - алгебры A с точным нормальным полуконечным следом τ.

Элемент $x = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, de_\lambda \in \hat{A}$ принадлежит $L_1(\tau)$ тогда и только тогда, когда $\int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda| \, d\tau(e_\lambda) < +\infty$; при этом $\tau(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\tau(e_\lambda)$.

Элемент $x \in \hat{A}$ принадлежит $L_2(\tau)$ тогда и только тогда, когда $x^2 \in L_1(\tau)$.

Из теоремы 4.2 видно, что пространства $L_1(\tau)$ и $L_2(\tau)$ в точности совпадают с пространствами интегрируемых и интегрируемых с квадратом элементов из $\hat{A}$. В случае, когда JBW-алгебра A есть эрмитова часть W^* - алгебры $\mathcal{U}$, пространства $L_1(\tau)$ и $L_2(\tau)$ изоморфны соответственно пространствам самосопряженных интегрируемых и интегрируемых с квадратом операторов, измеримых относительно $\mathcal{U}$ (см.[38], [54]).

ГЛАВА 2

УСЛОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЖИДАНИЯ И МАРТИНГАЛЫ НА ЙОРДАНОВЫХ БАНАХОВЫХ АЛГЕБРАХ С ПОЛУКОНЕЧНЫМ СЛЕДОМ

В этой главе изучаются условные математические ожидания (у.м.о.) и мартингалы на йордановых банаховых (JBW -)алгебрах с полуконечным следом. Получены теоремы о существовании у.м.о., характеризационные теоремы для у.м.о., исследованы сходимости мартингалов.

§ 2.I. Условные математические ожидания на йордановых алгебрах. Теоремы существования и единственности

Пусть A - JBW - алгебра с точным нормальным полуконечным следом τ, A_1 - JBW - подалгебра A. Всюду предполагается, что $\mathbb{1} \in A_1$.

Определение I.I. Линейное отображение Φ $A \to A_1$ назовем условным математическим ожиданием относительно JBW - подалгебры A_1, если

1) $\Phi(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$;

2) $x \geq 0 \Longrightarrow \Phi(x) \geq 0$ (т.е. Φ -положительно);

3) $\Phi(xy) = \Phi(x)y$ для $x \in A$, $y \in A_1$.

Если выполняется равенство

4) $\tau(\Phi(x)) = \tau(x)$ для $x \in \mathfrak{M}_\tau$,

то у.м.о. Φ назовем τ - и н в а р и а н т н ы м.

У.М.О. Φ называется н о р м а л ь н ы м, если $x_\alpha \uparrow x \Longrightarrow \Phi(x_\alpha)\uparrow\Phi(x)$; т о ч н ы м, если $x \geqslant 0,\ \Phi(x)=0 \Longrightarrow x=0$.

П р и м е р ы. I. Пусть A - JBW - алгебра, ρ - некоторое состояние на A. Для $a\in A$ положим

$$\Phi(a)=\rho(a)\mathbb{1}.$$

Тогда, очевидно, Φ является у.м.о. относительно JBW - подалгебры $A_1=\{\lambda\mathbb{1},\ \lambda\in R\}$. Причем Φ точно (нормально) тогда и только тогда, когда ρ точно (соотв.нормально).

2. Пусть $\{e_n\}$ -последовательность попарно ортогональных идемпотентов в JBW - алгебре A (т.е. $e_i e_j=0$ для $i\neq j$) с $\sum\limits_{i=1}^{\infty} e_i=\mathbb{1}$. И пусть

$$A_1=\{a\in A: a\longleftrightarrow e_i \text{ для всех } i=1,2,\dots\}.$$

Очевидно, A - йорданова подалгебра A, $\mathbb{1}\in A_1$. Из слабой непрерывности умножения в JBW - алгебре по каждому аргументу [19], следует, что A_1 слабо замкнутая подалгебра A, т.е. A_1-JBW - подалгебра A, содержащая $\mathbb{1}$.

Для любого $a\in A$ рассмотрим ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} U_{e_i}a$.

Покажем, что этот ряд сходится сильно. Рассматривая при необходимости раздельно положительную и отрицательную части a, можно сразу предположить, что $a\geqslant 0$. Последовательность частичных сумм $\left\{\sum\limits_{i=1}^{k} U_{e_i}a\right\}$ возрастает и

$$\sum_{i=1}^{k} U_{e_i} a \le \|a\| \sum_{i=1}^{k} e_i \le \|a\| \mathbb{1} \quad \text{для всех } k=1,2,\ldots .$$

В силу монотонной полноты A, существует

$$y = \sup_k \left\{ \sum_{i=1}^{k} U_{e_i} a \right\} \in A,$$

причем $\sum_{i=1}^{k} U_{e_i} a \longrightarrow y$ сильно при $k \to \infty$ в силу теоремы I.5 главы I. Кроме того, так как $e_i \in J_0(e_j)$ при $i \neq j$, то

$$\sum_{i=1}^{k} U_{e_i} a \longleftrightarrow e_j \quad \text{для любых } i, j \; [5].$$

Из сильной непрерывности умножения в JBW-алгебре (теорема I.5 главы I) вытекает, что $y \longleftrightarrow e_i$ для всех $i=1,2,\ldots$, т.е. $y \in A_1$.

Положим $\Phi(a) = \sum_{i=1}^{\infty} U_{e_i} a = y$, $a \in A$. Тогда, очевидно, Φ - линейное, положительное отображение A в A_1, причем $\Phi(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$. Если $b \in A_1$, т.е. $b \longleftrightarrow e_i$ для всех $i=1,2,\ldots$, то $U_{e_i}(ba) = b U_{e_i} a$ и, поэтому, $\Phi(ba) = b\Phi(a)$. Далее, если $\Phi(a)=0$ для $a \geqslant 0$, то $U_{e_i} a = 0$, а в силу теоремы 2.3 из [5] $e_i a = 0$ для всех $i=1,2,\ldots$. Снова пользуясь сильной непрерывностью умножения, имеем

$$a = a\mathbb{1} = a \sum_{i=1}^{\infty} e_i = \sum_{i=1}^{\infty} a e_i = 0,$$

т.е. Φ - точно. Покажем, что Φ - также нормально. Пусть $\{x_\alpha\}$ монотонно возрастающая сеть в A и $x = \sup_\alpha x_\alpha$.

Тогда $\Phi(x) \geq \Phi(x_\alpha)$ для всех α . Следовательно
$\Phi(x) \geq \sup\limits_\alpha \Phi(x_\alpha)$.

Если ρ - произвольное нормальное состояние на A , то $\rho(\Phi(x)) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \rho(U_{e_i} x)$. В силу нормальности оператора U_{e_i} каждое $\rho(U_{e_i})$ является нормальным на A , а в силу теоремы 4 из [4] $\rho(\Phi(\cdot))$ является нормальным состоянием на A . Следовательно,

$$\rho(\Phi(x)) = \sup \rho(\Phi(x_\alpha)) = \rho(\sup \Phi(x_\alpha)),$$

т.е. $\rho(\Phi(x) - \sup \Phi(x_\alpha)) = 0$ для любого нормального состояния ρ на A . Так как JBW - алгебра обладает разделяющим семейством нормальных состояний, то $\Phi(x) = \sup \Phi(x_\alpha)$, т.е. Φ является точным нормальным у.м.о. на A относительно A_1 .

Т е о р е м а I.I. Пусть A - JBW - алгебра с точным нормальным полуконечным следом τ , A_1 - ее некоторая JBW - подалгебра содержащая $\mathbb{1}$. Если $\Phi: A \to A_1$ τ - инвариантное у.м.о., то

5) $\Phi(x)^2 \leq \Phi(x^2) \quad \forall\ x \in A$;

6) $\Phi \circ \Phi = \Phi \quad (A_1 = \{a \in A : \Phi(a) = a\})$;

7) $\tau(x\Phi(y)) = \tau(\Phi(x)y) \quad \forall\, x \in A,\ y \in \mathfrak{M}_\tau$;

8) если $x_\alpha \uparrow x$, то $\Phi(x_\alpha) \uparrow \Phi(x)$;

9) $x \geq 0,\ \Phi(x) = 0 \Rightarrow x = 0$;

10) $\|\Phi(x)\|\le\|x\|\quad\forall\, x\in A$;

11) $\|\Phi(x)\|_1\le\|x\|_1\quad\forall\, x\in \mathfrak{M}_\tau$;

12) $\|\Phi(x)\|_2\le\|x\|_2\quad\forall\, x\in K$.

Доказательство. 5) В силу положительности Φ имеем $\Phi\left((x-\Phi(x))^2\right)\geqslant 0$. Раскрывая скобки по свойству 3), получим

$$\Phi(x^2)-\Phi(x)^2\geqslant 0.$$

6) Если $x=\Phi(x)$, то $x\in\Phi(A)=A_1$. Если $x\in A_1$, то по свойствам 1) и 3) имеем $\Phi(x)=\Phi(x\mathbb{1})=$ $=x\Phi(\mathbb{1})=x$. Значит, A_1 является множеством неподвижных точек. Очевидно, отсюда вытекает, что $\Phi\circ\Phi=\Phi$.

7) Для $y\in\mathfrak{M}_\tau$, очевидно, $\Phi(y)\in\mathfrak{M}_\tau$. В силу τ - инвариантности Φ получим

$$\tau(\Phi(x)y)=\tau(\Phi(\Phi(x)y))=\tau(\Phi(x)\Phi(y)),$$

$$\tau(x\Phi(y))=\tau(\Phi(x\Phi(y)))=\tau(\Phi(x)\Phi(y)).$$

Отсюда $\tau(x\Phi(y))=\tau(\Phi(x)y)$ для любого $x\in A$.

8) Пусть $x_\alpha\uparrow x$, т.е. $x=\sup x_\alpha$. Тогда по теореме 2.6 главы I и по предыдущему равенству

$$\tau(\Phi(x)y)=\tau(x\Phi(y))=\sup\tau(x_\alpha\Phi(y))=$$

$$=\sup\tau(\Phi(x_\alpha)y)=\tau((\sup\Phi(x_\alpha)y),$$

для $y\in\mathfrak{M}_\tau$. Значит,

$$\tau([\Phi(x)-\sup\Phi(x_\alpha)]y)=0 \quad \forall\, y\in\mathfrak{M}_\tau .$$

Так как $\mathfrak{M}_\tau$ плотно в $\mathcal{N}$, то

$$\rho([\Phi(x)-\sup\Phi(x_\alpha)])=0 \quad \forall\, \rho\in\mathcal{N}$$ и,

в частности, для любого нормального состояния ρ . По теореме I.3 главы I

$$\Phi(x)=\sup\Phi(x_\alpha).$$

Следовательно, Φ – нормально.

9) Если $x\in\mathfrak{M}_\tau^+$ и $\Phi(x)=0$, то

$$\tau(x)=\tau(\Phi(x))=0 \Longrightarrow x=0 .$$

Пусть $x\in A^+$ произвольный, и $\Phi(x)=0$. Тогда существует сеть $\{x_\alpha\}$ в $\mathfrak{M}_\tau^+$, что $x=\sup x_\alpha$.
По свойству 8) имеем $\sup\Phi(x_\alpha)=0$, т.е. $\Phi(x_\alpha)=0$ $\forall\alpha$. Так как $x_\alpha\in\mathfrak{M}_\tau^+$ $\forall\alpha$, то $x_\alpha=0$ $\forall\alpha$.
Следовательно, $x=\sup x_\alpha=0$.

I0) Вытекает из свойства I).

II) Пусть $x\in\mathfrak{M}_\tau$, $\Phi(x)=S|\Phi(x)|$ – полярное разложение элемента $\Phi(x)$. Тогда в силу 7) и I0) получим

$$\|\Phi(x)\|_1=\tau(|\Phi(x)|)=\tau(S\Phi(x))=$$

$$=\tau(\Phi(S)x)\le\|\Phi(S)\|\tau(|x|)\le\|x\|_1 .$$

I2) Пусть $x\in K$. Тогда из 4) и 5) имеем

$\tau(\Phi(x)^2) \leq \tau(\Phi(x^2)) = \tau(x^2)$. Теорема доказана.

Теперь исследуем вопросы существования и единственности у.м.о. относительно данной JBW - подалгебры.

Пусть A - JBW - алгебра с точным нормальным полуконечным следом τ. Пусть A_1 - ее некоторая JBW -подалгебра, содержащая $\mathbb{1}$, $\tau_1 = \tau|_{A_1}$ - сужение следа τ на A_1. Аналогично строятся $\mathcal{M}_{\tau_1}$, $L_1(\tau_1)$ относительно τ_1, являющиеся подпространствами $\mathcal{M}_\tau$ и $L_1(\tau)$ соответственно.

Т е о р е м а I.2. Пусть τ_1 - точен, нормален и полуконечен на A_1. Тогда существует положительное, линейное отображение $M(\cdot|A_1): A \longrightarrow A_1$, определенное равенством

$$\tau(M(a|A_1)b) = \tau(ab) \text{ для } a \in A,\ b \in L_1(\tau_1).$$

Причем, $M(\mathbb{1}|A_1) = \mathbb{1}$ и $\|M(a/A_1)\| \leq \|a\| \ \forall a \in A$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $a \in A$. Тогда функционал, определенный как $\varphi_a(b) = \tau(ab) \ \forall b \in L_1(\tau)$ принадлежит пространству непрерывных функционалов на $L_1(\tau)$, т.е. $\varphi_a \in [L_1(\tau)]^*$, по следствию 2.4 главы I.

Так как $\varphi_a|_{L_1(\tau_1)} \in [L_1(\tau_1)]^*$, то в силу того же следствия существует элемент $a' \in A_1$ такой, что $\varphi_a|_{L_1(\tau_1)} = \varphi_{a'}$. Положим $M(a|A_1) = a'$.

Следовательно, для любого $b \in L_1(\tau_1)$ имеем

$$\varphi(ab)=\varphi_a(b)=\varphi_a\Big|_{L_1(\tau_1)}(b)=\varphi_{M(a/A_1)}(b)=\tau(M(a|A_1)b).$$

Линейность этого отображения очевидна. Так как пространства A и $[L_1(\tau)]^*$ порядково изоморфны (следствие 2.4 главы I), то $M(\cdot/A_1)$ - положительно.

Далее, для любого $b\in L_1(\tau_1)$ имеем

$$\tau(\mathbb{1}b)=\tau(M(\mathbb{1}|A_1)b)\text{ ,т.е. }\tau([\mathbb{1}-M(\mathbb{1}/A_1)]b)=0.$$

Это означает, что $\rho(\mathbb{1}-M(\mathbb{1}/A_1))=0 \quad \forall\rho\in N_1$.

Отсюда по теореме I.3 главы I заключаем, что $\mathbb{1}-M(\mathbb{1}|A_1)=0$.

Наконец по теореме I.I $\|M(a|A_1)\|\le\|a\| \ \forall a\in A$.

Теорема доказана.

