М. Ш. БИРМАН, М. З. СОЛОМЯК

ДВОЙНЫЕ ОПЕРАТОРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ СТИЛТЬЕСА. III.

ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД ПОД ЗНАКОМ ИНТЕГРАЛА

Настоящая статья является продолжением работ авторов [1]—[3], где систематически развивалась теория двойных операторных интегралов (д. о. и.) и рассматривались приложения этой теории. Перспектива новых приложений привела к необходимости подробно исследовать возможность предельных переходов под знаком таких интегралов. Особенно важен здесь случай, когда предельный переход совершается по спектральным мерам, входящим в определение интеграла. Именно эти вопросы, в основном, и рассматриваются в настоящей работе, которая, таким образом, имеет технический характер. В качестве приложения мы рассматриваем вопрос о дифференцировании оператор-функций вида $h(A(s))$, где $A(s)$ — самосопряженные операторы в $\boldsymbol{H}$, $h(\cdot)$ — скалярная функция. Соответствующая формула была впервые получена Ю. Л. Далецким и С. Г. Крейном в [4], где в этой связи возникли и сами двойные операторные интегралы. Мы значительно расширяем условия справедливости формул такого типа как за счет расширения класса функций h, так и за счет расширения класса оператор-функций $A(s)$. При этом мы пользуемся другим методом, основанным на представлении разности $h(A(s))-h(A(t))$ в виде д. о. и. Возможность такого представления имеет самостоятельный интерес и подробно обсуждается в этой статье. Таким образом, рассматриваемые здесь приложения также имеют технический характер. Они, однако, необходимы при рассмотрении менее формальных вопросов. Укажем, например, на возможность содержательных приложений к теории функции спектрального сдвига И. М. Лифшица — М. Г. Крейна [5]. Эти приложения изложены в работе [9].

§ 1. Предварительные сведения

1. Пусть $\boldsymbol{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, $\boldsymbol{R}$ — кольцо ограниченных операторов в $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{S}$ — какой-либо симметрично-нормированный (с. н.) идеал (см. [6]) кольца $\boldsymbol{R}$. Линейное непрерывное отображение $\boldsymbol{S}$ в себя называется *трансформатором* класса $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{S})$, его норма обозначается через $|\cdot|_{\boldsymbol{S}}$ (в то время как $\|\cdot\|_{\boldsymbol{S}}$ обозначает норму операторов в идеале $\boldsymbol{S}$). Наиболее важными являются идеалы $\boldsymbol{S}_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ (см. [6]); для них используются обозначения $|\cdot|_p$ и $\|\cdot\|_p$; для кольца $\boldsymbol{R}$ индекс в обозначении норм опускается. Ниже *идеал* $\boldsymbol{S}$ *всегда считается либо сепарабельным, либо сопряженным к сепарабельному*; в последнем случае он порождается некоторой симметричной нормирующей (с. н.) функцией [6]. Через $\boldsymbol{K}$ обозначается множество всех конечномерных операторов в $\boldsymbol{H}$. Сильный и слабый пределы операторов в $\boldsymbol{H}$ обозначаются через s-lim и w-lim. Через $D(A)$ обозначается область определения оператора A.

2. Мы рассматриваем интегралы вида

$$Q \equiv \Phi T = \int\limits_{\Lambda}\int\limits_{M} \varphi(\lambda, \mu) F(d\mu) T E(d\lambda) \tag{1.1}$$

— двойные операторные интегралы. Здесь $(\Lambda, E(\cdot))$ (и аналогично $(\mathrm{M}, F(\cdot))$) — пространство с мерой, значения которой суть ортогональные проекторы в $\boldsymbol{H}$; T — ограниченный оператор в H. Интеграл (1.1) определяет собой некоторый трансформатор Φ. Основная задача теории д. о. и. состоит в исследовании непрерывности трансформатора Φ в различных идеалах $\boldsymbol{S}$.

Напомним некоторые общие факты теории д. о. и. (подробнее см. [2], а также [7]). Первоначальное определение интеграла (1.1) пригодно для операторов класса $\boldsymbol{S}_2$ и для функций φ, ограниченных и измеримых относительно некоторой меры* на $\Lambda \times \mathrm{M}$. При этом

$$|\Phi|_2 = \underset{\Lambda\times\mathrm{M}}{\mathrm{v.\,sup}}\, |\varphi(\lambda, \mu)|. \tag{1.2}$$

Условимся обозначать через $\overline{\Phi}$ трансформатор, определяемый комплексно-сопряженной функцией $\overline{\varphi}$. Для трансформаторов $\Phi \in (\boldsymbol{S}_2, \boldsymbol{S}_2)$ имеет место соотношение $\Phi^* = \overline{\Phi}$.

Обозначим через $\Phi|_{\boldsymbol{S}_1}$, $\overline{\Phi}|_{\boldsymbol{S}_1}$ сужение трансформаторов Φ и $\overline{\Phi}$ на класс $\boldsymbol{S}_1$. В [1], [2] установлено, что эти трансформаторы принадлежат классу $(\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_1)$ одновременно и имеют равные нормы. Тогда преобразование $(\overline{\Phi}|_{\boldsymbol{S}_1})^*$ принадлежит классу $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R})$ и представляет собой расширение исходного трансформатора Φ. Это расширение в дальнейшем снова обозначается через Φ.

* Имеется в виду любая мера, тип которой совпадает с прямым произведением спектральных типов мер $E(\cdot)$ и $F(\cdot)$.

По определению, интеграл (1.1) для $T \in \boldsymbol{R}$ принимается равным $Q = \Phi T$. Таким образом, условия $\Phi \in (\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_1)$ и $\Phi \in (\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R})$ равносильны, причем $|\Phi| = |\Phi|_1$. Более того, из интерполяционных теорем следует, что включение $\Phi \in (\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R})$ влечет за собой $\Phi \in (\boldsymbol{S}, \boldsymbol{S})$ для любого с.-н. идеала $\boldsymbol{S}$. При этом оказывается, что

$$|\Phi|_2 \leqslant |\Phi|_{\boldsymbol{S}} \leqslant |\Phi|_1 = |\Phi|_\infty = |\Phi|. \tag{1.3}$$

В [1], [2] получен следующий критерий принадлежности Φ классу $(\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_1)$ (а следовательно, и любому классу $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{S})$). Пусть ω — произвольный элемент $\boldsymbol{H}$ и пусть $\rho_\omega(\cdot) = (E(\cdot)\omega, \omega)$ — соответствующая мера на измеримых подмножествах Λ. Аналогично для $\theta \in \boldsymbol{H}$ введем меру $\tau_\theta(\cdot) = (F(\cdot)\theta, \theta)$ на подмножествах M. Пространства L^2 по этим мерам обозначим соответственно через $L^2_\omega\Lambda$ и $L^2_\theta\mathrm{M}$. Рассмотрим интегральный оператор $K_{\omega, \theta}$, переводящий $L^2_\omega\Lambda$ в $L^2_\theta\mathrm{M}$ и определяемый соотношениями

$$v = K_{\omega, \theta}\, u, \quad v(\mu) = \int_\Lambda \varphi(\lambda, \mu)\, u(\lambda)\, \rho_\omega(d\lambda). \tag{1.4}$$

Лемма 1.1. *Пусть Φ — трансформатор, определяемый соотношением* (1.1). *Включение $\Phi \in (\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R})$ равносильно тому, что все операторы* (1.4) *ядерны и справедлива оценка*

$$\|K_{\omega, \theta}\|_1 \leqslant C \|\omega\| \|\theta\|. \tag{1.5}$$

При этом $|\Phi| \leqslant C$.