Т е о р е м а I.3. Отображение $M(\cdot|A_1):A\longrightarrow A_1$ является τ -инвариантным у.м.о. относительно A_1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы I.2 достаточно проверить свойства 3) и 4) у.м.о. τ - инвариантность $M(\cdot|A_1)$- очевидна.

Пусть $a\in A$, $b\in A_1$. Тогда для $x\in L_1(\tau_1)$ по следствию 2.3 главы I имеем

$$\tau(M(ab/A_1)x)=\tau((ab)x)=\tau(a(bx))=$$

$$=\tau(M(a/A_1)(bx))=\tau([M(a/A_1)b]x).$$

То есть $\tau([M(ab|A_1)-M(a|A_1)b]x)=0 \ \forall x\in L_1(\tau_1)$.

Отсюда $M(ab|A_1)-M(a/A_1)b=0$. Следовательно,

$M(ab/A_1)=M(a/A_1)b\ \forall a\in A,\ b\in A_1$. Теорема доказана.

По свойствам II), I2) у.м.о. $M(\cdot/A_1)$ можно продолжить до отображения $L_p(\tau)$ в $L_p(\tau_1)$, которое также будем обозначать через $M(\cdot/A_1)\ (p=1,2)$ и назовем также у.м.о.

Т е о р е м а I.4. У.м.о. $M(\cdot/A_1): L_p(\tau)\to L_p(\tau_1)$ $(p=1,2)$ обладает свойствами:

I3) $\tau(M(x/A_1)y)=\tau(xy)\ \forall x\in L_1(\tau),\ y\in A_1$;

I4) $\tau(M(x/A_1)y)=\tau(xy)\ \forall x\in L_2(\tau),\ y\in L_2(\tau_1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I3) Пусть $x\in L_1(\tau)$ и $\{x_n\}\subset \mathfrak{M}_\tau$ произвольная последовательность L_1 - сходящаяся к x. По теореме I.3 имеем

$$\tau(M(x_n/A_1)y)=\tau(x_n y) \quad \text{для } y\in A_1,\ n=1,2,\ldots$$

В силу L_1 - непрерывности у.м.о. и функционала $\varphi_y(\cdot)=$ $=\tau(\cdot\, y)$ переходим к L_1- пределу в последнем равенстве, и получим

$$\tau(M(x/A_1)y)=\tau(xy)\quad \forall x\in L_1(\tau),\ y\in A_1.$$

I4) Для $x,\ y\in K$ имеем

$$\tau(M(x/A_1)y)=\tau(xM(y/A_1)).$$ Поэтому

$\tau(M(x/A_1)y)=\tau(xy)$ для $x\in K$, когда $y\in K\cap A_1$.

В силу L_2 - непрерывности у.м.о. получим требуемый результат. Теорема доказана.

Т е о р е м а I.5. Пусть A_1 - JBW - подалгебра A, содержащая $\mathbb{1}$, τ_1 - сужение следа τ на A_1. Для того, чтобы существовало τ - инвариантное у.м.о. $\Phi: A \longrightarrow A_1$, необходимо и достаточно, чтобы след τ_1 был полуконечным.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность доказана в теоремах I.2 и I.3.

Необходимость. Пусть $\Phi: A \longrightarrow A_1$ τ- инвариантное у.м.о. относительно JBW - подалгебры A_1. Покажем, что след τ_1 - полуконечный.

Пусть $x \in A_1^+ \subset A^+$. Так как τ - полуконечный, то существует $y \in A^+$, $y \neq 0$ такой, что $y \leq x$ и $\tau(y) < +\infty$.

Рассмотрим элемент $z = \Phi(y) \in A_1$. В силу положительности и точности Φ имеем $z \in A_1^+$ и $z \neq 0$. Далее, $z = \Phi(y) \leq \Phi(x) = x$ и

$$\tau_1(z) = \tau(\Phi(y)) = \tau(y) < +\infty .$$

Следовательно, τ_1 - полуконечный. Теорема доказана.

Т е о р е м а I.6. Пусть τ_1 является полуконечным следом на A_1. Тогда τ - инвариантное у.м.о. относительно A_1 единственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\Phi: A \to A_1$, $\Psi: A \to A_1$ два τ - инвариантных у.м.о., то для $x \in A$ имеем

$$\tau(\Phi(x)y) = \tau(\Phi(xy)) = \tau(xy) = \tau(\Psi(xy)) = \tau(\Psi(x)y)$$

для любого $y \in \mathfrak{M}_{\tau_1}$, т.е. $\tau([\Phi(x)-\Psi(x)]y)=0$ $\forall y \in \mathfrak{M}_\tau$. Отсюда $\tau([\Phi(x)-\Psi(x)]y)=0 \ \forall y \in L_1(\tau_1)$. По теореме I.3 главы I заключаем, что

$$\Phi(x)=\Psi(x) \quad \forall x \in A .$$

Теорема доказана.

В дальнейшем у.м.о. относительно данной JBW - подалгебры A_1 и его продолжения на $L_p(\tau)$ $(p=1,2)$ будем обозначать через $M(\cdot/A_1)$.

§ 2.2. Характеризационные теоремы для условных математических ожиданий

Пусть $A-JB$ - алгебра. Нам понадобится следующая лемма.

Л е м м а 2.I. Пусть $x \in A^+$. Если $x \leq e$ для некоторого идемпотента $e \in A$, то $x \in J_1(e)$, где $J_1(e)$ - пирсовская компонента A по идемпотенту e.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x=x_1+x_{1/2}+x_0$ - пирсовское разложение элемента x по идемпотенту e. Так как $0 \leq x \leq e$, то $x_0=U_{e^\perp}x=0$. Поэтому, $x=x_1+x_{1/2}$. Для $x \in A^+$ существует элемент $y \in A$ такой, что $x=y^2$. Покажем, что $y \in J_1(e)$. Если $y=y_1+y_{1/2}+y_0$ - пирсовское разложение элемента y по идемпотенту e, то $y^2=y_1^2+y_{1/2}^2+y_0^2+2y_{1/2}(y_1+y_0)$, где $y_{1/2}^2 \in J_1(e)+J_0(e)$. Но $y^2=x_1+x_{1/2} \in J_1(e)+J_{1/2}(e)$.

Поэтому $y_0=0$ и $y_{1/2}^2\in J_1(e)$. Тогда

$$0=(y_{1/2}^2 e^1)y_{1/2}=y_{1/2}^2(e^1 y_{1/2})=\frac{1}{2}y_{1/2}^3 .$$

Отсюда $y_{1/2}=0$, т.е. $y=y_1\in J_1(e)$. Следовательно, $x=y^2\in J_1(e)$. Лемма доказана.

Пусть A_1 – JB – подалгебра A, содержащая $\mathbb{1}$.

Теорема 2.I. Если $P: A\longrightarrow A_1$ линейное идемпотентное (т.е. $P(P(x))=P(x)\ \forall x\in A$) отображение с единичной нормой и $P(\mathbb{1})=\mathbb{1}$, тогда

I) $P(a)\geqslant 0$ для $a\in A^+$, т.е. P -положительно;

2) $P(ax)=aP(x)$ для $a\in A_1$, $x\in A$.

Доказательство. I) Так как $\|P\|=1$, т.е. $\sup\limits_{\|x\|\leq 1}\|P(x)\|=1$, то из $-\mathbb{1}\leq x\leq \mathbb{1}$ вытекает, что $-\mathbb{1}\leq P(x)\leq\mathbb{1}$. Поэтому для идемпотента e, очевидно, $P(e)\leq\mathbb{1}$. Аналогично, для идемпотента $\mathbb{1}-e$ имеем $P(\mathbb{1}-e)\leq\mathbb{1}$, т.е. $P(e)\geqslant 0$. Значит, для любого идемпотента e $0\leq P(e)\leq\mathbb{1}$.

Если $x\geqslant 0$ – простой элемент, т.е. $x=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i e_i$, e_i – идемпотент, $\lambda_i\geqslant 0$ $(i=1,2,\dots,n)$, то

$$P(x)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i P(e_i)\geqslant 0 .$$

Пусть $x\geqslant 0$ – произвольный элемент. Тогда существует сеть $\{x_\alpha\} \subset A^+$ простых элементов, которая по норме сходится к x. Так как отображение P непрерывно, по норме, то $P(x_\alpha) \longrightarrow P(x)$ по норме. Следовательно, $P(x) \geqslant 0$.

2) Пусть $e \in A_1$ – некоторый идемпотент и $a \in A^+$ – элемент такой, что $0 \leq a \leq \mathbb{1}$. Тогда $U_e a \leq e$ и $P(U_e a) \leq e$ в силу положительности P и того, что $P(e) = e$. По лемме $P(U_e a) \in J_1(e)$. Отсюда, $P(U_e x) \in J_1(e)$ $\forall x \in A$. Это означает, что $P : J_1(e) \longrightarrow J_1(e)$.

Аналогично, заменив e на $e^\perp$, заключаем, что $P : J_0(e) \longrightarrow J_0(e)$. Теперь докажем, что $P : J_{1/2}(e) \longrightarrow J_{1/2}(e)$.

Пусть $x \in A$, $\|x\| \leq 1$. Положим $P(U_{e,e^\perp} x) = x'$. Покажем, что $U_e x' = 0$.

По теореме Ширшова двупорожденная подалгебра $J(e, x)$ специальна. Замкнув ее по норме, получим JC – алгебру [42] $\overline{J(e,x)}$, тогда

$$U_{e,e^\perp} x = \frac{1}{2}(e \cdot x \cdot e^\perp + e^\perp \cdot x \cdot e),$$

где „$\cdot$" – ассоциативное произведение в обертывающей C^* - алгебре [42]. Для любого натурального n имеем

$$\|U_{e,e^\perp} x + ne\| = \|\frac{1}{2}(e \cdot x \cdot e^\perp + e^\perp \cdot x \cdot e) + ne\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\|e\cdot x\cdot e^{\perp}+ne\|+\frac{1}{2}\|e^{\perp}\cdot x\cdot e+ne\|=$$
$$=\|e\cdot x\cdot e^{\perp}+ne\|=\|(e\cdot x\cdot e^{\perp}+ne)(e^{\perp}\cdot x\cdot e+ne)\|^{\frac{1}{2}}=$$
$$=\|e\cdot x\cdot e^{\perp}\cdot x\cdot e+n^2 e\|^{\frac{1}{2}}\leq (1+n^2)^{\frac{1}{2}}$$

Пусть $U_e x' \neq 0$, тогда можно предположить, что этот элемент имеет спектральное значение $\lambda > 0$. Тогда
$$\|x'+ne\|\geqslant \|U_e(x'+ne)\|=\|U_e x'+ne\|\geqslant \lambda+n$$

для всех n. Поэтому для достаточно больших n
$$\|x'+ne\|\geqslant \lambda+n>(1+n^2)^{\frac{1}{2}}\geqslant \|U_{e,e^{\perp}}x+ne\|.$$

Это противоречит тому, что
$$\|x'+ne\|=\|P(U_{e,e^{\perp}}x)+ne\|=$$
$$=\|P(U_{e,e^{\perp}}x+ne)\|\leq \|U_{e,e^{\perp}}x+ne\|.$$

Значит, $U_e x' = 0$.

Аналогично, заменив e на $e^{\perp}$, имеем $U_{e^{\perp}} x' = 0$. Следовательно,
$$x'=U_e x'+2U_{e,e^{\perp}}x'+U_{e^{\perp}}x'=2U_{e,e^{\perp}}x'.$$

Отсюда заключаем, что $P: J_{1/2}(e)\longrightarrow J_{1/2}(e)$.

Так как
$$P(x)=P(U_e x)+P(2U_{e,e^{\perp}}x)+P(U_{e^{\perp}}x),$$

то имеем

$$2U_{e,e^{\perp}}P(x)=P(2U_{e,e^{\perp}}x),$$

$$U_eP(x)=P(U_ex).$$

То есть

$$2eP(x)-2e(eP(x))=P(2ex-2e(ex)),$$

$$2e(eP(x))-eP(x)=P(2e(ex)-ex).$$

Сложив эти равенства, получим

$$eP(x)=P(ex).$$

Следовательно, $P(ax)=aP(x)\quad \forall a\in A_1$.

Теорема доказана.

Замечание. В случае, когда A является эрмитовой частью C^* - алгебры, из нашей теоремы 2.I вытекает теорема I работы [46].

Теперь докажем теорему о характеризации условных математических ожиданий.

Пусть A - JBW - алгебра, τ - точный нормальный полуконечный след на A.

Теорема 2.2. Пусть $P:A\to A$ линейное положительное идемпотентное τ -инвариантное отображение с $P(\mathbb{1})=\mathbb{1}$. Тогда $A_1=P(A)$ - область значений P - является JBW - подалгеброй и

$$P(x)=M(x/A_1).$$

Доказательство. По лемме I.I [55]

$$P(xP(y))=P(P(x)y) \quad \forall x,y\in A.$$

В силу τ - инвариантности отображения P

$$\tau(xP(y))=\tau(P(x)y) \quad \forall x\in A,\ y\in \mathfrak{M}_\tau.$$

Если $\{x_\alpha\}\subset A$ сеть, слабо сходящаяся к $x\in A$, то

$$\tau(P(x_\alpha)y)=\tau(x_\alpha P(y))\longrightarrow \tau(xP(y))=\tau(P(x)y)$$

для любых $y\in \mathfrak{M}_\tau$. Так как функционалы вида $\varphi_z(a)=\tau(az)$ плотны в $N=A_*$ (теорема 2.8 главы I), то $\varphi(P(x_\alpha))\longrightarrow\varphi(P(x))\ \forall\varphi\in N$.

Значит, $P(x_\alpha)\longrightarrow P(x)$ слабо, и образ отображения P: $A_1=P(A)$ - слабо замкнут.

Очевидно, A_1 - линейное подпространство. Покажем, что A_1 - подалгебра.

Пусть $x\in P(\mathfrak{M}_\tau)$, т.е. $x\in\mathfrak{M}_\tau$ и $x=P(x)$. Тогда $x^2=P(x)^2\le P(x^2)$, или $P(x^2)-x^2\geqslant 0$. Отсюда, $\tau(P(x^2)-x^2)=\tau(P(x^2))-\tau(x^2)=0$ в силу τ - инвариантности отображения P (так как $x^2\in\mathfrak{M}_\tau$). Но τ - точно, поэтому $P(x^2)=x^2$, т.е. $x^2\in P(\mathfrak{M}_\tau)$.

Из очевидного равенства: $xy=\frac{1}{2}\left((x+y)^2-x^2-y^2\right)$ имеем, что $xy\in P(\mathfrak{M}_\tau)$ при $x,y\in P(\mathfrak{M}_\tau)$. Следовательно, $P(\mathfrak{M}_\tau)$ -подалгебра.

Докажем, что $\overline{P(\mathfrak{M}_\tau)}=P(A)$ ($\overline{P(\mathfrak{M}_\tau)}$ -слабое замыкание подалгебры $P(\mathfrak{M}_\tau)$).

Так как $P(\mathfrak{M}_\tau) \subset P(A)$ и $P(A)$ - слабо замкнута, то достаточно доказать, что

$$P(A) \subset \overline{P(\mathfrak{M}_\tau)}.$$

В силу того, что $\overline{\mathfrak{M}}_\tau = A$, заключаем, что для любого $x \in P(A) \subset A$ существует сеть $\{x_\alpha\} \subset \mathfrak{M}_\tau$, которая слабо сходится к $x = P(x)$. Но $P(x_\alpha) \to P(x) = x$ слабо, поэтому $x \in \overline{P(\mathfrak{M}_\tau)}$.
Значит, $\overline{P(\mathfrak{M}_\tau)} = P(A) = A_1$.

Далее, свойство 3) у.м.о. доказывается как в теореме 2.I. В силу единственности у.м.о. относительно JBW - подалгебры A_1 имеем

$$P(x) = M(x/A_1) \quad \forall x \in A.$$

Теорема доказана.

Пусть A_1 - JBW - подалгебра A , τ_1 - сужение следа τ на A_1 . Рассмотрим $L_p(\tau_1)$ как замкнутое подпространство $L_p(\tau)$ $(p=1,2)$. Иногда будем обозначать $L_p(A)$ и $L_p(A_1)$ вместо $L_p(\tau)$ и $L_p(\tau_1)$ соответственно $(p=1,2)$.

Для $x \in L_p(\tau)$, $p=1,2$, пусть $x = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda de_\lambda$ - спектральное разложение элемента x . Тогда, очевидно, каждое e_λ принадлежит A . Обозначим через $W(x)$ - JBW- - подалгебру A , порожденную $\{e_\lambda\}$. Имеет место следующий результат.

Т е о р е м а 2.3. Всякому подмножеству S в $L_p(\tau)$ ($p=1$ или 2) соответствует единственная JBW - подалгебра $W(S)$ в A такая, что $S \subset L_p(W(S))$.
Отображение $S \to W(S)$ обладает следующими свойствами:

а) $W(L_p(W(S)))=W(S)$;

б) $S_1 \subset S_2 \Rightarrow W(S_1) \subset W(S_2)$;

в) Если S_1 и S_2 имеют одинаковую замкнутую выпуклую оболочку в $L_p(\tau)$ $(p=1,2)$, то $W(S_1)=W(S_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $S \subset L_p(\tau)$ $(p=1,2)$ и $W(S)$ - JBW - подалгебра, порожденная множеством $\{W(x),\ x \in S\}$. Если $x \in S$, то $\{e_\lambda(x)\} \subset W(S)$
Значит, $x \in L_p(W(S))$.

Если W такая JBW - подалгебра A, что $S \subset L_p(W)$, то, очевидно $W(S) \subset W$.

Свойства б), в) проверяются непосредственно. Докажем а). Так как $S \subset L_p(W(S))$, то по свойству б)

$$W(S) \subset W(L_p(W(S))).$$

Обратно, если $x \in L_p(W(S))$, то $e_\lambda(x) \in W(S)$.
Следовательно,

$$W(L_p(W(S))) \subset W(S).$$

Теорема доказана.

Т е о р е м а 2.4. Пусть $L=L_2(\tau)$ и $P: L \to L$ - линейное положительное идемпотентое отображение. Тогда следующие условия эквивалентны:

(i) Отображение P совпадает с у.м.о. $M(\cdot/A_1)$ относительно некоторой JBW - подалгебры A_1 .

(ii) $P(L)=L_2(W(P(L)))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о (i) $\Longrightarrow$ (ii). Так как $P(L)=L_2(A_1)$ и $P(\mathcal{M}_\tau)-L_2$ - плотно в $P(L)$, то по свойству в) теоремы 2.3, имеем

$$A_1=W(P(\mathcal{M}_\tau))=W(P(L)),$$

т.е. $P(L)=L_2(W(P(L)))$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Пусть $<\ ,\ >$ означает скалярное произведение на L . Так как P -проекция в L , то для любых $x, y \in L$

$$\tau(P(x)y)=<P(x),y>=<x,P(y)>=\tau(xP(y)).$$

Пусть $A_1=W(P(L))$, тогда для $x \in L$

$M(P(x)|A_1)=P(x)$, $P(M(x|A_1))=M(x|A_1)$ (так как $M(\cdot/A_1): L \longrightarrow P(L)$). Поэтому, для $y \in L$ имеем

$$\tau(P(x)y)=\tau(P(x)M(y|A_1))=$$

$$=\tau(xP(M(y/A_1)))=\tau(xM(y/A_1))=\tau(M(x/A_1)y).$$

Следовательно,

$$\tau(P(x)y)=\tau(M(x/A_1)y) \quad \forall y\in L .$$

Отсюда $P(x)=M(x|A_1) \ \forall x\in L$. Теорема доказана.

§ 2.3. Мартингалы на йордановых алгебрах

В этом параграфе вводится понятие мартингала на йордановых алгебрах. Получены теоремы о сходимости в среднем для мартингалов в $L_1(\tau)$ и $L_2(\tau)$.

Пусть A – JBW – алгебра с точным нормальным полуконечным следом τ . Пусть $\{A_n\}$ – возрастающая последовательность JBW – подалгебр содержащих $\mathbb{1}$, порождающая всю алгебру A , т.е. множество $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ слабо плотно в A . Предположим, что след $\tau_n=\tau/A_n$ – сужение следа τ на A_n также полуконечно, $n=1,2,\dots$.

О п р е д е л е н и е 3.I. Последовательность элементов $\{x_n\}$ в $L_1(\tau)$ назовем м а р т и н г а л о м (возрастающим), если для всех $n=1,2,\dots$:

1) $x_n\in L_1(\tau_n)$;

2) $M(x_{n+1}|A_n)=x_n$.

О п р е д е л е н и е 3.2. Мартингал $\{x_n\}$ называется L_1 -ограниченным, если $\sup\limits_n\|x_n\|_1<+\infty$.

О п р е д е л е н и е 3.3. L_1 - ограниченный мартингал называется равномерно интегрируемым, если

а) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \sup\{|\tau(x_n y)| : n, y\in A, \|y\|\le 1, \|y\|_1\le\varepsilon\}=0$;

б) для любого $\varepsilon>0$, существует идемпотент $e\in\mathfrak{M}_\tau$ такой, что

$$|\tau((U_{e^\perp}x_n)y)|<\varepsilon,\ n=1,2,\dots,\ y\in A,\ \|y\|\le 1.$$

Из существования полярного разложения элементов в OJ - алгебре вытекает, что, если $\{x_n\}$ равномерно интегрируемый мартингал, то $\{x_n^+\}$, $\{x_n^-\}$, $\{|x_n|\}$ - также равномерно интегрируемые мартингалы, где x_n^+, x_n^-, $|x_n|$ - означают положительный, отрицательный части и модуль элемента x_n [18] соответственно.

Приведем один известный факт.

Т е о р е м а 3.I. [7]. Пусть M - ограниченное по норме подмножество N. Следующие условия эквивалентны:

(i) M относительно слабо компактно;

(ii) сужение M на каждую максимальную ассоциативную подалгебру A относительно слабо компактно;

(iii) если $\{p_k\}_{k=1}^\infty$ - последовательность ортогональных идемпотентов в A, то $\lim\limits_{k\to\infty} f(p_k)=0$ равномерно по всем $f\in M$.

Так как банаховы пространства N и $L_1(\tau)$ изометрически изоморфны (теорема 2,8 главы I), то имеет место следующий результат.

Т е о р е м а 3.2. Для того, чтобы мартингал $\{x_n\}$ в $L_1(\tau)$ был равномерно интегрируемым, необходимо и достаточно, чтобы множество $\{x_n\}$ было относительно слабо компактным.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $\{x_n\}$ равномерно интегрируемый мартингал. Покажем относительно слабую компактность множества $\{x_n\}$. По теореме 3.I достаточно показать, что для любой последовательности $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ попарно ортогональных идемпотентов в A выполнено: $\varphi_{x_n}(P_k)\to 0$ равномерно по всем n, при $k\to\infty$ (здесь $\varphi_{x_n}(y)=\tau(x_n y)\ \forall y\in A$).

Пусть $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ последовательность попарно ортогональных идемпотентов в A. Если e - некоторый идемпотент в $\mathfrak{M}_\tau$, то $U_e P_k\in\mathfrak{M}_\tau\ \forall\ k=1,2,\ldots$ и $\tau(U_e P_k)\to 0$ при $k\to 0$ в силу нормальности оператора U_e и следа τ. Не трудно видеть, что $\tau(|U_{e,e^\perp}P_k|)\to 0$ при $k\to\infty$.

В силу равномерной интегрируемости мартингала $\{x_n\}$ для любого $\varepsilon>0$ существует идемпотент $e\in\mathfrak{M}_\tau$ такой, что

$$|\tau((U_{e^\perp}x_n)P_k)|<\frac{\varepsilon}{3}\quad\forall\ n=1,2,\ldots,\ k=1,2,\ldots;$$

в силу вышесказанного

$$|\tau(x_n(U_e P_k))|<\frac{\varepsilon}{3}\ \forall\ n=1,2,\ldots \text{ для достаточ-}$$

но больших k ; а также

$$|\tau(x_n(U_{e,e^\perp}P_k))| \le \frac{\varepsilon}{6} \quad \forall\ n=1,2,\ldots,\ k\to\infty .$$

Поэтому

$$|\tau(x_n P_k)| \le |\tau(x_n(U_e P_k))| +$$

$$+ 2|\tau(x_n(U_{e,e^\perp}P_k))| + |\tau(x_n(U_{e^\perp}P_k))| \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{3} + 2\cdot\frac{\varepsilon}{6} + |\tau((U_{e^\perp}x_n)P_k)| < \varepsilon .$$

Здесь мы воспользовались равенством

$$\tau(x_n(U_{e^\perp}P_k)) = \tau((U_{e^\perp}x_n)P_k),$$

которое верно по следствию 2.3 главы I. В силу произвольности ε имеем $|\tau(x_n P_k)| \to 0$ равномерно по всем $n=1,2,\ldots$. Значит, множество $\{x_n\}$ относительно слабо компактно.

Достаточность. Пусть теперь множество $\{x_n\}$ относительно слабо компактно и $x\in L_1(\tau)$ - его предельная точка. Очевидно оно L_1 - ограничено. Покажем, что выполняются условия а) и б) из определения 3.3.

а) Пусть $\varepsilon>0$ и $\|y\|\le 1$, $\|y\|_1\le\varepsilon$. Тогда существует $z\in\mathcal{M}_\tau$ такой, что $\|x-z\|_1\le\varepsilon$ и

$$|\tau(xy)| \le |\tau((x-z)y)| + |\tau(zy)| \le$$

$$\le \|x-z\|_1\|y\| + \|z\|\|y\|_1 \le \varepsilon + \|z\|\varepsilon .$$

Следовательно, $|\tau(x,y)| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Так как $x_n \to x$ слабо в $L_1(\tau)$ и функционал определенный по формуле $\varphi_y(h)=\tau(hy)$ слабо непрерывен в $L_1(\tau)$, то существует номер n_0 такой, что

$\tau((x_n - x)y) \le \varepsilon$ при $n \geq n_0$.

Далее, $|\tau(x_n y)| \le |\tau((x_n - x)y)| + |\tau(xy)|$, поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup\{|\tau(x_n y)| : n \geq n_0, y\in A, \|y\|\le 1, \|y\|_1 \le \varepsilon\} = 0.$$

б) Покажем сначала, что для любого $\varepsilon > 0$ существует идемпотент $e \in \mathcal{M}_\tau$ такой, что

$$|\tau((U_{e^\perp} x)y)| < \varepsilon, \quad y\in A, \ \|y\|\le 1.$$

Допустим противное, т.е. существует $\varepsilon > 0$, что для любого идемпотента $e \in \mathcal{M}_\tau$ найдется элемент $y \in A$, $\|y\| \le 1$ такой, что

$$|\tau((U_{e^\perp} x)y)| > \varepsilon.$$

В силу полуконечности A можно выбрать $\{e_\alpha\} \subset \mathcal{M}_\tau$ с $\sup_\alpha e_\alpha = \mathbb{1}$. Тогда $e_\alpha^\perp \downarrow 0$. Отсюда

$$|\tau(U_{e_\alpha^\perp} x)| = |\tau(e_\alpha^\perp x)| \to 0.$$

Поэтому существует α_0 такое, что $|\tau(U_{e_{\alpha_0}^\perp} x)| < \varepsilon$

Следовательно,

$$\varepsilon < |\tau((U_{e_{\alpha_0}^\perp} x) y_{\alpha_0})| \le |\tau(U_{e_{\alpha_0}^\perp} x)| < \varepsilon.$$

Противоречие.

Нетрудно видеть, что из слабой сходимости x_n к x вытекает, что существует номер n_0, такой, что

$$|\tau((U_{e^\perp}(x_n-x))y)|<\varepsilon \quad \text{при} \quad n\geq n_0.$$

Значит,

$$|\tau((U_{e^\perp}x_n)y)|\leq|\tau((U_{e^\perp}(x_n-x))y)|+|\tau((U_{e^\perp}x)y)|<2\varepsilon,$$

когда $y\in A$, $\|y\|\leq 1$, $n\geq n_0$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 3.3. Пусть $\{x_n\}$ мартингал в $L_1(\tau)$ Следующие условия эквивалентны:

(i) $\{x_n\}$ – равномерно интегрируемый мартингал;

(ii) существует $x\in L_1(\tau)$ такой, что $\|x_n-x\|_1\to 0$, $n\to\infty$;

(iii) существует $x\in L_1(\tau)$ такой, что $x_n=M(x/A_n)$, $n=1,2,\dots$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (i) $\Longrightarrow$ (iii). По теореме 3.2 $\{x_n\}$ относительно слабо компактно. Значит, существует $x\in L_1(\tau)$ такой, что $x_n\to x$ слабо. Поэтому

$$\tau(xy)=\lim_{n\to\infty}\tau(x_ny) \quad \forall\, y\in A$$

Фиксируем n и для всех $y\in A_n$ имеем

$$\tau(xy)=\lim_{m\to\infty}\tau(x_my)=$$

$$=\lim_{m\to\infty}\tau(M(x_m/A_n)y)\ (m\geq n)=\tau(x_ny).$$

Это означает, что $x_n = M(x/A_n)$.

$(iii) \Longrightarrow (i)$. По теореме I.I имеем

$$\tau(M(x/A_n)a) = \tau(xM(a/A_n)) \quad \forall a \in A, x \in \mathfrak{M}_\tau .$$

Так как $\mathfrak{M}_\tau$ плотно в $L_1(\tau)$, то

$$\tau(M(x/A_n)a) = \tau(xM(a/A_n)) \ \forall a \in A, x \in L_1(\tau).$$

Пусть $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ последовательность попарно ортогональных идемпотентов в A. Так как $p_k \xrightarrow{(сл.)} 0$, то $M(p_k/A_n) \xrightarrow{(сл)} 0$ равномерно по всем n в силу нормальности у.м.о. Тогда

$$\tau(M(x/A_n)p_k) = \tau(xM(p_k/A_n)) \longrightarrow 0 \quad \text{при } k \longrightarrow \infty$$

равномерно по всем n. Значит, мартингал $\{M(x/A_n)\}$ относительно слабо компактен. По теореме 3.2 он равномерно интегрируемый.