Отметим еще выражение для билинейной формы оператора $Q = \Phi T$ в случае, когда $T = (\cdot, \omega)\theta$ — одномерный оператор:

$$(Qf, g) = \int_\Lambda \int_{\mathrm{M}} \varphi(\lambda, \mu)(E(d\lambda) f, \omega)(F(d\mu)\theta, g), \quad (f, g \in \boldsymbol{H}). \tag{1.6}$$

3. Для некоторых идеалов $\boldsymbol{S}$ удается разумным образом определить включение $\Phi \in (\boldsymbol{S}, \boldsymbol{S})$, хотя $\Phi \overline{\in} (\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R})$. Остановимся на этом немного подробнее. Пусть сначала $\boldsymbol{S}$ — сепарабельный идеал и пусть отображение $\Phi|_{\boldsymbol{K}}$ (а тогда и $\overline{\Phi}|_{\boldsymbol{K}}$) непрерывно в $\boldsymbol{S}$. Распространяя $\Phi|_{\boldsymbol{K}}$ по непрерывности на весь идеал $\boldsymbol{S}$, мы получим трансформатор класса $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{S})$, который по-прежнему обозначим через Φ. Далее, $\Phi \in (\boldsymbol{S}, \boldsymbol{S})$ можно определить и как трансформатор класса $(\boldsymbol{S}^*, \boldsymbol{S}^*)$ формулой $\Phi = (\overline{\Phi}|_{\boldsymbol{S}})^*$. Более точно, для $T \in \boldsymbol{S}^*$ полагаем $\Phi T = Q$, где $Q \in \boldsymbol{S}^*$ определяется соотношением

$$\mathrm{Sp}\,[T(\overline{\Phi} Y)^*] = \mathrm{Sp}\, QY^* \quad (Y \in \boldsymbol{S}). \tag{1.7}$$

При этом возникает вопрос о согласованности различных расширений первоначально определенного на $\boldsymbol{S}_2$ трансформатора Φ (а с ним и интеграла (1.1)). Для весьма широкого класса идеалов такая согласованность установлена в [2, 7]. Отметим, что первое неравенство (1.3) сохраняет силу.

4. Поясним принятую в статье систему обозначений различных функциональных пространств: так, например, $L^{\infty}\Lambda L^2 R^m$ означает пространство ограниченных измеримых* абстрактных функций, заданных на Λ и имеющих значения в $L^2 R^m$; норма функции u в этом пространстве дается выражением

$$\operatorname{v.sup}_{\lambda\in\Lambda}\left[\int_{R^m} |u(\lambda, x)|^2 dx\right]^{1/2}. \tag{1.8}$$

Далее, $C\Lambda\boldsymbol{H}$ означает пространство непрерывных на Λ вектор-функций со значениями в $\boldsymbol{H}$. Смысл других аналогичных обозначений может быть расшифрован без труда.

§ 2. Трансформаторы класса (R, R)

1. В работах [8], [3] установлены различные признаки ядерности интегральных операторов вида (1.4), позволяющие устанавливать оценку (1.5) и, следовательно, практически использовать лемму 1.1. Здесь мы укажем довольно общее („полуэффективное") условие справедливости оценки (1.5), связанное с разложением операторов (1.4) в произведение двух операторов Гильберта — Шмидта.

Пусть X — какое-либо пространство с σ-конечной мерой dx. Обозначим через $\mathfrak{A}(=\mathfrak{A}(X))$ класс определенных на $\Lambda\times\mathrm{M}$ функций φ, допускающих представление

$$\varphi(\lambda, \mu)=\int_X \alpha(\lambda, x)\beta(\mu, x)dx, \tag{2.1}$$

где функции α, β измеримы** соответственно на $\Lambda\times X$, $\mathrm{M}\times X$, причем $\alpha\in L^{\infty}\Lambda L^2X$, $\beta\in L^{\infty}\mathrm{M}L^2X$, т. е.

$$\begin{gathered}\operatorname{v.sup}_{\Lambda}\int_X |\alpha(\lambda, x)|^2 dx\equiv C^2(\alpha)<\infty,\\ \operatorname{v.sup}_{\mathrm{M}}\int_X |\beta(\mu, x)|^2 dx\equiv C^2(\beta)<\infty.\end{gathered} \tag{2.2}$$

Пусть ω, $\theta\in\mathbf{H}$. Рассмотрим интегральный оператор K_1: $L^2_{\omega}\Lambda\to L^2X$, определенный формулой

$$(K_1u)(x)=\int_{\Lambda}\alpha(\lambda, x)u(\lambda)\rho_{\omega}(d\lambda),$$

и интегральный оператор $K_2: L^2X\to L^2_{\theta}\mathrm{M}$, действующий по формуле

$$(K_2v)(\mu)=\int_X \beta(\mu, x)v(x)dx.$$

---

* Измеримость (а также v. sup в (1.8)) понимается относительно спектрального типа меры $E(\cdot)$. Однако, если на Λ рассматривается последовательность мер, то измеримость понимается относительно верхней грани соответствующих типов.

** Измеримость на $\Lambda\times X$ понимается в согласии с предыдущим примечанием. Аналогично понимается измеримость на $\mathrm{M}\times X$.

Ясно, что $K_{\omega,\theta} = K_2 K_1$. Вместе с тем

$$\|K_1\|_2^2 = \int\limits_\Lambda\int\limits_X |\alpha(\lambda, x)|^2 dx\, \rho_\omega(d\lambda) \leqslant C^2(\alpha) \int\limits_\Lambda \rho_\omega(d\lambda) \leqslant C^2(\alpha)\|\omega\|^2$$

и аналогично $\|K_2\|_2^2 \leqslant C^2(\beta)\|\theta\|^2$. Отсюда получается, что $K_{\omega,\theta} \in \mathfrak{S}_1$ и (1.5) выполнено при $C = C(\alpha)C(\beta)$. Вместе с леммой 1.1 это дает следующий результат.

Предложение 2.1. *Пусть $\varphi \in \mathfrak{A}$ и пусть Φ — трансформатор, определяемый интегралом* (1.1). *Тогда $\Phi \in (\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R})$ и*

$$|\Phi| \leqslant C(\alpha)C(\beta), \tag{2.3}$$

где $C(\alpha)$, $C(\beta)$ определяются формулами (2.2).

2. Для функций $\varphi \in \mathfrak{A}$ трансформатор Φ допускает интегральное представление, отличное от (1.1). Перейдем к выводу этого представления. Рассмотрим оператор-функции, заданные на X:

$$a(x) = \int\limits_\Lambda \alpha(\lambda, x) E(d\lambda), \quad b(x) = \int\limits_M \beta(\mu, x) F(d\mu). \tag{2.4}$$

Значения этих функций суть нормальные (возможно, неограниченные) операторы в $\boldsymbol{H}$. Однако для любого $f \in H$ вектор-функции $a(x)f$, $b(x)f$ определены для почти всех $x \in X$, причем справедливы оценки, непосредственно вытекающие из (2.2):

$$\int\limits_X \|a(x)f\|^2 dx \leqslant C^2(\alpha)\|f\|^2, \quad \int\limits_X \|b(x)f\|^2 dx \leqslant C^2(\beta)\|f\|^2. \tag{2.5}$$

Рассмотрим билинейную форму

$$\Omega(f, g) = \int\limits_X (Ta(x)f,\ b^*(x)g)\, dx. \tag{2.6}$$

Из (2.5), очевидно, следует, что форма Ω ограничена:

$$|\Omega(f, g)| \leqslant C(\alpha)C(\beta)\|T\|\|f\|\|g\|.$$

Обозначим через $\widetilde{Q}$ определяемый ею ограниченный оператор в $\boldsymbol{H}$ и убедимся, что $\widetilde{Q} = Q = \Phi T$. Пусть сначала $T = (\cdot, \omega)\theta$ — одномерный оператор. Учитывая представление (2.1) для функции $\varphi \in \mathfrak{A}$, преобразуем билинейную форму (1.6) оператора Q к виду

$$(Qf, g) = \int\limits_X (a(x)f, \omega)(\theta, b^*(x)g)\, dx, \tag{2.7}$$

что, очевидно, совпадает с (2.6). Равенство $\widetilde{Q} = Q$ для одномерных T доказано. Пусть теперь $T \in \boldsymbol{R}$; рассмотрим выражение $\mathrm{Sp}\left[T(\overline{\Phi}Y)^*\right]$, где $Y = (\cdot, f)g$. Если $\{e_n\}$ — какой-либо ортонормированный базис в $\boldsymbol{H}$, то

$$\mathrm{Sp}\left[T(\overline{\Phi}Y)^*\right] = \sum_n (Te_n, (\overline{\Phi}Y)e_n).$$