$(iii) \Longrightarrow (ii)$. Пусть $M(x/A_n) \to x$ слабо, т.е. $\varphi_{M(x/A_n)} \longrightarrow \varphi_x$ слабо в N, где $\varphi_x(a) = \tau(ax) \ \forall a \in A$. Значит, элемент 0 принадлежит слабому замыканию выпуклой оболочки множества $\{\varphi_{M(x/A_n)} - \varphi_x, n \geqslant 1\}$, которое является замкнутым по норме. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует выпуклая комбинация $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi_{M(x/A_{n_i})}$, что $\| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi_{M(x/A_{n_i})} - \varphi_x \| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Если $n \geqslant \max\{n_i\}$, тогда

$$\| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi_{M(x/A_{n_i})} - \varphi_{M(x/A_n)} \| \leq \| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi_{M(x/A_{n_i})} - \varphi_x \| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда $\|\varphi_{M(x/A_n)} - \varphi_x\| < \varepsilon$, т.е. $\tau(|M(x/A_n) - x|) < \varepsilon$.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$. Пусть $\{x_n\}$ мартингал, сходящийся к x по L_1 - норме. Тогда для любого $y \in A_n$

$$\tau(x_n y) = \tau(x_m y) \quad \text{при} \quad m \geqslant n.$$

Переходя к L_1 - пределу при $m \to \infty$, получим

$$\tau(x_n y) = \tau(x y) \quad \text{для} \quad y \in A_n.$$

Это означает, что $x_n = M(x/A_n)$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 3.4. Пусть $\{x_n\}$ мартингал в $L_2(\tau)$. Следующие условия эквивалентны:

а) $\sup\limits_n \|x_n\|_2 < +\infty$;

б) существует $x \in L_2(\tau)$ такой, что $\|x_n - x\|_2 \to 0$, $n \to \infty$;

в) существует $x \in L_2(\tau)$ такой, что $x_n = M(x/A_n)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. $a) \Longrightarrow б)$. Для любого n при $m \geqslant n$ имеем

$$\tau(x_n^2)^2 = \tau(x_n x_m)^2 \leq \tau(x_n^2)\tau(x_m^2).$$

Значит, $\tau(x_n^2) \leq \tau(x_m^2)$, т.е. $\|x_n\|_2^2 \leq \|x_m\|_2^2$ для любых n и m $(m \geqslant n)$. Следовательно, последовательность чисел $\{\|x_n\|_2^2\}$ возрастает и ограничена сверху. Поэтому существует $\lambda = \lim\limits_{n \to \infty} \|x_n\|_2^2$.

Пусть m и n $(m \geqslant n)$ произвольны. Тогда

$$\|x_n - x_m\|_2^2 = \tau((x_n - x_m)^2) = \tau(x_n^2) -$$

$$-2\tau(x_n x_m)+\tau(x_m^2)=\tau(x_n^2)-2\tau(x_n^2)+\tau(x_m^2)=$$
$$=\tau(x_m^2)-\tau(x_n^2)=$$
$$=\|x_m\|_2^2-\|x_n\|_2^2 \longrightarrow 0 \text{ при } n,m\to 0 .$$

Значит, последовательность $\{x_n\}$ - L_2 - фундаментальна. В силу полноты пространства $L_2(\tau)$ существует $x\in L_2(\tau)$ такой, что $L_2-\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

б) $\Rightarrow$ в). Пусть $\{x_n\}$ мартингал в $L_2(\tau)$ и $x_n \to x$ по L_2 - норме. По теореме I.4 для любого $y\in L_2(\tau_n)$ имеем $\tau(x_n y)=\tau(x_m y)$ при $m\geqslant n$. Переходя к L_2 - пределу при $m\to\infty$, получим

$$\tau(x_n y)=\tau(xy) \quad \text{для} \quad y\in L_2(\tau_n).$$

Это означает, что $x_n = M(x/A_n)$.

в) $\Rightarrow$ а). Так как $\|M(x/A_n)\|_2 \leq \|x\|_2$ для любого $n=1,2,\dots$, то $\{x_n\}=\{M(x/A_n)\}$ — L_2 - ограничен. Теорема доказана.

Теперь рассмотрим убывающие мартингалы.

Пусть A - JBW - алгебра с точным нормальным полуконечным следом τ, $\{A_n\}$ - убывающая последовательность JBW - подалгебр A, содержащих $\mathbb{1}$.

Положим $A_\infty = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ и предположим, что след τ_n - сужение следа τ на A_n также полуконечен.

О п р е д е л е н и е 3.4. Убывающим мартингалом называется последовательность $\{x_n\}\subset L_1(\tau)$ такая, что

1) $x_n \in L_1(\tau_n)$;

2) $M(x_n/A_{n+1}) = x_{n+1}$.

Имеет место следующий результат.

Т е о р е м а 3.5. Пусть $\{x_n\}$ убывающий мартингал в $L_2(\tau)$ (в $L_2(\tau)\cap A$). Тогда существует $x\in L_2(\tau)$ (соотв. $x\in L_2(\tau)\cap A$) такой, что x_n сходится к x по L_2 - норме (соотв. сильно).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Случай $L_2(\tau)$:
Пусть $m\le n$, тогда $\tau(x_n^2)^2=\tau(x_n x_m)^2\le\tau(x_n^2)\tau(x_m^2)$.
Следовательно, $\tau(x_n^2)\le\tau(x_m^2)$. Это означает, что последовательность чисел $\{\tau(x_n^2)\}$ убывает и очевидно, ограничена снизу (т.к. $\tau(x_n^2)\geqslant 0$, $n=1,2,\ldots$).
Поэтому существует $\lambda=\lim\limits_{n\to\infty}\tau(x_n^2)$. Далее,

$$\|x_m-x_n\|_2^2=\tau((x_m-x_n)^2)=\tau(x_m^2)-2\tau(x_n x_m)+$$

$$+\tau(x_n^2)=\tau(x_m^2)-2\tau(x_n^2)+\tau(x_n^2)=\tau(x_m^2)-$$

$-\tau(x_n^2)\to 0$ при $m,n\to 0$. Следовательно, $\{x_n\}$ — L_2 - фундаментальна, т.е. существует $x\in L_2(\tau)$ такой, что $x=L_2\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

Случай $L_2(\tau)\cap A$: Очевидно, $\|x_n\|\le\|x_0\|$

для любого $n=1,2,\ldots$, по теореме I.I. Так как $\{x_n\}\subset L_2(\tau)$, то в силу доказанного выше она сходится к некоторому $x\in L_2(\tau)$ по L_2 - норме.

Для $y\in \mathcal{M}_\tau$ имеем

$$|\tau(xy)|=\lim_{n\to\infty}|\tau(x_n y)|\le\lim_{n\to\infty}\|x_n\|\tau(|y|)\le\|x_0\|\|y\|_1.$$

Отсюда $x\in A$. Далее, т.к.

$$|\tau((x_n-x)^2y)|\le\|y\|\tau((x_n-x)^2),$$

то $\tau((x_n-x)^2y)\to 0$ при $n\to 0$. Следовательно, $\tau((x_n-x)^2y)\to 0$ при $n\to\infty$ для $y\in L_1(\tau)$. По определению сильной топологии (см. § I.I) это означает, что $x_n\to x$ сильно. Теорема доказана.

В конце параграфа рассмотрим пример для у.м.о. и мартингала.

Пусть A — JBW - алгебра с точным нормальным полуконечным следом τ. Пусть e идемпотент в A. Для $x\in A$ положим

$$x^{|e}=U_e x+U_{1-e}x.$$

Л е м м а 3.I. Образ $A^{|e}=A_1$ отображения $x\to x^{|e}$ является JBW - подалгеброй A и $x^{|e}=M(x/A_1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x=x_1+x_{1/2}+x_0$ - пирсовское разложение элемента x по идемпотенту e. Отсюда заключаем, что отображение $x\to x^{|e}$ сопоставит элементу x сумму его компонент: x_1+x_0. Легко проверить, что оно линейно, идемпотентно, положительно и сохраняет $\mathbb{1}$. По лемме 2.3 главы I $\tau(x^{|e})=\tau(x)$ для любого $x\in \mathcal{M}_\tau$. Значит выполнены все условия теоремы 2.2. Поэтому $A^{|e}=A_1$ — JBW - подалгебра A и $x^{|e}$ совпадает с единственным у.м.о. $M(\cdot/A_1)$ относительно JBW - подалгебры A_1, т.е. $x^{|e}=M(x/A_1)$. $\forall x\in A$ Лемма доказана.

Возьмем конечное число идемпотентов e_1, e_2, $\dots, e_n$ из A и введем обозначение, т.е. вместо

$(x^{|e_1})^{|e_2}, ((x^{|e_1})^{|e_2})^{|e_3}, \dots, ((x^{|e_1})^{|e_2}\dots)^{|e_n}$ будем писать просто: $x^{|e_1|e_2}, x^{|e_1|e_2|e_3}, \dots, x^{|e_1|e_2\dots|e_n}$

соответственно. Нетрудно доказать, что имеет место следующий результат.

Лемма 3.2. Если $e_1, e_2, \dots, e_n$ попарно совместны, то для любой перестановки $(1', 2', \dots, n')$ из $(1,2,\dots,n)$ верно равенство

$$x^{|e_{1'}|e_{2'}\dots|e_{n'}}=x^{|e_1|e_2\dots|e_n}.$$

Пусть $\{e_n\}$ конечная или бесконечная последовательность попарно совместных идемпотентов в A. Для $x\in A$ положим

$$x^{\varepsilon_n}=x^{|e_1|e_2\dots|e_n}, \quad n=1,2,\dots .$$

Теорема 3.6. Множество $A_{-n}=\{x^{\varepsilon_n}, x\in A\}$ является JBW - подалгеброй A для любого $n=1,2,\dots$

и отображение $x \longrightarrow x^{\varepsilon_n}$ из A в A_{-n} совпадает с у.м.о. относительно A_{-n}.

Если положим $x_{-n} = x^{\varepsilon_n}$ для $n=1,2,\dots$, то $\{x_{-n}\}$ - убывающий мартингал.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По индукции из леммы 3.I вытекает, что каждая A_{-n} - JBW - подалгебра A , и удовлетворяют условию

$$A_{-1} \supset A_{-2} \supset \dots \supset A_{-n} \supset \dots$$

и $x^{\varepsilon_n} = M(x / A_{-n})$ для $n=1,2,\dots$.

По определению $\{x_{-n}, n=1,2,\dots\}$ есть убывающий мартингал. Теорема доказана.

Т е о р е м а 3.7. Если $x \in L_2(\tau) \cap A$, то $x^{\varepsilon_n} \in L_2(\tau) \cap A_{-n}$ и x_{-n} сильно (и по L_2 -норме) сходится к $x_{-\infty} \in L_2(\tau) \cap A_{-\infty}$, где $A_{-\infty} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{-n}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $x \in L_2(\tau) \cap A$ и $n=1,2,\dots$

$$\tau(x_{-n}^2) = \tau((x^{\varepsilon_n})^2) \le \tau((x^2)^{\varepsilon_n}) = \tau(x^2) .$$

Поэтому $x_{-n} \in L_2(\tau) \cap A_{-n}$. По теореме 3.5 x_{-n} сильно (и по L_2 - норме) сходится к $x_{-\infty} \in L_2(\tau) \cap A_{-\infty}$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 3.I. Пусть $x \in L_2(\tau) \cap A$. Тогда отображение $x \longrightarrow x_{-\infty}$ можно единственным образом продолжить до у.м.о. $M(\cdot / A_{-\infty}) : L_2(\tau) \longrightarrow L_2(\tau)$.

Доказательство. Положим $x^{\varepsilon} = x_{-\infty}$ для $x \in L_2(\tau) \cap A$. Так как $\|x^{\varepsilon_n}\|_2 = \|x_{-n}\|_2 \leq \|x\|_2$, то $\|x^{\varepsilon}\|_2 \leq \|x\|_2$ для $x \in L_2(\tau) \cap A$. Линейность, положительность и идемпотентность отображения $x \to x^{\varepsilon}$ очевидны. Так как $L_2(\tau) \cap A$ L_2- плотно в пространстве $L_2(\tau)$, то его можно продолжить до отображения $L_2(\tau) \to L_2(\tau)$. Кроме того, так как $x^{\varepsilon} = x$ для $x \in L_2(\tau) \cap A_{-\infty}$, то выполнены условия (ii) теоремы 2.3. Поэтому $x^{\varepsilon} = M(x / A_{-\infty})$ для любого $x \in L_2(\tau)$. Следствие доказано.

§ 2.4. Теоремы о сходимости мартингалов на йордановых алгебрах

В этом параграфе продолжается изучение мартингалов на йордановых банаховых алгебрах. Получены теоремы о сходимости почти всюду, S - почти всюду и почти равномерно для интегрируемых, интегрируемых с квадратом и ограниченных мартингалов соответственно.

Пусть $A - JBW$ - алгебра с точным нормальным полуконечным следом τ, $\{A_n\}$ - возрастающая последовательность JBW - подалгебр A, содержащих $\mathbb{1}$, порождающая всю алгебру A. Предположим, что след $\tau_n = \tau / A_n$ - сужение следа τ на A_n также полуконечно, $n = 1, 2, \ldots$.

I. Мартингалы в $L_1(\tau)$.

Пусть $\{x_n\}$ мартингал в $L_1(\tau)$.

Определение 4.I. Пусть $\mathcal{B}$ замыкание в A множества $\bigcup_n A_n$ в топологии нормы. Тогда, очевидно, $\mathcal{B}$ — JB - алгебра. Пусть $\mathcal{B}^*$ - его сопряженное, $\widetilde{\mathcal{B}}=\mathcal{B}^{**}$ — второе сопряженное к $\mathcal{B}$. Из [I9, 39] известно, что $\widetilde{\mathcal{B}}$ является обертывающей JBW - алгеброй для $\mathcal{B}$ и нормальные функционалы на $\widetilde{\mathcal{B}}$ это суть продолжения функционалов на $\mathcal{B}$ (т.е. определяются элементами $\mathcal{B}^*$).

а) Пусть $\mathcal{B}^*_m$ множество всех элементов из $\mathcal{B}^*$ которые непрерывны в $*$ - слабой топологии индуцированной из A.

в) Пусть $\mathcal{B}^*_u$ множество всех элементов $\varphi\in\mathcal{B}^*$, таких, что φ/A_n - непрерывны в $*$ - слабой топологии на A_n индуцированной из A.

Очевидно, $\mathcal{B}^*_m \subset \mathcal{B}^*_u$.