Применяя формулу вида (2.7) для вычисления билинейной формы оператора $\overline{\Phi} Y$, получим:

$$\operatorname{Sp}\left[T(\overline{\Phi} Y)^*\right]=\sum_n \int_X (a(x) f, e_n)(e_n, \ T^* b^*(x) g)\, dx=$$

$$=\int_X (a(x) f, \ T^* b^*(x) g)\, dx=(\widetilde{Q} f, \ g)=\operatorname{Sp} \widetilde{Q} Y^* .$$

Последнее соотношение автоматически переносится на любые $Y \in \boldsymbol{S}_1$, после чего (1.7) приводит к равенству $\widetilde{Q}=\Phi T$. Сформулируем полученный результат:

Лемма 2.2. *Пусть $\varphi \in \mathfrak{A}$ и (2.1) — соответствующее представление для φ. Тогда для любого $T \in \boldsymbol{R}$ билинейная форма оператора $Q=\Phi T$ совпадает с (2.6), причем оператор-функции $a(x)$, $b(x)$ определяются формулами (2.4).*

3. Из формулы (2.7) вытекает простое выражение для следа оператора ΦT при $T=(\cdot, \ \omega) \theta$:

$$\operatorname{Sp} \Phi T=\int_X (b(x) \theta, \ a^*(x) \omega)\, dx .$$

В частности, при $\Lambda=\mathrm{M}$ и $F(\cdot)=E(\cdot)$ будет

$$(b(x) \theta, \ a^*(x) \omega)=\int_\Lambda \alpha(x, \ \lambda) \beta(x, \ \lambda)(E(d \lambda) \theta, \ \omega),$$

и потому

$$\operatorname{Sp} \Phi T=\int_\Lambda \varphi(\lambda, \ \lambda)(E(d \lambda) \theta, \ \omega); \quad T=(\cdot, \ \omega) \theta . \tag{2.8}$$

В (2.8) факторизация (2.1) не присутствует явно; она, однако, служит для придания смысла функции φ на диагонали.

Пусть теперь $T \in \boldsymbol{S}_1$; соотношением

$$\rho_T(\cdot)=\operatorname{Sp}[E(\cdot)\, T] \tag{2.9}$$

определяется конечная комплексная мера на Λ. Из (2.8) легко получается, что при $\Lambda=\mathrm{M}$, $E(\cdot)=F(\cdot)$

$$\operatorname{Sp} \Phi T=\int_\Lambda \varphi(\lambda, \ \lambda) \rho_T(d \lambda), \ T \in \boldsymbol{S}_1 . \tag{2.10}$$

§ 3. Непрерывность трансформаторов Ф относительно слабой и сильной сходимости

1. Предложение 3.1. *Пусть трансформатор Φ определен интегралом (1.1) и пусть $T=w\text{-}\lim T_n$.* Если $\Phi \in(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R})$, *то*

$$Q \equiv \Phi T=w\text{-}\lim Q_n, \quad Q_n=\Phi T_n . \tag{3.1}$$

Доказательство. Для любых $f, \ g \in \boldsymbol{H}$ и $Y=(\cdot, \ f) g$ имеем

$$(Q_n f, \ g)=\operatorname{Sp}(\Phi T_n)\, Y^*=\operatorname{Sp} T_n(\overline{\Phi} Y)^* . \tag{3.2}$$

Так как $\bar{\Phi} \in (\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_1)$, то $\bar{\Phi} Y \in \mathfrak{S}_1$, и в (3.2) можно перейти к пределу. Тогда получим требуемый результат:

$$(Q_n f, g) \xrightarrow[n \to \infty]{} \operatorname{Sp} T (\bar{\Phi} Y)^* = \operatorname{Sp} (\Phi T) Y^* = (Qf, g). \quad (3.3)$$

Приведем еще одно предложение подобного типа.

Предложение 3.2. *Пусть $\mathfrak{S}$ — с.-н. идеал, порожденный какой-либо с. н. функцией и не совпадающий поэлементно с $\mathfrak{S}_\infty$. Если в условиях предложения 3.1 $\Phi \in (\mathfrak{S}, \mathfrak{S})$ и*

$$\sup_n \| T_n \|_{\mathfrak{S}} < \infty, \quad (3.4)$$

то (3.1) выполнено.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{S}'$ — сепарабельный идеал, сопряженным к которому является идеал $\mathfrak{S}$. Тогда в (3.2) $\bar{\Phi} Y \in \mathfrak{S}'$, и предельный переход (3.3) снова можно произвести, если воспользоваться условием (3.4).

2. Аналогичные утверждения о сильной сходимости удается получить лишь при аналитических требованиях на функцию φ. Приведем аналог предложения 3.1.

Предложение 3.3. *Пусть в (1.1) $\varphi \in \mathfrak{A}$ и пусть $T = s\text{-}\lim T_n$. Тогда $Q \equiv \Phi T = s\text{-}\lim Q_n$, где $Q_n = \Phi T_n$.*

Доказательство. В силу предложения 2.1 $\Phi \in (\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R})$. Не уменьшая общности, считаем, что $s\text{-}\lim T_n = 0$. Используем представление (2.6) для билинейной формы оператора Q_n (лемма 2.2), а также вторую оценку (2.5). Тогда

$$|(Q_n f, g)| \leqslant C(\beta) \| g \| \sigma_n (f), \quad (3.5)$$

где

$$\sigma_n^2 (f) = \int_X \| T_n a(x) f \|^2 \, dx. \quad (3.6)$$

Из (3.5) следует, что $\| Q_n f \| \leqslant C(\beta) \sigma_n (f)$. Остается показать, что $\sigma_n (f) \to 0$ для любого $f \in \boldsymbol{H}$. Но для почти всех $x \in X$ (для тех $x \in X$, при которых определен элемент $a(x) f$) подынтегральная функция в (3.6) стремится к нулю, а функция $\sup_n \| T_n \|^2 \| a(x) f \|^2$ служит для нее (в силу (2.5)) суммируемой мажорантой. Остается сослаться на теорему Лебега о предельном переходе.

§ 4. Представление разности $h(B) - h(A)$ в виде операторного интеграла

1. Пусть A, B — самосопряженные операторы в $\boldsymbol{H}$, причем $D(A) = D(B)$, и пусть $E(\cdot)$, $F(\cdot)$ — соответствующие спектральные меры, определенные на вещественной оси R^1. Пусть h — комплексная функция, заданная на R^1, и Z — трансформатор, определенный интегралом

$$ZT = \iint \frac{h(\mu) - h(\lambda)}{\mu - \lambda} F(d\mu) T E(d\lambda) \quad (4.1)$$

(здесь интегрирование без обозначения пределов означает интегрирование по R^1). Основная цель настоящего параграфа состоит в оправдании формулы

$$h(B)-h(A)=\mathrm{Z}(B-A) \tag{4.2}$$

в тех случаях, когда правая часть имеет смысл. При этом, если левая часть в (4.2) непосредственно определена лишь на плотном в $\mathbf{H}$ множестве, то, как обычно, считается, что ограниченный оператор, стоящий справа, является замыканием левой части. Будут получены и другие формулы того же типа. Отметим, что один результат в этом направлении был получен в [1], где рассматривался унитарный случай.

Дальнейшие рассмотрения существенно опираются на следующую лемму, в формулировке которой приняты обозначения $E_n=E(\Delta_n)$, $F_n=F(\Delta_n)$ и Δ_n — сегмент $[-n, n]\subset \boldsymbol{R}^1$.