Предложение 4.I. Существует взаимно однозначное соответствие между $\mathcal{B}^*_u$ и множеством всех L_1 - ограниченных мартингалов. При этом соответствии $\mathcal{B}^*_m$ переходит в точности на множество всех равномерно интегрируемых мартингалов. Соответствие устанавливается следующим образом: функционал $\varphi\in\mathcal{B}^*_u$ соответствует мартингалу $\{x_n\}$, если $\varphi(y)=\tau(x_n y)$ $\forall y\in A_n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varphi \in \mathcal{B}_{\mathcal{U}}^{*}$, т.е. φ/A_n – * - слабо непрерывный функционал. Из теоремы 2.8 главы I вытекает, что существует единственный элемент $x_n \in L_1(\tau/A_n)$ такой, что $\varphi/_{A_n}(y) = \tau(x_n y)$ $\forall\, y \in A_n$. Для $y \in A_n$ имеем

$$\tau(x_{n+1} y) = \varphi/_{A_{n+1}}(y) = \varphi/A_n(y) = \tau(x_n y).$$

То есть, $M(x_{n+1}/A_n) = x_n$. Значит, $\{x_n\}$- мартингал. Более того $\|x_n\|_1 = \|\varphi/A_n\| \leq \|\varphi\|$, в силу изометричности изоморфизма между $L_1(\tau_n)$ и $(A_n)_*$ (теорема 2.8 главы I), где $(A_n)_*$ - предсопряженное к A_n. Отсюда вытекает, что $\{x_n\}$ – L_1 - ограничен.

Обратно, если $\{x_n\}$ – L_1- ограниченный мартингал и $y \in A_n$, то положим

$$\varphi(y) = \tau(x_n y).$$

Так как $\{x_n\}$ - мартингал, то φ корректно определен на всем $\bigcup_n A_n$. Этот функционал линеен и по лемме 4.3 главы I

$$\|\varphi(y)\| \leq \|y\|\,\|x_n\|_1,$$

т.е. $|\varphi(y)| \leq \|y\| \sup_n \|x_n\|_1$. Значит φ непрерывен на $\bigcup_n A_n$ и поэтому имеет единственное продолжение на $\mathcal{B}$, которое, очевидно, * - слабо непрерывно (т.е. нормально) на каждом A_n, $n = 1, 2, \ldots$.

Для завершения доказательства нам понадобится следующая

Л е м м а 4.I. Если последовательность $\{x_n\} \subset \mathfrak{M}_\tau$ L_1 - сходится к $x \in \mathfrak{M}_\tau$, то она слабо сходится к x .

Доказательство. Пусть $x_n \xrightarrow{(L_1)} 0$ (не ограничивая общности, можно считать, что $x=0$), т.е. $\tau(|x_n|) \longrightarrow 0$. Тогда для любого $y \in \mathfrak{M}_\tau$ функционал $\varphi_y(z)=\tau(zy)$ - нормальный на A по теореме 2.6 гл.I. Отсюда, $|\varphi_y(x_n)|=|\tau(x_n y)| \leq \|y\| \tau(|x_n|) \longrightarrow 0$. Так как $\mathfrak{M}_\tau$ плотно в $L_1(\tau)$, то $\varphi_y(x_n) \longrightarrow 0$ $\forall y \in L_1(\tau)$. Значит, $x_n \longrightarrow 0$ слабо. Лемма доказана.

Если $\varphi \in \mathcal{B}_m^*$ и допустить, что $\{x_n\}$ не равномерно интегрируемый, то существует последовательность $\{y_k\} \subset \bigcup\limits_n A_n$ такая, что $\|y_k\| \leq 1$, $\lim\limits_{k\to\infty} \|y_k\|_1 \longrightarrow 0$ и подпоследовательность $\{n_k\}$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} \tau(y_k x_{n_k}) \neq 0$. Эти же свойства сохраняются, если заменить y_k на $M(y_k/A_{n_k})$. Следовательно, можно предположить, что $y_k \in A_{n_k}$. Тогда $\tau(y_k x_{n_k})=\varphi(y_k)$. Далее, так как $\|y_k\|_1=\tau(|y_k|) \longrightarrow 0$, то по лемме $y_k \longrightarrow 0$ $*$ - слабо. В то же время $\lim\limits_{k\to\infty} \tau(y_k x_{n_k})=\lim\limits_{k\to\infty} \varphi(y_k) \neq 0$, что противоречит $*$ - слабой непрерывности φ на $\mathcal{B}$.

Обратно, если $\{x_n\}$ равномерно интегрируемый мартингал, то по теореме 3.3 существует $x \in L_1(\tau)$, что $x_n=M(x/A_n)$. Тогда $\varphi(y)=\tau(xy)$ нормальный (т.е. $*$ - слабо непрерывный [39]) функционал на A соответствующий мартингалу $\{x_n\}$.

Замечания.

I. Норма функционала φ, соответствующего мартингалу $\{x_n\}$ равна $\sup\limits_n \|x_n\|_1$, так как из предложения 4.I видно, что $\|\varphi\| \leq \sup_n \|x_n\|_1$ и если $x_n = |x_n| s_n$ - полярное разложение элемента x_n, то $\varphi(s_n) = \tau(x_n s_n) = \tau(|x_n|) = \|x_n\|_1$, причем $\|s_n\| = 1$.

2. Если $\{x_n\}$ неотрицательный мартингал, то он очевидно, L_1 - ограничен (т.к. $\|x_{n+1}\|_1 = \tau(x_{n+1}) = \tau(x_{n+1}\mathbb{1}) = \tau(x_n \mathbb{1}) = \|x_n\|_1$) и ему соответствует положительный функционал из $\mathcal{B}_u^*$.

3. Равномерно интегрируемые мартингалы находятся во взаимно однозначном соответствии с $L_1(\tau)$. Следовательно, существует взаимно однозначное соответствие между $L_1(\tau)$ и $\mathcal{B}_m^*$ задаваемое как $x \Longleftrightarrow \varphi$, где $\varphi(y) = \tau(xy)$, т.е. $\varphi = \varphi_x / \mathcal{B}$ и которое является линейной изометрией.

П р е д л о ж е н и е 4.2. $\mathcal{B}_u^*$ и $\mathcal{B}_m^*$ - замкнутые по норме линейные подпространства $\mathcal{B}^*$. Если для $x \in \mathcal{B}$, $\psi \in \mathcal{B}^*$ мы положим

$$(R_x \psi) = \psi(xy),$$

$$(U_x \psi)(y) = \psi(U_x y),$$

то $\mathcal{B}_u^*$ и $\mathcal{B}_m^*$ - инвариантны относительно всех R_x и U_x для $x \in \mathcal{B}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, $\mathcal{B}_u^*$ и $\mathcal{B}_m^*$ линейные подпространства $\mathcal{B}^*$. Подпространство $\mathcal{B}_m^*$ замкнуто по норме, так как множество всех нормальных функционалов на произвольной JBW - алгебре по норме замкнуто [39]. $\mathcal{B}_m^*$ - замкнуто по норме в $\mathcal{B}_u^*$.

В самом деле, если $\psi \in \overline{\mathcal{B}_m^*}$, то для любого $\delta > 0$

существует $\varphi \in \mathcal{B}_m^*$ такой, что $\|\varphi - \psi\| \le \delta$.

Тогда

а) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \sup\{|\psi(y)| : y \in \bigcup\limits_n A_n, \|y\| \le 1, \|y\|_1 \le \varepsilon\} \le$

$$\le \lim_{\varepsilon \to 0} \sup\{|\varphi(y)| : y \in \bigcup_n A_n, \|y\| \le 1, \|y\|_1 \le \varepsilon\} +$$
$$+ \lim_{\varepsilon \to 0} \sup\{|(\varphi - \psi)(y)| : y \in \bigcup_n A_n, \|y\| \le 1, \|y\|_1 \le \varepsilon\} \le$$
$$\le 0 + \|\varphi - \psi\| \, \|y\| \le \delta .$$

В силу произвольности δ имеем, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup\{|\psi(y)| : y \in \bigcup_n A_n, \|y\| \le 1, \|y\|_1 \le \varepsilon\} = 0 .$$

б) Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно $\delta \le \frac{\varepsilon}{2}$. Для $\varphi \in \mathcal{B}_m^*$ существует идемпотент $e \in \mathcal{M}_\tau$ такой, что

$$|\varphi(U_{e^\perp} y)| < \frac{\varepsilon}{2}, \ y \in A, \ \|y\| \le 1,$$

Тогда

$$|\psi(U_{e^\perp} y)| \le \|\varphi - \psi\| \, \|y\| + |\varphi(U_{e^\perp} y)| \le \delta + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

для $y \in A, \ \|y\| \le 1$. То есть $\psi \in \mathcal{B}_m^*$.

Инвариантность $\mathcal{B}_m^*$ относительно R_x и U_x вытекает из раздельной непрерывности умножения в $*$ - слабой топологии в произвольной JBW - алгебре [19].

Так как $U_x = 2R_x^2 - R_{x^2}$, то достаточно проверить инвариантность $\mathcal{B}_u^*$ относительно R_x.

Оператор R_x является линейным непрерывным оператором на $\mathcal{B}$, $\|R_x\| = \|x\|$ и зависит от x линейно.

Поэтому достаточно показать инвариантность относительно R_x для $x \in \bigcup_n A_n$. Если $x \in A_{n_0}$, $\varphi \in \mathcal{B}^*_u$, то $xA_n \subset A_{n_0+n}$ и $R_x\varphi/A_n$ – $*$ - слабо непрерывно в силу $*$ - слабой непрерывности φ/A_{n_0+n} и $*$ - слабой непрерывности умножения по каждому аргументу в отдельности. Предложение доказано.

П р е д л о ж е н и е 4.3. Пусть

$$\widetilde{\mathcal{B}}_u = \{a \in \widetilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}^{**} : a(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{B}^*_u\},$$

$$\widetilde{\mathcal{B}}_m = \{a \in \widetilde{\mathcal{B}} : a(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{B}^*_m\}.$$

Тогда: а) $\widetilde{\mathcal{B}}_m \supset \widetilde{\mathcal{B}}_u$, $\widetilde{\mathcal{B}}_m$ и $\widetilde{\mathcal{B}}_u$ $*$ - слабо замкнутые йордановы идеалы в $\widetilde{\mathcal{B}}$.

б) Существует три попарно ортогональных центральных идемпотентов P_m, P_s и P_e в $\widetilde{\mathcal{B}}$ такие, что

$$\widetilde{\mathcal{B}}_m = (P_s + P_e)\widetilde{\mathcal{B}},$$

$$\widetilde{\mathcal{B}}_u = P_e \widetilde{\mathcal{B}},$$

$$\widetilde{\mathcal{B}} = (P_m \widetilde{\mathcal{B}}) \oplus (P_s \widetilde{\mathcal{B}}) \oplus (P_e \widetilde{\mathcal{B}}).$$

в) Если элементы $\mathcal{B}^*$ рассматривать как нормальные функционалы на $\widetilde{\mathcal{B}}$, то

$$\mathcal{B}^*_m = \{\varphi : \varphi = 0 \quad \text{на} \quad (P_s\widetilde{\mathcal{B}}) \oplus (P_e\widetilde{\mathcal{B}})\},$$

$$\mathcal{B}^*_u = \{\varphi : \varphi = 0 \quad \text{на} \quad P_e\widetilde{\mathcal{B}}\}.$$

г) Положим

$$\mathcal{B}^*_s = \{\varphi : \varphi = 0 \quad \text{на} \ (P_m\widetilde{\mathcal{B}}) \oplus (P_e\widetilde{\mathcal{B}})\},$$

и назовем функционалы из $\mathcal{B}_s^*$ сингулярными, а соответствующие L_1 - ограниченные мартингалы сингулярными мартингалами. Тогда $\mathcal{B}_s^*$ замкнутое подпространство $\mathcal{B}^*$ инвариантное относительно всех R_x , $x\in\mathcal{B}$.

д) $\mathcal{B}_u^*$ есть прямая сумма $\mathcal{B}_m^*$ и $\mathcal{B}_s^*$. Если $\varphi_1\in\mathcal{B}_m^*, \varphi_2\in\mathcal{B}_s^*$, то $\|\varphi_1+\varphi_2\|=\|\varphi_1\|+\|\varphi_2\|$. Из положительности $\varphi_1+\varphi_2$ вытекает положительность φ_1 и φ_2 .

е) Отображение $x\longrightarrow p_m x$ из $\mathcal{B}$ на $p_m\widetilde{\mathcal{B}}$ можно продолжить до изоморфизма между A и $p_m\widetilde{\mathcal{B}}$.

Доказательство.

а) Так как элементы $\mathcal{B}^*$ могут быть рассмотрены как нормальные функционалы на $\widetilde{\mathcal{B}}$, то

$$\widetilde{\mathcal{B}}_u=\{a\in\widetilde{\mathcal{B}}:\varphi(a)=0\quad\forall\quad\varphi\in\mathcal{B}_u^*\}.$$

Если $\{a_\alpha\}\subset\widetilde{\mathcal{B}}_u$ и $a_\alpha\longrightarrow a$ $*$ - слабо, то из $\varphi(a_\alpha)=0$ и нормальности φ вытекает, что $\varphi(a)=0$, т.е. $a\in\widetilde{\mathcal{B}}_u$, значит $\widetilde{\mathcal{B}}_u$ $*$ - слабо замкнутое подмножество $\widetilde{\mathcal{B}}$. Аналогично, $\widetilde{\mathcal{B}}_m$ является $*$ - слабо замкнутым подмножеством $\widetilde{\mathcal{B}}$. Нужно лишь доказать, что $\widetilde{\mathcal{B}}_u$ и $\widetilde{\mathcal{B}}_m$ - идеалы в JBW - алгебре $\widetilde{\mathcal{B}}$.
В силу $*$ - слабой непрерывности умножения в $\widetilde{\mathcal{B}}$ [19] достаточно доказать, что $x\widetilde{\mathcal{B}}_m\subset\widetilde{\mathcal{B}}_m$ для любого $x\in\mathcal{B}$ (аналогично для $\widetilde{\mathcal{B}}_u$). Для $a\in\widetilde{\mathcal{B}}$, $x\in\mathcal{B}$ по определению произведения Аренса [19] в $\widetilde{\mathcal{B}}=\mathcal{B}^{**}$ имеем

$xa=R_x^* a$. Поэтому

$$(xa)(\varphi)=(R^*_x a)(\varphi)=<R^*_x a,\varphi>=<a,R_x\varphi>=a(R_x\varphi).$$

Таким образом, если $a\in\widetilde{\mathcal{B}}_m$, $\varphi\in\mathcal{B}^*_m$, то в силу инвариантности $\mathcal{B}^*_m$ относительно R_x (предложение 4.2) $R_x\varphi\in\mathcal{B}^*_m$, т.е. $(xa)(\varphi)=a(R_x\varphi)=0$.

Следовательно, $xa\in\widetilde{\mathcal{B}}_m$, т.е. $\widetilde{\mathcal{B}}_m$ - идеал. Аналогично, идеалом является $\widetilde{\mathcal{B}}_u$.

б) Так как $\widetilde{\mathcal{B}}_u$ и $\widetilde{\mathcal{B}}_m$ $*$ - слабо замкнутые (и значит правильные) идеалы в JBW - алгебре (а значит в OJ - алгебре) $\widetilde{\mathcal{B}}$, то по теореме 6 работы [3] существуют центральные идемпотенты p_ℓ и q, что $\widetilde{\mathcal{B}}_u=p_\ell\widetilde{\mathcal{B}}$, $\widetilde{\mathcal{B}}_m=q\widetilde{\mathcal{B}}$. Так как $\widetilde{\mathcal{B}}_u\subset\widetilde{\mathcal{B}}_m$, то очевидно, $q\geqslant p_\ell$. Тогда искомыми идемпотентами являются p_ℓ, $p_m=q-p_\ell$, $p_s=1\!\!1-q$.

в) В силу предложения 4.2 $\mathcal{B}^*_m$ и $\mathcal{B}^*_u$ замкнутые по норме линейные подпространства $\mathcal{B}^*$. По теореме Хана - - Банаха они замкнуты в $\sigma(\mathcal{B}^*,\mathcal{B}^{**})$ - топологии. По теореме о биполяре эти множества совпадают со своими биполярами. Но полярой $\mathcal{B}^*_u$ (соотв. $\mathcal{B}^*_m$) в $\mathcal{B}^{**}=\widetilde{\mathcal{B}}$ является $\widetilde{\mathcal{B}}_u$ (соотв. $\widetilde{\mathcal{B}}_m$), а полярой $\widetilde{\mathcal{B}}_u$ (соотв. $\widetilde{\mathcal{B}}_m$) является множество

$$\{\varphi\in\mathcal{B}^*\mid\varphi=0 \text{ на } \widetilde{\mathcal{B}}_u=p_\ell\widetilde{\mathcal{B}}\}$$

(соотв. $\{\varphi\in\mathcal{B}^*\mid\varphi=0 \text{ на } \widetilde{\mathcal{B}}_m=(p_s\widetilde{\mathcal{B}})\oplus(p_\ell\widetilde{\mathcal{B}})\}$).

г) Замкнутость $\mathcal{B}^*_s$ очевидно, а инвариантность $\mathcal{B}^*_s$ относительно $R_x, x\in\mathcal{B}$ вытекает из инвариантности $\mathcal{B}^*_m$ и $\mathcal{B}^*_u$.

д) То что $\mathcal{B}^*_u$ есть прямая сумма $\mathcal{B}^*_m$ и $\mathcal{B}^*_s$ вытекает из определения и свойства б). Отсюда легко следуют остальные свойства.

е) Как отмечалось в замечании 3 после предложения 4.I, существует взаимно однозначное соответствие, сохраняющее норму, между $L_1(\tau)$ и $\mathcal{B}^*_m$. Этот изоморфизм порождает изоморфизм между их сопряженными, которые соответственно совпадают с $A=[L_1(\tau)]^*$ и $P_m\tilde{\mathcal{B}}=P_m\mathcal{B}^{**}$.

Полученный изоморфизм и будет искомым. Предложение доказано.

Так как всякий нормальный функционал на JBW - алгебре можно представить в виде разности двух положительных нормальных функционалов, то из предложений 4.I, 4.3 вытекает следующий результат.

С л е д с т в и е 4.I (разложение Крикеберга). Всякий L_1 - ограниченный мартингал $\{x_n\}$ можно представить в виде $x_n=x^1_n-x^2_n$, где $\{x^1_n\}$ и $\{x^2_n\}$ положительные мартингалы. Если $\{x_n\}$ сингулярный мартингал, то $\{x^1_n\}$ и $\{x^2_n\}$ также могут быть выбраны сингулярными. Здесь $\|x_n\|_1=\tau(x^1_n)+\tau(x^2_n)$.

П р е д л о ж е н и е 4.4. Пусть $\{x_n\}$ - положительный сингулярный мартингал, $\varphi\in\mathcal{B}^*_s$ - функционал соответствующий ему. Тогда существует последовательность $\{q_n\}$ идемпотентов в $\bigcup\limits_m A_m$ такая, что

$$\tau(q^{\perp}_n)\longrightarrow 0,\quad \varphi(q_n)\longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad n\longrightarrow\infty .$$

Предварительно докажем следующую лемму.

Л е м м а 4.2. Пусть $\{x_n\}$ и φ как в предложении 4.4, ρ - некоторое нормальное состояние на A .

Тогда существует последовательность идемпотентов $\{e_n\}$ в $\bigcup_m A_m$ такая, что

$$\rho(e_n^{\perp}) \longrightarrow 0, \quad \varphi(e_n) \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \longrightarrow \infty .$$

Доказательство. Алгебра $\bigcup_m A_m$ плотна по норме в $\mathcal{B} (= \overline{\bigcup_m A_m})$, а в JB - алгебре $\mathcal{B}$ единичный шар сильно плотен в единичном шаре обертывающей JBW - алгебры $\widetilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}^{**}$ (в силу предложения 3.9 из [19]). Рассмотрим идемпотент $p_m \in \widetilde{\mathcal{B}}$ из предложения 4.3. Так как $\|p_m\| \le 1$, то в силу сказанного выше существует сеть $\{y_\alpha\} \subset \bigcup_m A_m$ такая, что $\|y_\alpha\| \le 1$, которая сильно сходится к p_m. Положим $a_\alpha = y_\alpha^2$, тогда очевидно, $0 \le a_\alpha \le \mathbb{1}$, $a_\alpha \in \bigcup_m A_m$ и в силу леммы 3.5 из [19] $a_\alpha \longrightarrow p_m$ сильно, и значит, слабо.

В частности, $\rho(a_\alpha) \longrightarrow \rho(p_m)$ и $\varphi(a_\alpha) \longrightarrow \varphi(p_m) = 0$ (т.к. $\varphi \in \mathcal{B}_s^*$). Так как $\rho \in \mathcal{B}_m^*$, то $\rho(p_s) = \rho(p_\ell) = 0$ и поэтому $\rho(p_m) = \rho(\mathbb{1} - p_s - p_\ell) = 1$.

Итак $\rho(a_\alpha) \longrightarrow 1$, $\varphi(a_\alpha) \longrightarrow 0$. Очевидно, можно выбрать последовательность $\{a_n\} \subset \{a_\alpha\}$ такую, что $\rho(a_n) \to 1$, $\varphi(a_n) \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$.

Пусть $\{e_\lambda^{(n)}\}$ спектральное семейство элемента a_n $(n = 1, 2, \dots)$. Положим

$$e_n = \int_{\frac{1}{2}}^{1} de_\lambda^{(n)} = e_1^{(n)} - e_{1/2}^{(n)} .$$

Тогда ясно, что $0 \leq \frac{1}{2} e_n \leq a_n$ и $e_n + \mathbb{1} \geq 2a_n$ т.е. $0 \leq e_n \leq 2a_n$ и $2a_n - \mathbb{1} \leq e_n \leq \mathbb{1}$. Следовательно, $1 \geq \rho(e_n) \geq 2\rho(a_n) - 1 \to 1$ или $\rho(e_n^{\perp}) \to 0$ и $0 \leq \varphi(e_n) \leq 2\varphi(a_n) \to 0$. Лемма доказана.

Доказательство предложения 4.4. Так как след τ на A_1 - полуконечен, то существует идемпотент $q \in A_1$ такой, что $\tau(q) < +\infty$ и $\varphi(\mathbb{1} - q) < \frac{1}{2}\varepsilon$ (для любого $\varepsilon > 0$).

Рассмотрим JBW - подалгебру $U_q A$ с нормальным состоянием $\tau_q = \tau /_{U_q A}$. По предложению 4.3 г), $\{U_q x_n\}$ - тоже сингулярный мартингал и ему соответствует функционал $\varphi' = U_q \varphi \in \mathcal{B}_S^*$. По лемме 4.2 существует последовательность $\{e_n\}$ идемпотентов в $U_q A$ такая, что $\tau_q(e_n^{\perp}) \to 0$ и $\varphi(U_q e_n) \to 0$. Напомним, что $q_n \leftrightarrow e_n \, (n = 1, 2, \ldots)$, поэтому $q e_n$ - идемпотент в $\bigcup\limits_m A_m$. Положим $q_n = \mathbb{1} - (q - q e_n)$, тогда

$$\tau(q_n^{\perp}) = \tau(q - q e_n) = \tau_q(e_n^{\perp}) \to 0 \quad \text{при } n \to \infty .$$

Далее, так как τ - след, то

$$\varphi(q e_n) = \varphi(U_q e_n) \longrightarrow 0 \quad \text{при } n \longrightarrow \infty$$

Следовательно

$$\varphi(q_n) = \varphi(\mathbb{1} - q + q e_n) = \varphi(\mathbb{1} - q) + \varphi(q e_n) < \frac{1}{2}\varepsilon + \varphi(q e_n) \longrightarrow \frac{1}{2}\varepsilon , \quad n \to \infty .$$

В силу произвольности ε имеем, $\varphi(q_n) \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$. Предложение доказано.

Предложение 4.5. Пусть $\{x_n\}$ - положительный мартингал. Для любого положительного $\varepsilon > 0$ существует идемпотент $q \in A$, такой, что $U_q x_n \in A$,

$$\|U_q x_n\| \leq \varepsilon \;\; \forall n = 1, 2, \ldots \text{ и } \tau(\mathbb{1} - q) \leq \varepsilon^{-1} \tau(x_1)$$

Доказательство. Положим $q_0 = \mathbb{1}$ и по индукции для $n \geq 1$:

$$y_n = U_{q_{n-1}} x_n \quad , \; q_n = e_\varepsilon^{(n)} q_{n-1} ,$$

где $e_\varepsilon^{(n)} = \int_0^\varepsilon d e_\lambda^{(n)}$ (здесь $\{e_\lambda^{(n)}\}_{\lambda \geq 0}$ - спектральное семейство элемента $y_n \geq 0$, т.к. $x_n \geq 0$).

Докажем по индукции, что q_n - идемпотент, принадлежащий A_n. Для $q_0 = \mathbb{1}$ очевидно. Допустим q_{n-1} - идемпотент в A_{n-1}. Так как

$$y_n = U_{q_{n-1}} x_n \in J_1(q_{n-1}),$$

то $y_n \longleftrightarrow q_{n-1}$ по теореме I.3 в [5]. Поэтому $e_\varepsilon^{(n)} \longleftrightarrow q_{n-1}$. Следовательно, так как произведение совместных идемпотентов - идемпотент, то $q_n = e_\varepsilon^{(n)} q_{n-1}$ является идемпотентом и т.к. $e_\varepsilon^{(n)} \in A_n$ (т.к. $y_n \in L_1(\tau_n)$ потому, что $q_{n-1} \in A_{n-1} \subset A_n$, $x_n \in L_1(\tau_n)$) и $q_{n-1} \in A_{n-1}$, то $q_n \in A_n$. При этом $q_n = e_\varepsilon^{(n)} q_{n-1} = e_\varepsilon^{(n)} \wedge q_{n-1} \leq q_{n-1}$, т.е. $\{q_n\}$ убывающая последовательность идемпотентов. Положим $q=\inf\limits_n q_n$ и докажем, что это и есть искомый идемпотент. Имеем

$$0\le U_q x_n=U_qU_{q_n}U_{q_{n-1}}x_n=U_q U_{e_\varepsilon^{(n)}}U_{q_{n-1}}U_{q_{n-1}}x_n=$$

$$=U_qU_{e_\varepsilon^{(n)}}U_{q_{n-1}}x_n=U_qU_{e_\varepsilon^{(n)}}y_n\le U_q\varepsilon\mathbb{1}\le\varepsilon q .$$

(Здесь мы несколько раз воспользовались тождеством (66) [30]).
Следовательно, $U_q x_n$ ограниченный элемент, т.е.

$$U_q x_n\in A \quad \text{и} \quad \|U_q x_n\|\le\varepsilon \quad \forall\ n=1,2,\dots \quad .$$

Далее,

$$\tau(x_1)=\tau(x_n)=\tau(x_n\mathbb{1})=\tau\bigl(x_n[q_n+(q_{n-1}-q_n)+$$

$$+(q_{n-2}-q_{n-1})+\dots+(q_1-q_2)+(q_0-q_1)]\bigr)=\tau(x_nq_n)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\tau(x_n(q_{k-1}-q_k))=(\text{т.к. } \tau \text{ - след})=\tau(U_{q_n}x_n)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\tau([M(x_n|A_k)(q_{k-1}-q_k)]),\ \text{т.к. } q_{k-1}-q_k\in$$

$\in A_{k-1}-A_k\subset A_k$. В силу $U_{q_n}x_n\geqslant 0$ и $M(x_n|A_k)=x_k$ имеем

$$\tau(x_1)\geqslant\sum_{k=1}^{n}\tau(x_k(q_{k-1}-q_k))=\sum_{k=1}^{n}\tau(x_k(U_{q_{k-1}}q_{k-1}-$$

$$-U_{q_{k-1}}q_k))=\sum_{k=1}^{n}\tau(x_kU_{q_{k-1}}(q_{k-1}-q_k)).\ \text{Так как}$$

τ - след, то оператор $U_{q_{k-1}}$ можно с $q_{k-1} - q_k$ перебросить на x_k в силу теоремы 2.7 главы I, т.е.

$$\tau(x_1) \geq \sum_{k=1}^{n} \tau((U_{q_{k-1}} x_k)(q_{k-1} - q_k)) = \sum_{k=1}^{n} \tau(y_k(q_{k-1} - q_k)).$$

Но

$$y_k(q_{k-1} - q_k) = y_k(q_{k-1} - e_\varepsilon^{(k)} q_{k-1}) = y_k[q_{k-1}(\mathbb{1} - e_\varepsilon^{(k)})] =$$

$= y_k[q_{k-1} \int_\varepsilon^\infty d e_\lambda^{(k)}]$. Так как $y_k \longleftrightarrow q_{k-1}$, то

$$y_k[q_{k-1} \int_\varepsilon^\infty d e_\lambda^{(k)}] = q_{k-1}[y_k \int_\varepsilon^\infty d e_\lambda^{(k)}] = U_{q_{k-1}}(y_k \int_\varepsilon^\infty d e_\lambda^{(k)}) \geq$$

$$\geq U_{q_{k-1}}(\varepsilon \int_\varepsilon^\infty d e_\lambda^{(k)}) = \varepsilon U_{q_{k-1}}(\mathbb{1} - e_\varepsilon^{(k)}) = \varepsilon q_{k-1}(\mathbb{1} - e_\varepsilon^{(k)}) =$$

$= \varepsilon(q_{k-1} - e_\varepsilon^{(k)} q_{k-1}) = \varepsilon(q_{k-1} - q_k)$. Следовательно,

$$\tau(x_1) \geq \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \tau(q_{k-1} - q_k) = \varepsilon \tau(\sum_{k=1}^{n}(q_{k-1} - q_k)) = \varepsilon \tau(\mathbb{1} - q_k) \to$$

$\longrightarrow \varepsilon \tau(\mathbb{1} - q)$ при $k \longrightarrow \infty$, т.е. $\tau(\mathbb{1} - q) \leq \varepsilon^{-1} \tau(x_1)$.