Лемма 4.1. *Пусть функция h такова, что определяемый интегралом (4.1) трансформатор Z принадлежит некоторому классу* $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{S})$ и пусть $P\in\boldsymbol{S}$. Тогда при любом n справедливо соотношение*

$$\mathrm{Z}(BF_nPE_n-F_nPAE_n)=h(B)F_nPE_n-F_nPh(A)E_n. \tag{4.3}$$

Доказательство. Пусть χ_n — характеристическая функция сегмента Δ_n. Рассмотрим ограниченные в $\boldsymbol{S}$ трансформаторы, определяемые формулами

$$\Phi_{B,\,n}T=BF_nTE_n=\iint\chi_n(\lambda)\chi_n(\mu)\,\mu F(d\mu)\,TE(d\lambda),$$

$$\Phi_{A,\,n}T=F_nTAE_n=\iint\chi_n(\lambda)\chi_n(\mu)\,\lambda F(d\mu)\,TE(d\lambda).$$

Согласно общим правилам действий над трансформаторами, определяемыми д. о. и., (см. [1], [2]), находим

$$\mathrm{Z}(BF_nPE_n-F_nPAE_n)=\mathrm{Z}(\Phi_{B,\,n}-\Phi_{A,\,n})P=$$

$$=\iint\chi_n(\lambda)\chi_n(\mu)\frac{h(\mu)-h(\lambda)}{\mu-\lambda}(\mu-\lambda)F(d\mu)\,PE(d\lambda)=$$

$$=\iint\chi_n(\lambda)\chi_n(\mu)\,[h(\mu)-h(\lambda)]\,F(d\mu)\,PE(d\lambda).$$

Вычисление последнего интеграла приводит к (4.3). Лемма доказана.

Замечание 4.2. Из соотношений (1.2), (1.3) непосредственно следует, что функция h в условиях леммы 4.1 не может расти быстрее линейной функции.

Теорема 4.3. *Пусть $B-A\in\boldsymbol{R}$ и пусть трансформатор Z принадлежит классу $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R})$. Тогда формула (4.2) справедлива, и, следовательно, $h(B)-h(A)\in\boldsymbol{R}$.*

Доказательство. В условиях теоремы в формуле (4.3) можно положить $P=I$. Это приводит к соотношению

$$\mathrm{Z}(BF_nE_n-F_nAE_n)=h(B)F_nE_n-F_nh(A)E_n. \tag{4.4}$$

---

* Здесь и ниже не исключается возможность $\mathbf{S}=\mathbf{R}$, если не оговорено, что $\boldsymbol{S}$ — с.-н. идеал.

Если операторы A, B ограничены, то при достаточно большом n будет $E_n = F_n = I$, и формула (4.4) равносильна формуле (4.1). В случае неограниченных операторов воспользуемся предложением 3.1. При $n \to \infty$, очевидно, $w\text{-}\lim(BF_nE_n - F_nAE_n) = B - A$. Следовательно,

$$w\text{-}\lim \mathrm{Z}(BF_nE_n - F_nAE_n) = \mathrm{Z}(B - A).$$

С другой стороны, при $f, g \in D(A) = D(B)$ находим

$$([h(B) F_nE_n - F_nh(A) E_n] f, g) \xrightarrow[n\to\infty]{} (h(B) f, g) - (h(A) f, g).$$

Оба члена в правой части определены в силу замечания 4.2. Таким образом, слабый предельный переход в равенстве (4.4) приводит к формуле (4.2).

2. Предположим, что трансформатор, определяемый интегралом (4.1), неограничен в $\boldsymbol{R}$, но принадлежит какому-либо классу $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{S})$. Возникает вопрос об оправдании формулы (4.2) в случае $B - A \in \boldsymbol{S}$. Основное техническое затруднение здесь заключается в том, что в формуле (4.3) нельзя принять $P = I$. Это затруднение преодолевается с помощью следующей леммы.

Лемма 4.4. *Пусть B — самосопряженный оператор в $\boldsymbol{H}$, и $\boldsymbol{S}$ — идеал в $\boldsymbol{R}$, не совпадающий поэлементно с $\boldsymbol{S}_1$. Тогда существует такая последовательность конечномерных проекторов P_m, что $s\text{-}\lim P_m = I$ $(m \to \infty)$ и**

$$\sup_m \| BP_m - P_mB \|_{\boldsymbol{S}} < \infty.^{**} \tag{4.5}$$

Теорема 4.5. *Пусть оператор $B - A$ принадлежит какому-либо с.-н. идеалу $\boldsymbol{S}$, и пусть трансформатор Z, определяемый интегралом* (4.1), *принадлежит классу* $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{S})$. *Тогда формула* (4.2) *справедлива и, следовательно, $h(B) - h(A) \in \boldsymbol{S}$.*

Доказательство. Если $B - A \in \boldsymbol{S}_2$, то можно принять $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_2$, так как из (1.3) следует включение $\mathrm{Z} \in (\boldsymbol{S}_2, \boldsymbol{S}_2)$. Если же $B - A \overline{\in} \boldsymbol{S}_2$, то заведомо $\boldsymbol{S}$ не совпадает поэлементно с $\boldsymbol{S}_1$. Таким образом, лемма 4.4 применима. Воспользуемся формулой (4.3), полагая в ней $P = P_m$, где $\{P_m\}$ — последовательность проекторов из леммы 4.4. Ясно, что при $m \to \infty$

$$w\text{-}\lim [BF_nP_mE_n - F_nP_mAE_n] = BF_nE_n - F_nAE_n.$$

С другой стороны, нормы в $\boldsymbol{S}$ операторов, стоящих в левой части, ограничены в совокупности. В самом деле,

$$\| BF_nP_mE_n - F_nP_mAE_n \|_{\boldsymbol{S}} \leqslant \| F_n (BP_m - P_mB) E_n \|_{\boldsymbol{S}} + \\ + \| F_nP_m (B - A) E_n \|_{\boldsymbol{S}} \leqslant \| BP_m - P_mB \|_{\boldsymbol{S}} + \| B - A \|_{\boldsymbol{S}}.$$

* Подразумевается, что оператор $BP_m - P_mB$ плотно определен и вычисляется норма в $\mathbf{S}$ его замыкания.

** Доказательство леммы для удобства чтения отнесено в конец настоящего параграфа.

Таким образом, выполнены условия предложения 3.2, и, следовательно,

$$w\text{-}\lim_{m\to\infty} \mathrm{Z}\,[BF_nP_mE_n - F_nP_mAE_n] = \mathrm{Z}\,[BF_nE_n - F_nAE_n].$$

Слабый предел оператора, стоящего в правой части формулы (4.3) (при $P = P_m$, $m \to \infty$), существует и равен $h(B)F_nE_n - F_nh(A)E_n$. Таким образом, в условиях теоремы сохраняется формула (4.4). Предельный переход при $n \to \infty$, приводящий к оправданию формулы (4.2), обосновывается так же, как и при доказательстве теоремы 4.3. Единственное отличие заключается в том, что вместо ссылки на предложение 3.1 теперь следует еще раз сослаться на предложение 3.2. Эта ссылка оправдана, так как $\|BF_nE_n - F_nAE_n\|_{\boldsymbol{S}} \leqslant \|B - A\|_{\boldsymbol{S}}$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть $B - A \in \boldsymbol{S}_2$ и h удовлетворяет условию Липшица. Тогда формула (4.2) справедлива, и $h(B) - h(A) \in \boldsymbol{S}_2$.*

Доказательство исчерпывается указанием на равенство (1.2).

3. Перейдем к случаю, когда разность $B - A$ лишь относительно ограничена. Пусть $D(B) = D(A)$ и при некотором $q > 0$ оператор $(B - A)(A - i)^{-q}$ ограничен (разумеется, содержателен только случай неограниченных A, B, который мы и будем рассматривать). В этой ситуации можно получить некоторый аналог формулы (4.2). Введем в рассмотрение трансформатор Z_q, определяемый интегралом

$$\mathrm{Z}_qT = \iint \frac{h(\mu) - h(\lambda)}{\mu - \lambda} (\lambda - i)^q F(d\mu)\, TE(d\lambda). \qquad (4.6)$$

Из (1.2), (1.3) следует, что этот трансформатор может оказаться ограниченным в каком-либо идеале лишь при $q \leqslant 1$.

Теорема 4.6. *Пусть функция h такова, что при некотором $q \in (0, 1]$ трансформатор Z_q принадлежит какому-либо классу $(\boldsymbol{S}, \mathfrak{S})$, и пусть при этом значении q*

$$(B - A)(A - i)^{-q} \in \boldsymbol{S}.$$

Тогда имеет место формула

$$h(B) - h(A) = \mathrm{Z}_q\left[(B - A)(A - i)^{-q}\right], \qquad (4.7)$$

и, следовательно, $h(B) - h(A) \in \boldsymbol{S}$.