Предложение доказано.

О п р е д е л е н и е 4.2. Последовательность $\{x_n\}$ в $\hat{A}$ назовем сходящейся к элементу $x \in \hat{A}$ почти всюду (п.в.) (соответственно S - почти всюду), если для любого $\varepsilon > 0$ существует идемпотент $q \in \nabla$ такой, что $\tau(\mathbb{1} - q) < \varepsilon$ и

$U_q(x_n - x) \in A$, $n=1,2,\dots$, $\|U_q(x_n - x)\| \to 0$ при $n \to \infty$ (соответственно,

$$U_q(x_n - x)^2 \in A \text{ для всех } n \text{ и } \|U_q(x_n - x)^2\| \to 0, n \to \infty).$$

З а м е ч а н и я. 4. Если алгебра A ассоциативна, то $\hat{A}$ изоморфна алгебре $L_0(S, m)$ всех измеримых функций на пространстве (S, m) с полуконечной мерой. В этом случае понятия сходимости почти всюду и S - почти всюду совпадают и означают обычную сходимость функций почти всюду.

5. Если JBW - алгебра A специальна и является эрмитовой частью алгебры фон Неймана, то условие $\|U_q(x_n - x)^2\| \to 0$ означает, что $\|q \cdot (x_n - x)^2 \cdot q\| \to 0$, т.е. $\|(x_n - x) \cdot q\| \to$ $\to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, в этом случае сходимость S - почти всюду совпадает со сходимостью операторов почти равномерно в смысле [35], [38], в то время как сходимость п.в. означает, что $\|q \cdot (x_n - x) \cdot q\| \to 0$ [26].

Т е о р е м а 4.I. Пусть $\{x_n\}$ — L_1 - ограниченный мартингал. Тогда существует элемент $x \in L_1(\tau)$ такой, что $x_n \to x$ почти всюду. Такой элемент единственен и $\{x_n - M(x/A_n)\}$ является сингулярным мартингалом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу предложения 4.3 (д) всякий L_1 - ограниченный мартингал есть сумма равномерно интегрируемого и сингулярного мартингалов. Так как для любых идемпотентов $q_1, q_2 \in A$ имеем

$$\tau((q_1 \wedge q_2)^{\perp}) = \tau((\mathbb{1}-q_1) \vee (\mathbb{1}-q_2)) \le \tau(q_1^{\perp}) + \tau(q_2^{\perp}),$$

то утверждение теоремы достаточно доказать для двух случаев – равномерно интегрируемого и сингулярного. Для равномерно интегрируемого мартингала $\{x_n\}$ существует $x \in L_1(\tau)$, что

$x_n = M(x/A_n)$ (теорема 3.3).

В силу разложения Крикеберга сингулярный мартингал можно считать положительным (опять же пользуясь свойством следа τ:

$\tau((q_1 \wedge q_2)^{\perp}) \le \tau(q_1^{\perp}) + \tau(q_2^{\perp})$).

Итак нужно доказать следующие два утверждения:

а) Для любого $x \in L_1(\tau)$, $M(x/A_n) \to x$ почти всюду;

б) Для любого сингулярного положительного мартингала

$\{x_n\}$ $x_n \to 0$ почти всюду.

Нетрудно видеть, что из сходимости почти всюду следует сходимость по мере. Поэтому единственность предела почти всюду вытекает из единственности предела по мере.

Зафиксируем произвольную возрастающую последовательность положительных чисел $a_k \to +\infty$.

Доказательство а) По теореме 3.3

$\|M(x/A_n) - x\|_1 \to 0$. Для данного $\varepsilon > 0$ можно выбрать возрастающую последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ такую, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \|M(x/A_{n_k}) - x\|_1 < \varepsilon .$$

Пользуясь разложением Крикеберга напишем

$$M(x/A_{n_k}) - x = y_k - z_k, \text{ где } y_k \geqslant 0, \ z_k \geqslant 0 \text{ и}$$

$$\|y_k\|_1 + \|z_k\|_1 = \|M(x/A_{n_k}) - x\|_1.$$

В силу предложения 4.5, существуют идемпотенты q'_k и q''_k в A такие, что

$$\|U_{q'_k} M(y_k/A_n)\| \leq a_k^{-1}, \ \tau(\mathbb{1} - q'_k) \leq a_k \tau(y_k);$$

$$\|U_{q''_k} M(z_k/A_n)\| \leq a_k^{-1}, \ \tau(\mathbb{1} - q''_k) \leq a_k \tau(z_k).$$

Положим $q_k = q'_k \wedge q''_k$, $q = \inf\limits_k q_k$. Тогда

$$\tau(\mathbb{1} - q_k) \leq \tau(\mathbb{1} - q'_k) + \tau(\mathbb{1} - q''_k) \leq a_k(\tau(y_k) +$$

$$+ \tau(z_k)) = a_k(\|y_k\|_1 + \|z_k\|_1) = a_k \|M(x/A_{n_k}) - x\|_1.$$

Поэтому

$$\tau(\mathbb{1} - q) = \tau(\sup(\mathbb{1} - q_k)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \tau(\mathbb{1} - q_k) \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \|M(x/A_{n_k}) - x\|_1 < \varepsilon.$$

Следовательно, при $n \geqslant n_k$ имеем,

$$\|U_q[M(x/A_{n_k}) - M(x/A_n)]\| = \|U_q[M(M(x/A_{n_k}) - x/A_n)]\| =$$

$$= \|U_q(M(y_k - z_k/A_n))\| = \|U_q[M(y_k/A_n) - M(z_k/A_n)]\| \leq$$

$$\leq \|U_q M(y_k/A_n)\| + \|U_q M(z_k/A_n)\| = \|U_q U_{q'_k} M(y_k/A_n)\| +$$

$$= \|U_q U_{q''_k} M(z_k/A_n)\| \leq \|U_{q'_k} M(y_k/A_n)\| + \|U_{q''_k} M(z_k/A_n)\| \leq$$

$$\leq 2\alpha_k^{-1},$$

т.е. $\{U_q(M(x/A_1) - M(x/A_n))\}$ – фундаментальная по норме последовательность в A. В силу полноты A она сходится по норме в A. Но $M(x/A_n) \longrightarrow x$ по L_1 – норме (при $n \longrightarrow \infty$) т.е. $M(x/A_1) - M(x/A_n)$ L_1-сходится к $M(x/A_1) - x$ при $n \to \infty$. Так как $\|ab\|_1 \leq \|a\|\|b\|_1$ для $a \in A$, $b \in L_1(\tau)$ по лемме 4.3 главы I, то $U_q(M(x/A_1) - M(x/A_n))$ L_1- сходится к $U_q(M(x/A_1) - x)$. Следовательно, $U_q(M(x/A_1) - M(x/A_n))$ обязано сходится по норме к $U_q(M(x/A_1) - x)$. Значит,

$$\|U_q(M(x/A_n) - x)\| = \|U_q[(M(x/A_1) - x) - (M(x/A_1) - M(x/A_n))]\| \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty.$$

б) Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. В силу предложения 4.4, существует последовательность идемпотентов $\{q_n\}$ в $\bigcup_m A_m$ такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi(q_k) < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \tau(\mathbb{1} - q_k) < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

где $\varphi \in \mathcal{B}_S^*$ – функционал соответствующий сингулярному мартингалу $\{x_n\}$. Пусть $q_k \in A_{n_k}$. Применив предложение 4.5 к положительному мартингалу $\{U_{q_k} x_n\}_{n \geq n_k}$ и числу a_k^{-1}, получим идемпотент $q_k' \in A$, для которого

$$\tau(\mathbb{1}-q_k') \leq a_k \tau(U_{q_k} x_{n_k}) =$$

$$= a_k \tau(q_k x_{n_k}) = a_k \varphi(q_k),$$

в силу свойства следа τ и определения функционала φ. Кроме того

$$\| U_{q_k'} U_{q_k} x_n \| \leq a_k^{-1} \quad \forall\ n \geq n_k .$$

Положим $q_k'' = q_k \wedge q_k'$, $q = \inf\limits_k q_k''$. Тогда

$$\tau(\mathbb{1}-q) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \tau(\mathbb{1}-q_k'') \leq \sum_{k=1}^{\infty} [\tau(\mathbb{1}-q_k) + \tau(\mathbb{1}-q_k')] \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \tau(\mathbb{1}-q_k) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi(q_k) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon .$$

Далее, для $n \geq n_k$ имеем

$$a_k^{-1} \geq \| U_{q_k'} U_{q_k} x_n \| \geq \| U_q U_{q_k'} U_{q_k} x_n \| =$$

$$= \| U_q U_{q_k'} x_n \| = \| U_q x_n \|,$$

т.е. при $n \geq n_k$ $\tau(\mathbb{1}-q) < \varepsilon$ и $\| U_q x_n \| \leq a_k^{-1} \longrightarrow 0$ при $k \longrightarrow \infty$. Теорема доказана.

II. Мартингалы в $L_2(\tau)$.

Теорема 4.2. Пусть $\{x_n\}$ мартингал в $L_2(\tau)$ и $\sup_n \|x_n\|_2 < +\infty$. Тогда $\{x_n\}$ S - почти всюду сходится к некоторому элементу $x \in L_2(\tau)$ и $M(x/A_n) = x_n$ для всех $n = 1, 2, \ldots$.

Доказательству теоремы предпошлем два предложения.

Предложение 4.6. Пусть $\{x_n\}$ - мартингал в $L_2(\tau)$ и $x_n = M(x/A_n)$, где $x \in L_2(\tau)$. Тогда последовательность $\{x_n^2\}$ удовлетворяет следующим условиям

1) $M(x_{n+1}^2/A_n) \geqslant x_n^2$;

2) $\tau(x_n^2) \leq \tau(x^2) = \|x\|_2^2$.

Доказательство. Так как $(x_{n+1} - x_n)^2 \geqslant 0$, то

$$0 \leq M((x_{n+1} - x_n)^2/A_n) = M(x_{n+1}^2/A_n) - 2M(x_{n+1}x_n/A_n) +$$

$$+ M(x_n^2/A_n) = M(x_{n+1}^2/A_n) - 2x_n M(x_{n+1}/A_n) + x_n^2 =$$

$$= M(x_{n+1}^2/A_n) - 2x_n^2 + x_n^2 = M(x_{n+1}^2/A_n) - x_n^2.$$

Отсюда, для любого $n = 1, 2, \ldots$,

$$M(x_{n+1}^2/A_n) \geqslant x_n^2.$$

Далее, так как $(x - x_n)^2 \geqslant 0$, то

$$0 \leq M((x-x_n)^2/A_n) = M(x^2/A_n) - 2x_n M(x/A_n) +$$

$$+x_n^2 = M(x^2/A_n) - x_n^2.$$ Значит

$$M(x^2/A_n) \geq x_n^2,$$

т.е. $\tau(x_n^2) \leq \tau(M(x^2/A_n)) = \tau(x^2)$. Предложение доказано.

Предложение 4.7. Пусть $\{x_n\}$ - положительная последовательность с $M(x_{n+1}/A_n) \geq x_n$ такая, что $\sup\limits_n \tau(x_n) < +\infty$. Тогда, для любого $\varepsilon > 0$ существует идемпотент $q \in \nabla$ такой, что $U_q x_n \in A$, $\|U_q x_n\| \leq \varepsilon$ для всех $n = 1, 2, \dots$, и $\tau(\mathbb{1} - q) \leq \varepsilon^{-1} \sup\limits_n \tau(x_n)$.

Доказательство. Это предложение является обобщением предложения 4.5. Как и там положим $q_0 = \mathbb{1}$ и по индукции для $n \geq 1$: $y_n = U_{q_{n-1}} x_n$, $q_n = e_\varepsilon^{(n)} q_{n-1}$.

Как и там $q_n \leq q_{n-1}$ и для $q = \inf\limits_n q_n$ $\|U_q x_n\| \leq \varepsilon$.

Причем, для любого n

$$\sup_n \tau(x_n) \geq \tau(x_n) = \tau(x_n q_n) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \tau(x_n(q_{k-1} - q_k)) = \tau(U_{q_n} x_n) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \tau(M(x_n/A_k)(q_{k-1} - q_k)) \geq$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{n} \tau(M(x_n/A_k)(q_{k-1}-q_k)).$$ Так как τ след, то

$$\tau(M(x_n/A_k)(q_{k-1}-q_k)) = \tau(U_{q_{k-1}-q_k} M(x_n/A_k)) \geqslant$$

$$\geqslant \tau(U_{q_{k-1}-q_k} x_k) = \tau(x_k(q_{k-1}-q_k)).$$

Здесь мы воспользовались тем, что $M(x_n/A_k) \geqslant x_k$ $(n \geqslant k)$ и оператор $U_{q_{k-1}-q_k}$ положителен . Таким образом

$$\sup_n \tau(x_n) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \tau(x_k(q_{k-1}-q_k)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \tau(y_k(q_{k-1}-q_k)).$$

Далее, как и в предложении 4.5 $y_k(q_{k-1}-q_k) \geqslant \varepsilon(q_{k-1}-q_k)$, т.е. $\sup_n \tau(x_n) \geqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \tau(q_{k-1}-q_k) = \varepsilon\tau(\mathbb{1}-q_n)$,

т.е. $\tau(\mathbb{1}-q_n) \leq \varepsilon^{-1} \sup_n \tau(x_n)$. Так как $\tau(\mathbb{1}-q_n) \to$ $\to \tau(\mathbb{1}-q)$, то предложение доказано.

Доказательство теоремы 4.2. По теореме 3.4, существует $x \in L_2(\tau)$ такой, что $x_n = M(x/A_n)$ и $x_n \to x$ по L_2 - норме.

Пусть $\{a_k\}$ - последовательность положительных чисел такая, что $a_k \to +\infty$. Для данного $\varepsilon > 0$ выберем последовательность n_k натуральных чисел так, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \|x_{n_k} - x\|_2^2 < \varepsilon .$$

Рассмотрим мартингал $\{(x_{n_k} - x_n)\}_{n \geq n_k} = \{M(x_{n_k} - x/A_n)\}_{n \geq n_k}$. В силу предложения 4.6

$$M((x_{n_k} - x_{n+1})^2/A_n) \geq (x_{n_k} - x_n)^2$$

и

$$\tau((x_{n_k} - x_n)^2) \leq \tau((x_{n_k} - x)^2) = \|x_{n_k} - x\|_2^2 ,$$

т.е. $\sup_n \tau((x_{n_k} - x_n)^2) < +\infty$.

Применяя предложение 4.7 к последовательности $\{(x_{n_k} - x_n)^2\}_{n \geq n_k}$ и числу a_k^{-1} найдем идемпотент $q_k \in \nabla$ со свойствами:

$$\|U_{q_k}(x_{n_k} - x_n)^2\| \leq a_k^{-1} \quad \text{для } n \geq n_k$$

и

$$\tau(\mathbb{1} - q_k) \leq a_k \tau((x_{n_k} - x)^2) = a_k \|x_{n_k} - x\|_2^2 .$$

Положим $q = \inf_k q_k$, тогда очевидно

$$\|U_q(x_{n_k} - x_n)^2\| \leq a_k^{-1}$$

и

$$\tau(\mathbb{1} - q) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \tau(\mathbb{1} - q_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \|x_{n_k} - x\|_2^2 < \varepsilon .$$

Неравенство $\|U_q(x_{n_k}-x_n)^2\| \le a_k^{-1}$ означает, что

$$0 \le U_q(x_{n_k}-x_n)^2 \le a_k^{-1}\mathbb{1} \qquad (n \geqslant n_k).$$

В силу непрерывности умножения в $\hat{A}$ в топологии сходимости по мере по совокупности переменных и того, что $x_n \longrightarrow x$ по мере в последнем неравенстве, можно перейти к пределу по мере при $n \to \infty$ с учетом замкнутости конуса $\hat{A}^+$ в $\hat{A}$. Тогда

$$0 \le U_q(x_{n_k}-x)^2 \le a_k^{-1}\mathbb{1}.$$

Из очевидного неравенства $a^2+b^2 \geqslant 2ab$ для любых $a,b \in A$ имеем $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$. Следовательно, для любых $n \geqslant n_k$ имеем

$$0 \le U_q(x_n-x)^2 = U_q\left[(x_{n_k}-x)+(x_n-x_{n_k})\right]^2 \le$$

$$\le 2U_q\left[(x_{n_k}-x)^2+(x_n-x_{n_k})^2\right] =$$

$$= 2U_q(x_{n_k}-x)^2 + 2U_q(x_n-x_{n_k})^2 \le$$

$$\le 2a_k^{-1}\mathbb{1} + 2a_k^{-1}\mathbb{1} = 4a_k^{-1}\mathbb{1}, \qquad \text{т.е.}$$

$$\|U_q(x_n-x)^2\| \le 4a_k^{-1} \quad \text{при} \quad n \geqslant n_k.$$

Значит, $\tau(\mathbb{1}-q) < \varepsilon$ и $\|U_q(x_n-x)^2\| \longrightarrow 0$ при $n \to \infty$, т.е. $x_n \longrightarrow x$ S- почти всюду. Теорема доказана.

III. Мартингалы в A

Определение 4.3. Последовательность $\{x_n\}$ в A назовем сходящейся к $x \in A$ почти равномерно, если для любого нормального состояния ρ на A и $\varepsilon > 0$, существует идемпотент $q \in \nabla$ такой, что $\rho(\mathbb{1} - q) < \varepsilon$ и

$$\|U_q(x_n - x)\| \longrightarrow 0 \quad \text{при } n \longrightarrow \infty .$$

Теорема 4.3. Для любого $x \in A$

$$M(x/A_n) \longrightarrow x \text{ почти равномерно при } n \longrightarrow \infty .$$

Доказательство. Если $x \in A$ с $\tau(|x|) < +\infty$, то по теореме 4.1 $M(x/A_n) \longrightarrow x$ почти всюду.

Пусть $x \in A$ произвольный элемент, ρ - нормальное состояние и $\varepsilon > 0$ произвольно. Можно считать, что

$$\rho(y) = \tau(ay) \quad \forall\, y \in A,$$

для некоторого $a \in \mathfrak{M}_\tau$ с $\tau(a) = 1$, так как множество состояний такого вида плотно в пространстве нормальных состояний на A. Выберем идемпотент $p \in A_1$ с $\tau(p) < +\infty$ и $\rho(\mathbb{1} - p) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Это можно сделать в силу полуконечности следа τ на JBW - подалгебре A_1. Тогда $\tau(|U_p x|) < +\infty$, т.е. $U_p x \in \mathfrak{M}_\tau$ в силу того, что $\mathfrak{M}_\tau$- (йордановый) идеал в A. Опять же по теореме 4.1 $M(U_p x/A_n) \longrightarrow U_p x$ почти всюду, т.е. существует идемпотент $q \in \nabla$ такой, что $\tau(\mathbb{1} - q) < \frac{1}{2}\|a\|^{-1}\varepsilon$ и

$$\|U_q(M(U_p x/A_n)-U_p x)\|\longrightarrow 0 \quad \text{при } n\longrightarrow\infty .$$

Так как $p\in A_1\subset A$, то по свойству 3) у.м.о.,

$$\|U_q U_p(M(x/A_n)-x)\|\to 0 \quad \text{при } n\longrightarrow\infty .$$

Положим $e=p\wedge q$, тогда

$$\tau(p-e)=\tau(p-p\wedge q)=\tau(p\vee q-q)\leq$$
$$\leq\tau(\mathbb{1}-q)<\frac{1}{2}\|a\|^{-1}\varepsilon .$$

Здесь воспользовались тем, что идемпотенты $p-p\wedge q$ и $p\vee q-q$ эквивалентны через симметрию [20] . Следовательно,

$$\rho(\mathbb{1}-e)=\rho(\mathbb{1}-p)+\rho(p-e)<\frac{1}{2}\varepsilon+$$
$$+\tau(a(p-e))\leq\frac{1}{2}\varepsilon+\|a\|\tau(p-e)<\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon=\varepsilon .$$

Так как $e\leq p$ и $e\leq q$, то $e\longleftrightarrow p$ и $e\longleftrightarrow q$.Значит

$$\|U_e(x_n-x)\|=\|U_eU_qU_p(x_n-x)\|\leq\|U_qU_p(x_n-x)\|\to 0$$

при $n\longrightarrow\infty$, где $x_n=M(x/A_n)$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и я. 6. Случай JBW - алгебры с точным нормальным конечным следом подробно изучен Ш.А.Аюповым [10]. В частности, получены теоремы о сходимости мартингалов [6] (в среднем, почти всюду, S - почти всюду).

7. В случае, когда A является эрмитовой частью алгебры фон Неймана, из теоремы 4.1 вытекает предложение 3 работы [24], а теорема 4.3 является аналогом теоремы 2.4 в [31] .

ЛИТЕРАТУРА

I. Аюпов Ш.А., К теории частично упорядоченных йордановых алгебр. Доклады АН УзССР, 1979, № 8, с. 6-8.

2. Аюпов Ш.А., Спектральная теорема для OJ -алгебр. Доклады АН УзССР, 1979, № 9, с. 3-5.

3. Аюпов Ш.А., Топологические частично упорядоченные йордановы алгебры, УМН, 1980, т.35, вып.3 (213), с. 138-140.

4. Аюпов Ш.А., Нормальные состояния на OJB - алгебрах. Известия АН УзССР, серия физ.-мат.наук, 1980, № 3, с. 9-13.

5. Аюпов Ш.А., Усманов Ш.М., Порядок и топология в йордановых алгебрах. Деп. ВИНИТИ, № 4232-80, 78 с.

6. Аюпов Ш.А., Условные математические ожидания и мартингалы на йордановых алгебрах. Доклады АН УзССР, 1981, № 10, с.3-5.

7. Аюпов Ш.А., Эргодические теоремы для марковских операторов в йордановых алгебрах. I. Известия АН УзССР, серия физ.-мат.наук, 1982, № 3, с. 12-15.

8. Аюпов Ш.А., О конструкции йордановых алгебр самосопряженных операторов. Доклады АН СССР, 1982, т.367, № 3, с. 521-524.

9. Аюпов Ш.А., Интегрирование на йордановых алгебрах. Известия АН СССР, серия математическая, 1983, т.47, № I, с. 3-25.

I0. А ю п о в Ш.А., Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Ташкент, I983, 34 с.

II. Б у р б а к и Н., Общая топология (топологические группы, числа) - М.: "Наука", I969, 392 с.

I2. Г о л ь д ш т е й н М.Ш., Теоремы сходимости почти всюду в алгебрах фон Неймана. J.Operator Theory., 1981, v.6, p. 233-311.

I3. Ж е в л а к о в К.А., С л и н ь к о А.М., Ш е с т а к о в И.П., Ш и р ш о в А.И., Кольца, близкие к ассоциативным. - М.: "Наука", I978, 432 с.

I4. С а р ы м с а к о в Т.А., Г о л ь д ш т е й н М.Ш. О частично упорядоченных инволютивных алгебрах. Доклады АН СССР, I976, т.228, № 2, с.306-309.

I5. С а р ы м с а к о в Т.А., Некоммутативные вероятностные пространства на O^* - алгебрах. Доклады АН СССР, I978, т.24I, № 2. с. 297-300.

I6. С а р ы м с а к о в Т.А., А ю п о в Ш.А., Частично упорядоченные йордановы алгебры. Доклады АН СССР, I979, т.249, № 4, с. 789-792.

I7. С а р ы м с а к о в Т.А., Полуполя и теория вероятностей. Ташкент, "Фан", I98I, 96 с.

I8. С а р ы м с а к о в Т.А., А ю п о в Ш.А., Х а д ж и е в Дж., Ч и л и н В.И., Упорядоченные алгебры. Ташкент, "Фан", I983, 304 с.

19. A l f s e n E.M., S h u l t z F.W., S t o r m e r E., A Gelfand - Neumark theorem for Jordan algebras. Advances in Math., 1978, vol. 28, N 1, p. 11-56.

20. A l f s e n E.M., S h u l t z F.W., State spaces of Jordan algebras. Acta Math., 1978, vol. 140, N 3-4, p. 155-190.

21. A j u p o v Sh.A., Martingale convergence and strong laws of large numbers in Jordan algebras. Anal. Univ. Craiova, Ser. Mat. Fiz.-Chim, 1981, vol. 9, p.29-34.

22. A j u p o v Sh.A., Extension of traces and type criterions for Jordan algebras of self-adjoint operators. Math. Z. 1982, vol. 181, p. 253-268.

23. A r v e s o n W.B., Analyticity in operator algebras. Amer. J. Math., 1967, vol.89, p. 578-642.

24. B a r n e t t C., Supermartingales on semifinite von Neumann algebras. J. London Math. Soc., 1981, vol.24, p. 175-181.

25. C u c u l e s c u I., Supermartingales on W^*-algebras. Rev. Roum. Math. Pures Appl. 1969, vol.14, p.759-773.

26. C u c u l e s c u I., Martingales on von Neumann algebras. J. Multivariate anal., 1971, N 1, p. 17-27.

27. D a n g - N g o c N., Poitwise convergence of martingales in von Neumann algebras. Israel J.Math. 1979, vol. 34, N 4, p. 273-280.

28. G o l d s t e i n S., Convergence of martingales in von Neumann algebras. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. sci. math., 1979, vol. 27, N 11-12, p. 853-859.

29. H a a g e r u p H., H a n c h e - O l s e n H., T o m i t a - T a k e s a k i theory for Jordan algebras. Preprint Odense Universitet, 1982, N 4, p. 1-35.

30. J a c o b s o n N., Structure and representations of Jordan algebras. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.39, Providence R.I., 1968, 453 p.

31. L a n c e E.C., Martingale convergence in von Neumann algebras. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1978, vol. 84, N 1, p. 47-56.

32. N a k a m u r a M., T u r u m a r u T., Expectations in an operator algebra. Tohoku Math., 1954, vol. 6, p. 182-188.

33. N e l s o n E., Note on non commutative integration theory. J. Functional Analysis. 1974, vol. 15, p.103-- 116.

34. M o y S.C., Characterizations of conditional expectation as a transformation on function spaces. Pacific Journ. of Math., 1954, vol.4, p. 47-65.

35. P a d m a n a b h a n A.K., Convergence in measure and related results in finite rings of operators. Trans.Amer. Math. Soc., 1967, vol. 128, p. 359-388.

36. S a n k a r a n S., The $*$ - algebras of unbounded operators., J. London Math. Soc. 1959, vol.34, p. 337-344.

37. S a n k a r a n S., Stochastic convergence for operators., Quart. J. Math. Oxford, 1964, Ser, 2, N 15, p. 97-102.

38. S e g a l I., A non commutative extension of abstract integration. Ann. of Math., 1953, vol. 57, p.401-457.

39. S h u l t z F.W., On normed Jordan algebras which are Banach dual spaces. J. Functional Analysis. 1979, vol. 31, N 3, p. 360-376.

40. S t a c e y P.J., Local and global splittings in the state space of a JB - algebra. Math. Ann., 1981, 256, p. 497-507.

41. S t i n e s p r i n g W.F., Integration theorems for gages and duality for unimodular groups. Trans. Amer. Math. Soc. 1959, vol. 90, p. 15-56.

42. S t o r m e r E., On Jordan structure of C^* -algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 1965, vol.120, p.438-447.

43. S t o r m e r E., Jordan algebras of type I. Acta Math. 1966, vol.115, N 3-4, p. 165-184.

44. S t o r m e r E., Irreducible Jordan algebras of self-adjoint operators. Trans. Amer. Math. Soc. 1968, vol. 130, p. 153-166.

45. T a k e s a k i M., Conditional expectations in von Neumann algebras. J. Functional Analysis. 1972, vol. 9, p. 306-321.

46. T o m i y a m a J., On the projections of norm one in W^* - algebras.I. Proc. Japan Acad., 1957, vol. 33, p. 608-612.

47. T o m i y a m a J., On the projections of norm one in W^*- algebras.III. Tohoku Math. J., 1959, vol.11, p.125-129.

48. T o p p i n g D., Jordan algebras of self-adjoint operators. Mem. Amer. Math. Soc., 1965, N 53, p.1-48.

49. T o p p i n g D., An isomorphism invariant for spin factors. J. Math. and Mech., 1966, vol.15, p.1055--1064.

50. U m e g a k i H., Conditional expectations in an operator algebra.I. Tohoku Math.J., 1954, vol.6, p.177-181.

51. U m e g a k i H., Conditional expectations in an operator algebra. II. Tohoku Math. J., 1956, vol.8, p.86-100.

52. U m e g a k i H., Conditional expectations in an operator algebra. III. Kodai Math. Sem. Rep., 1959,vol.11, p.51-64.

53. Y e a d o n F.J., Convergence of measurable operators. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1973, vol.74,p.257-268.

54. Y e a d o n F.J., Non-commutative L^p -spaces. Proc. Cambridge Philos, Soc., 1975, vol.77, p.91-102.

55. E f f r o s E.G., S t o r m e r E., Positive projections and Jordan structure in operator algebras., Math. Scand., 1979, vol.45, p. 127-138.

56. Б е р д и к у л о в М.А., Пространства L_1 и L_2 для полуконечных JBW - алгебр. Доклады АН УзССР,I982, № 6, с. 3-4.

57. Б е р д и к у л о в М.А., Условные математические ожидания и мартингалы на йордановых алгебрах. Доклады АН УзССР, I983, № 6, с.3-4.

58. Б е р д и к у л о в М.А., Характеризация условных математических ожиданий на йордановых алгебрах. Деп. ВИНИТИ, I983, № I82I-83. Деп., I4 с.

59. А ю п о в Ш.А., Б е р д и к у л о в М.А., Теоремы о сходимости мартингалов на йордановых алгебрах.Деп. ВИНИТИ, I983, № 5044-83 Деп., 44 с.