Доказательство этой теоремы опускается, так как оно вполне аналогично доказательству теорем 4.3 и 4.5.

4. Аналоги теорем 4.3 и 4.5 справедливы и для унитарных операторов, причем доказательства отличаются лишь некоторыми упрощениями. Поэтому мы только сформулируем результат.

Пусть $U = \int zE(dz)$, $V = \int \zeta F(d\zeta)$ — унитарные операторы в $\boldsymbol{H}$ (интегрирование ведется по единичной окружности S^1), и пусть m — функция на S^1. Введем в рассмотрение трансформатор Ψ, отвечающий д. о. и.

$$\Psi T = \int\limits_{S^1}\int\limits_{S^1} \frac{m(z) - m(\zeta)}{z - \zeta} F(d\zeta)\, TE(dz). \tag{4.8}$$

Теорема 4.7. *Пусть $\Psi \in (\mathfrak{S}, \mathfrak{S})$ и $V - U \in \mathfrak{S}$. Тогда*

$$m(V) - m(U) = \Psi(V - U), \tag{4.9}$$

и, следовательно, $m(V) - m(U) \in \mathfrak{S}$. В частности, если m удовлетворяет условию Липшица и $V - U \in \mathfrak{S}_2$, то (4.9) выполнено.

5. Перейдем теперь к доказательству леммы 4.4. Предварительно отметим следующее*. Пусть $\eta_S(n)$ — норма в S произвольного** ортопроектора ранга n. Идеал $\mathfrak{S}$ не совпадает поэлементно с $\mathfrak{S}_1$ в том и только том случае, если

$$\inf_n n^{-1}\eta_S(n) = 0. \tag{4.10}$$

Доказательство леммы 4.4. Предположим сначала, что спектр оператора B простой. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть m — натуральное число и пусть натуральное $r = r(m, \varepsilon)$ выбрано так, что

$$\eta_S(r) \leqslant \varepsilon r m^{-1}; \tag{4.11}$$

возможность такого выбора обеспечивается условием (4.10). Положим $\lambda_{mk} = -m + kr^{-1}$, $k = 0, 1, \ldots, 2mr$; $\Delta_{mk} = [\lambda_{m,k-1}, \lambda_{mk})$; $F_{mk} = F(\Delta_{mk})$. Выберем порождающий элемент $\omega \in H$ и введем проекторы

$$P_m(\varepsilon) \equiv P_m = \sum_{k=1}^{2mr} (\cdot, \omega_{mk})\, \omega_{mk}, \tag{4.12}$$

где $\omega_{mk} = \|F_{mk}\omega\|^{-1} F_{mk}\omega$. Покажем, что проекторы P_m обладают нужными свойствами.

Оператор $BP_m - P_mB$ имеет смысл для $f \in D(B)$, причем

$$BP_m f - P_m Bf = \sum_{k=1}^{2mr} [(f, \omega_{mk})\, B\omega_{mk} - (f, B\omega_{mk})\, \omega_{mk}]. \tag{4.13}$$

Если ввести операторы

$$W_m = \sum_{k=1}^{2mr} (\cdot, \omega_{mk})(B\omega_{mk} - \lambda_{mk}\omega_{mk}),$$

то (4.13) можно записать в виде

$$BP_m - P_mB = W_m - W_m^*.$$

---

* См. § 3 гл. III книги [6].

** Величина η_S зависит только от ранга ортопроектора.

Элементы $B\omega_{mk}-\lambda_{mk}\omega_{mk}$, $k=1, \ldots, 2mr$ попарно ортогональны. Поэтому для сингулярных чисел $s_n(W_m)$ оператора W_m находим

$$s_n^2(W_m)=\|(B-\lambda_{mk})\,\omega_{mk}\|^2=\int\limits_{\Delta_{mk}}(\lambda-\lambda_{mk})^2(F(d\lambda)\,\omega_{mk},\ \omega_{mk})\leqslant r^{-2}.$$

Отсюда с учетом (4.10) получаем

$$\|W_m\|_{\mathfrak{S}}\leqslant r^{-1}\eta_{\mathfrak{S}}(2mr)\leqslant r^{-1}2m\eta_{\mathfrak{S}}(r)\leqslant 2\varepsilon,$$

откуда

$$\|BP_m(\varepsilon)-P_m(\varepsilon)\,B\|_{\mathfrak{S}}\leqslant 4\varepsilon. \tag{4.14}$$

Для проверки условия $s\text{-}\lim P_m=I$ удобно перейти к канонической модели оператора B в пространстве $L^2(\sigma)\,R^1$ относительно меры $\sigma(\cdot)=(F(\cdot)\,\omega,\ \omega)$. Легко видеть, что оператор P_m действует на функции $f\in L^2(\sigma)\,R^1$ в соответствии с формулой

$$(P_mf)(x)=\sum_{k=1}^{2rm}\frac{1}{\sigma(\Delta_{mk})}\left[\int\limits_{\Delta_{mk}}f(t)\,\sigma(dt)\right]\chi_{\Delta_{mk}}(x).$$

Соотношение $P_mf\to f$ достаточно установить для какого-либо плотного множества функций, что делается стандартным образом; мы не будем пояснять этого подробнее.

Случай спектра конечной кратности не вносит новых затруднений. В общем случае мы можем представить B в виде счетной ортогональной суммы самосопряженных операторов B_l, $l=1, 2, \ldots$, каждый из которых имеет простой спектр. Обозначим через $P_m^{(l)}(\varepsilon)$, $m=1, 2, \ldots$, проекторы, построенные указанным выше способом для оператора B_l. Пусть n — произвольное натуральное число. Образуем проектор

$$\widetilde{P}_{mn}=\sum_{l=1}^{n}\oplus P_m^{(l)}(n^{-1}).$$

Последовательность $\{\widetilde{P}_{mn}\}$ обладает всеми нужными свойствами. Действительно, из (4.14) непосредственно получаем

$$\|B\widetilde{P}_{mn}-\widetilde{P}_{mn}B\|_{\mathfrak{S}}\leqslant 4.$$

Ясно также, что $s\text{-}\lim\widetilde{P}_{mn}=I$ при $m, n\to\infty$. Лемма доказана.

§ 5. Теоремы о предельном переходе

1. В этом параграфе исследуется предельный переход под знаком д. о. и. при изменении спектральных мер*. Исследование существенно опирается на представление трансформатора Ф, описанное в лемме 2.2. Тем самым всегда будет предпола-

* Простейшие результаты в этом направлении были получены в дипломной работе Т. Г. Тодорова, выполненной в 1969 г. в ЛГУ под руководством М. З. Соломяка. В настоящей статье вопрос исследуется другим методом и в значительно более общей ситуации.

гаться $\varphi \in \mathfrak{A}$, а потому получаемые ниже результаты будут относиться лишь к трансформаторам класса $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R})$. Начнем с предложений условного характера, конкретизация которых приводит к эффективным достаточным условиям осуществимости предельного перехода.

Пусть задана последовательность определенных на Λ спектральных мер $\{E_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$; аналогично на M задана последовательность $\{F_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$. Эти последовательности мер будем обозначать соответственно через $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$. Будем писать также $E_0(\cdot)=E(\cdot)$, $F_0(\cdot)=F(\cdot)$. По всякой функции $\varphi \in \mathfrak{A}$ можно построить трансформаторы Φ_{mn}, определяемые д. о. и.

$$Q_{mn} \equiv \Phi_{mn} T = \int_{\Lambda}\int_{\mathrm{M}} \varphi(\lambda, \mu) F_m(d\mu)\, T E_n(d\lambda), \quad m, n=0, 1, \ldots. \tag{5.1}$$

Если одна из спектральных мер (для определенности мера на M) фиксирована, будем писать Φ_n вместо Φ_{0n} и Q_n вместо Q_{0n}. Вместо Φ_{00}, Q_{00} всегда будем писать Φ и Q. Далее, для любых функций $\alpha \in L^{\infty}\Lambda L^2X$, $\beta \in L^{\infty}\mathrm{M}L^2X$ будем писать

$$a_n(x)=\int_{\Lambda} \alpha(\lambda, x) E_n(d\lambda), \quad b_n(x)=\int_{\mathrm{M}} \beta(\mu, x) F_n(d\mu),$$
$$n=0, 1, \ldots, \tag{5.2}$$

причем $a_0 \equiv a$, $b_0 \equiv b$. Наконец, введем обозначения

$$\varepsilon_n(f; \alpha)=\left[\int_X \|a_n(x) f-a(x) f\|^2 dx\right]^{1/2}, \quad n=1, 2, \ldots,$$

$$\delta_n(f; \beta)=\left[\int_X \|b_n(x) f-b(x) f\|^2 dx\right]^{1/2}, \quad n=1, 2, \ldots.$$

Заметим, что для трансформаторов (5.1), отвечающих одной и той же функции φ вида (2.1), справедлива оценка (2.3)

$$|\Phi_{mn}| \leqslant C(\alpha)\, C(\beta), \tag{5.3}$$

а потому нормы Φ_{mn} в классе $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R})$ ограничены в совокупности.

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 5.1. *1) Множества функций α и элементов f, для которых (при заданной последовательности мер $\boldsymbol{E}$) выполнено соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n(f; \alpha)=0, \tag{5.4}$$

суть подпространства в $L^{\infty}\Lambda L^2X$ и в $\boldsymbol{H}$ соответственно. 2) Множество функций α, для которых (5.4) выполнено равномерно на единичной сфере пространства $\boldsymbol{H}$, есть подпространство в $L^{\infty}\Lambda L^2X$.

Аналогичные утверждения справедливы и относительно предельного соотношения

$$\lim_{m\to\infty} \delta_m(f; \beta)=0. \tag{5.5}$$

Доказательство. 1) Рассмотрим билинейные отображения Γ_n: $\boldsymbol{H} \times L^\infty \Lambda L^2 X \to L^2 X \boldsymbol{H}$, переводящие пару (f, α) в вектор-функцию $a_n(x) f$. Условие (5.4) означает, что $\Gamma_n(f, \alpha) \to \Gamma_0(f, \alpha)$. Поэтому, в силу теоремы Банаха—Штейнгауза, достаточно проверить, что нормы Γ_n ограничены в совокупности. Но в соответствии с (2.5),

$$\|\Gamma_n(f, \alpha)\| \leqslant C(\alpha) \|f\|, \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

и $\|\Gamma_n\| \leqslant 1$. Утверждение 1) доказано.

Докажем утверждение 2). Пусть $\alpha, \alpha' \in L^\infty \Lambda L^2 X$, a_n, a'_n — соответствующие им оператор-функции (5.2). Тогда для любого $f \in \boldsymbol{H}$ с помощью (2.5) получим

$$\left[\int_X \|a_n(x) f - a(x) f\|^2 dx\right]^{1/2} \leqslant \left[\int_X \|a_n(x) f - a'_n(x) f\|^2 dx\right]^{1/2} + \left[\int_X \|a'_n(x) f - a'(x) f\|^2 dx\right]^{1/2} + \left[\int_X \|a'(x) f - a(x) f\|^2 dx\right]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_X \|a'_n(x) f - a'(x) f\|^2 dx\right]^{1/2} + 2C(\alpha - \alpha') \|f\|.$$

Отсюда требуемое утверждение выводится стандартным образом. Лемма доказана.

2. Введем теперь некоторые определения. Будем говорить, что функция φ принадлежит классу $\mathfrak{A}_r^s(\boldsymbol{E})$, если она допускает представление вида (2.1) такое, что для соответствующей функции α условие (5.4) выполнено при любом $f \in \boldsymbol{H}$. Если (5.4) выполнено равномерно на единичной сфере пространства $\boldsymbol{H}$, то будем относить функцию φ к классу $\mathfrak{A}_r^u(\boldsymbol{E})$. Аналогично определяются классы $\mathfrak{A}_l^s(\boldsymbol{F})$, $\mathfrak{A}_l^u(\boldsymbol{F})$ функций φ, для которых соответствующие функции β удовлетворяют условию (5.5).

Замечание 5.2. В силу леммы 5.1 для включения $\varphi \in \mathfrak{A}_r^s(\boldsymbol{E})$ достаточно, чтобы (5.4) выполнялось на каком-либо плотном в $\boldsymbol{H}$ множестве элементов f. То же верно и для $\varphi \in \mathfrak{A}_l^s(\boldsymbol{F})$ относительно (5.5).

Замечание 5.3. Включение $\varphi \in \mathfrak{A}_r^s(\boldsymbol{E}) \cap \mathfrak{A}_l^s(\boldsymbol{F})$ предполагает, что условия (5.4) и (5.5) выполнены, вообще говоря, при двух различных представлениях вида (2.1) для функции φ. То же, разумеется, относится к классам $\mathfrak{A}_r^u(\boldsymbol{E}) \cap \mathfrak{A}_l^u(\boldsymbol{F})$ и т. п.

Введенные классы удобны для формулировки довольно общих („полуэффективных“) условий, обеспечивающих возможность предельного перехода под знаком д. о. и. (5.1).

Предложение 5.4. *1) Если $\varphi \in \mathfrak{A}_r^u(\boldsymbol{E})$, то $|\Phi_n - \Phi| \to 0$. 2) Если $\varphi \in \mathfrak{A}_r^s(\boldsymbol{E})$, то для любого $T \in \boldsymbol{R}$*

$$s\text{-}\lim_{n \to \infty} Q_n = Q. \tag{5.6}$$

3) Если $\varphi \in \mathfrak{A}_r^s(E)$ и $\boldsymbol{S}$ — сепарабельный с.-н. идеал, то Φ_n сильно сходится к Φ в $\boldsymbol{S}$.

Доказательство. Два первых утверждения непосредственно следуют из оценки

$$|(Q_n f, g) - (Qf, g)| \leqslant C(\beta) \| T \| \| g \| \varepsilon_n(f; \alpha), \tag{5.7}$$

вытекающей из (2.5) и представления (2.6). Утверждение 3) достаточно, в силу (5.3), проверить на одномерных операторах вида $Y = (\cdot, f) g$, образующих полное в $\boldsymbol{S}$ множество. Из (5.7) при всяком $T \in \boldsymbol{R}$ находим

$$\left| \operatorname{Sp} \{ T [(\Phi_n - \overline{\Phi}) Y]^* \} \right| = | \operatorname{Sp}(\Phi_n T) Y^* - \operatorname{Sp}(\Phi T) Y^* | \leqslant \leqslant C(\beta) \| T \| \| g \| \varepsilon_n(f; \alpha).$$

Отсюда следует, что

$$\| \overline{\Phi}_n Y - \overline{\Phi} Y \|_1 \leqslant C(\beta) \| g \| \varepsilon_n(f; \alpha).$$

Заменяя здесь $\overline{\Phi}$ на Φ, получаем требуемое утверждение.

Замечание 5.5. Если предельный переход осуществляется по последовательности мер $\boldsymbol{F}$ (а не $\boldsymbol{E}$), то утверждения 1) и 3) предложения 5.4 формулируются вполне аналогично. Однако в утверждении 2) следует заменить (5.6) соотношением $s\text{-}\lim Q_n^* = Q^*$.

Предложение 5.6. *1) Если $\varphi \in \mathfrak{A}_r^u(E) \cap \mathfrak{A}_l^u(F)$, то $|\Phi_{mn} - \Phi| \to 0$ при $m, n \to \infty$. 2) Если $\varphi \in \mathfrak{A}_r^s(E) \cap \mathfrak{A}_l^s(F)$, то для любого $T \in \boldsymbol{R}$*

$$\underset{m,\, n \to \infty}{w\text{-}\lim} Q_{mn} = Q.$$

3) В условиях утверждения 2) имеет место сильная сходимость Φ_{mn} к Φ в любом сепарабельном с.-н. идеале $\boldsymbol{S}$.

Доказательство. Пусть

$$\varphi(\lambda, \mu) = \int_X \alpha(\lambda, x) \tilde{\beta}(\mu, x)\, dx = \int_X \tilde{\alpha}(\lambda, x) \beta(\mu, x)\, dx$$

— представления (возможно, совпадающие) вида (2.1), причем для функции α выполнено (5.4), а для β — (5.5). Тогда, используя (5.7), получим

$$|(Q_{mn} f, g) - (Qf, g)| \leqslant |(Q_{mn} f, g) - (Q_n f, g)| + + |(Q_n f, g) - (Qf, g)| \leqslant C(\tilde{\alpha}) \| f \| \| T \| \delta_m(g; \beta) + + C(\tilde{\beta}) \| g \| \| T \| \varepsilon_n(f; \alpha).$$

Отсюда непосредственно получаются утверждения 1) и 2). Доказательство последнего утверждения не отличается от соответствующего рассуждения в предложении 5.4.

3. В дальнейшем изложении мы ограничиваемся рассмотрением случая, когда Λ совпадает с R^1 или с S^1, хотя иногда возможность обобщений очевидна.

Пусть $X = \Lambda$ (таким образом, $X = R^1$ или $X = S^1$), dx — инвариантная мера на X. Будем относить функцию φ к классу $\mathfrak{N}_r(x)$, если она допускает представление (2.1) при

$$\alpha(\lambda, x) = \gamma(\lambda - x), \qquad \gamma \in L^2 X. \tag{5.8}$$

Ясно, что при этом $C(\alpha) = \|\gamma\|_{L^2}$. Аналогично вводится (при $M = X$, где $M = R^1$ или S^1) класс $\mathfrak{N}_l(X)$. В параграфе 7 будут указаны удобные аналитические признаки принадлежности функции φ классам $\mathfrak{N}$.

Пусть $\Lambda = R^1$, и спектральная мера $E_n(\cdot)$ отвечает самосопряженному в $\boldsymbol{H}$ оператору A_n, $n = 0, 1, \ldots$; $A_0 = A$. Отметим, что для функций α вида (5.8) будет $a_n(x) = \gamma(A_n - x)$.

Теорема 5.7. *1) Пусть $\|A_n - A\| \to 0$. Тогда $\mathfrak{N}_r(R^1) \subset \subset \mathfrak{A}_r^u(E)$. 2) Пусть $\{P_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность перестановочных с A проекторов, такая, что $s\text{-}\lim P_j = I$, все операторы $A_n P_j$ определены на $D(A)$, $(A_n - A) P_j \in \boldsymbol{R}$ и*

$$s\text{-}\lim_{n \to \infty} (A_n - A) P_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{5.9}$$

Тогда $\mathfrak{N}_r(R^1) \subset \mathfrak{A}_r^s(E)$.

Аналогичные утверждения справедливы и для класса $\mathfrak{N}_l(R^1)$.

Доказательство. 1) В соответствии с леммой 5.1, достаточно установить включение $\varphi \in \mathfrak{A}_r^u(E)$ (или $\varphi \in \mathfrak{A}_r^s(E)$) для множества функций $\gamma(\lambda) = (\lambda - z)^{-1}$, $y = \operatorname{Im} z \neq 0$. В самом деле, такие функции плотны в $L^2 R^1$, а для функций вида (5.8) норма α в $L^\infty \Lambda l^2 X$, как уже указывалось, совпадает с нормой γ в $L^2 R^1$. Для любого $f \in \boldsymbol{H}$ имеем

$$(A_n - x - z)^{-1} f - (A - x - z)^{-1} f =$$
$$= -(A_n - x - z)^{-1} (A_n - A)(A - x - z)^{-1} f,$$

откуда

$$\int \|(A_n - x - z)^{-1} f - (A - x - z)^{-1} f\|^2 \, dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{y^2} \int \|(A_n - A)(A - x - z)^{-1} f\|^2 \, dx. \tag{5.10}$$

Далее,

$$\int \|(A_n - A)(A - x - z)^{-1} f\|^2 \, dx \leqslant$$
$$\leqslant \|A_n - A\|^2 \iint \frac{dx}{|\lambda - x - z|^2} (E(d\lambda) f, f) = |y|^{-1} \|A_n - A\|^2 \|f\|^2.$$

Отсюда и из (5.10) вытекает справедливость утверждения 1).

Для доказательства утверждения 2) предположим, что $f \in P_j \boldsymbol{H}$ при каком-нибудь значении j. Запишем подынтегральную функцию в правой части (5.10) в виде $\|(A_n - A) P_j (A - x - z)^{-1} f\|^2$. Интеграл (5.10) стремится к нулю, поскольку подынтегральное выражение, в силу (5.9), стремится к нулю при всех $x \in R^1$, а функция

$$\sup_n \|(A_n - A) P_j\|^2 \cdot \|(A - x - z)^{-1} f\|^2$$

служит суммируемой мажорантой. Остается заметить, что объединение всех множеств $P_j\boldsymbol{H}$ плотно в $\boldsymbol{H}$. Теорема доказана.

Теорема 5.7 дает возможность эффективно проверять условия предложений 5.4, 5.6, поскольку классы $\mathfrak{N}_r$, $\mathfrak{N}_l$ определяются независимо от последовательностей мер $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{F}$. Приведем другое утверждение того же типа, причем теперь не обязательно, чтобы $X = \Lambda$.

Обозначим через $\overline{R}^1$ числовую ось, пополненную двумя несобственными точками $\pm\infty$. Будем относить функцию $\varphi \in \mathfrak{A}$ классу $\mathfrak{M}_r(\overline{R}^1)$ (соответственно $\mathfrak{M}_l(\overline{R}^1)$), если в представлении (2.1) $\alpha \in C\overline{R}^1L^2X$ (соответственно $\beta \in C\overline{R}^1L^2X$). Аналогично определяются классы $\mathfrak{M}_r(S^1)$, $\mathfrak{M}_l(S^1)$.

Теорема 5.8. *Пусть $\varphi \in \mathfrak{M}_r(\overline{R}^1)$. Тогда: 1) Если $D(A_n) = D(A)$ и $\|(A_n - A)(A - i)^{-q}\| \to 0$ при каком-либо $q \in [0, 1]$, то $\varphi \in \mathfrak{A}_r^u(\boldsymbol{E})$. 2) Если выполнены условия второго утверждения теоремы 5.7, то $\varphi \in \mathfrak{A}_r^s(\boldsymbol{E})$.*

Справедливы аналогичные утверждения о вложении $\mathfrak{M}_l(\overline{R}^1)$ в классы $\mathfrak{A}_l^u(\boldsymbol{F})$ и $\mathfrak{A}_l^s(\boldsymbol{F})$.

Доказательство. В пространстве $C\overline{R}^1L^2X$ полное множество образуют функции вида $\alpha(\lambda, x) = h(\lambda)\psi(x)$, где $\psi \in L^2X$, а $h \in C^2R^1$, причем каждая из функций h постоянна вне какого-либо промежутка. Лемма 5.1 позволяет ограничиться функциями указанного вида. Тогда

$$\varepsilon_n(f; \alpha) = \|h(A_n) f - h(A) f\| \|\psi\|_{L^2}. \tag{5.11}$$

При сделанных относительно h предположениях, трансформатор Z_q, определяемый д. о. и.

$$Z_q T = \iint \frac{h(\mu) - h(\lambda)}{\mu - \lambda} (\lambda - i)^q E_n(d\mu) TE(d\lambda), \tag{5.12}$$

заведомо принадлежит классу* $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R})$, а потому, в силу теоремы 4.6,

$$\|h(A_n) - h(A)\| \leqslant |Z_q| \|(A_n - A)(A - i)^{-q}\|.$$

Отсюда, с учетом (5.11), вытекает справедливость первого утверждения.

Для доказательства второго утверждения воспользуемся равенством (4.3), которое запишем в виде

$$Z_0 [A_n E_n(\Delta_k) P_j E(\Delta_k) - E_n(\Delta_k) P_j A E(\Delta_k)] =$$
$$= h(A_n) E_n(\Delta_k) P_j E(\Delta_k) - E_n(\Delta_k) P_j h(A) E(\Delta_k); \tag{5.13}$$

* По этому поводу см. п. 8 § 7.

здесь Z_0 — трансформатор (5.12) при $q=0$, а $\Delta_k=[-k, k]$. Слабый предельный переход в (5.13) при $k\to\infty$ приводит к соотношению

$$Z_0[(A_n-A)P_j]=[h(A_n)-h(A)]P_j, \qquad (5.14)$$

которое влечет за собой равенство

$$\operatorname*{s\text{-}lim}_{n\to\infty}[h(A_n)-h(A)]P_j=0. \qquad (5.15)$$

Здесь следует пояснить, что для вывода (5.15) из (5.14) мы не можем непосредственно воспользоваться предложением 3.3, ибо трансформатор Z_0 сам зависит от n. Требуемый результат получается, однако, из оценки (3.5), которая, очевидно, равномерна относительно одной из спектральных мер.

Из (5.15) и (5.11) для плотного в $\boldsymbol{H}$ множества элементов $f\in\bigcup_j P_j\boldsymbol{H}$ следует нужное соотношение (5.4). Теорема доказана.

Приведем формулировку аналогичного результата для унитарных операторов, ограничиваясь классами $\mathfrak{M}_r$ и $\mathfrak{A}_r$.

Теорема 5.9. *Пусть $\Lambda=S^1$ и пусть $E_n(\cdot)$ — спектральная мера унитарного оператора U_n; $n=0, 1, \ldots, U_0=U$. Если $\|U_n-U\|\to 0$, то $\mathfrak{M}_r(S^1)\subset\mathfrak{A}_r^u(\boldsymbol{E})$; если $U=\text{s-lim}\,U_n$, то $\mathfrak{M}_r(S^1)\subset\mathfrak{A}_r^s(\boldsymbol{E})$.*

Заметим, что $\mathfrak{N}(S^1)\subset\mathfrak{M}(S^1)$, а потому унитарный аналог теоремы 5.7 не нужен. Для самосопряженных операторов дело обстоит иначе, так как при $\Lambda=X=R^1$ всякая функция вида (5.8) принадлежит CR^1L^2X, но не $C\overline{R^1}L^2X$. Разумеется, если самосопряженные операторы ограничены, то и здесь теорема 5.8 покрывает результат теоремы 5.7.

Сделаем, наконец, следующее замечание. Пусть функция α (рассматриваемая как функция на $\Lambda=R^1$ со значениями в L^2X) имеет разрывы первого рода в конечном или счетном наборе точек множества Λ, не принадлежащих точечному спектру предельного оператора A. Можно показать, что тогда утверждение 2) теоремы 5.8 сохраняет силу.

§ 6. О формуле Ю. Л. Далецкого — С. Г. Крейна

1. Рассмотрим вопрос о дифференцировании оператор-функций вида $h(A(s))$, где h — комплексная функция на R^1, $A(s)=A+sT$, A — самосопряженный оператор в $\boldsymbol{H}$, $T=T^*\in\boldsymbol{R}$, s — вещественный параметр. Для сокращения будем пользоваться обозначениями

$$H(s)=h(A(s)),\quad A(s)=A+sT,\quad s\in R^1, \qquad (6.1)$$

$$\psi_h(\lambda, \mu)=(\mu-\lambda)^{-1}[h(\mu)-h(\lambda)],\quad \lambda, \mu\in R^1. \qquad (6.2)$$

Функция ψ_h симметрична, а потому ее включение в классы с индексами r и l выполняется одновременно; поэтому в следующей теореме эти индексы опускаются.

Теорема 6.1. *Пусть* $\psi_h \in \mathfrak{N}(R^1) \cup \mathfrak{M}(\overline{R}^1)$ *и пусть* $T \in \boldsymbol{R}$. *Тогда оператор-функция* $H(s)$ *непрерывно дифференцируема в* $\boldsymbol{R}$. *Производная* dH/ds *выражается д. о. и.*

$$\frac{dH}{ds} = \iint \psi_h(\lambda, \mu) E_s(d\mu) T E_s(d\lambda), \tag{6.3}$$

где $E_s(\cdot)$ — *спектральная мера оператора* $A(s)$. *Если* T *принадлежит с.-н. идеалу* $\boldsymbol{S}$, *то непрерывная дифференцируемость* $H(s)$ *имеет место в норме идеала* $\boldsymbol{S}$.

Доказательство. В силу теоремы 4.3 справедливо представление

$$\frac{H(s+t) - H(s)}{t} = \iint \psi_h(\lambda, \mu) E_{s+t}(d\mu) T E_s(d\lambda).$$

Перейдем к пределу при $t \to 0$. Это можно сделать на основании п. 1) теоремы 5.7, п. 1) теоремы 5.8 и п. 1) предложения 5.4. В результате придем к формуле (6.3), причем предельный переход осуществлен в нужной норме. Непрерывная зависимость производной от s в соответствующей норме прямо следует из п. 1) предложения 5.6. Теорема доказана.

Заметим, что специальный (линейный) способ вхождения параметра в $A(s)$ фактически не уменьшает общности: общий случай сводится к рассмотренному обычным способом. Формула (6.3) и есть формула Ю. Л. Далецкого — С. Г. Крейна. Она была получена ими в [4] для ограниченных операторов $A(s)$ и для функций класса C^2, причем дифференцируемость понималась в смысле нормы в $\mathbf{R}$. Метод, использованный в [4], существенно отличается от нашего.

Замечание 6.2. Пусть $T \in \boldsymbol{S}_1$. Тогда формула (6.3) с учетом (2.9), (2.10) непосредственно приводит к соотношению

$$\operatorname{Sp} \frac{dH(s)}{ds} = \int \frac{dh(\lambda)}{d\lambda} \operatorname{Sp}[E_s(d\lambda) T]. \tag{6.4}$$

2. Аналогичный результат справедлив для унитарных операторов. Пусть U — унитарный оператор, $T = T^* \in \boldsymbol{R}$, m — функция на S^1 и

$$\psi_m(z, \zeta) = (z - \zeta)^{-1} [m(z) - m(\zeta)]. \tag{6.5}$$

Положим

$$U(s) = e^{isT} U, \quad W(s) = m(U(s)), \quad s \in R^1,$$

и обозначим через $E_s(\cdot)$ спектральную меру оператора $U(s)$.

Теорема 6.3. *Пусть* $\psi_m \in \mathfrak{M}(S^1)$. *Оператор-функция* $W(s)$ *непрерывно дифференцируема в* $\boldsymbol{R}$, *причем производная дается формулой*

$$\frac{dW(s)}{ds} = \int\limits_{S^1}\int\limits_{S^1} iz\psi_m(z, \zeta) E_s(d\zeta) T E_s(dz). \tag{6.6}$$

Если $T \in \mathbf{S}$, то непрерывная дифференцируемость имеет место в норме с.-н. идеала $\mathbf{S}$.

Доказательство. Применяя формулы (4.8), (4.9), получим

$$\frac{W(s+t)-W(s)}{t} = \int\limits_{S^1}\int\limits_{S^1} z\psi_m(z, \zeta)\, E_{s+t}(d\zeta)\left[\frac{e^{itT}-I}{t}\right] E_s(dz). \quad (6.7)$$

При $t \to 0$ оператор-функция $t^{-1}(e^{itT}-I)$ сходится в $\mathbf{R}$ (а при $T \in \mathbf{S}$ и в норме идеала $\mathbf{S}$) к оператору iT. Возможность предельного перехода в соответствующем трансформаторе обеспечивается теоремой 5.9 и п. 1) предложения 5.4. Учет равномерного характера обоих предельных переходов позволяет произвести их одновременно. В результате из (6.7) получим (6.6). Непрерывность производной (6.6) вытекает из п. 1) предложения 5.6. Теорема доказана.

Отметим формулу, аналогичную формуле (6.4)

$$\operatorname{Sp}\frac{dW(s)}{ds} = \int\limits_{S^1} iz\,\frac{dm(z)}{dz}\operatorname{Sp}[TE_s(dz)]. \quad (6.8)$$

3. Вернемся к рассмотрению оператор-функции (6.1), но откажемся от условия ограниченности оператора T. Предположим, что в некоторой окрестности точки $s=0$ все операторы $A(s)$ самосопряжены на одной и той же области определения

$$D(A(s)) = D(A). \quad (6.9)$$

В дальнейшем считаем, что s принадлежит этой окрестности. Предположим, что при некотором $q \in (0, 1]$

$$T_q(s) \equiv T(A(s)-i)^{-q} \in \mathbf{R}, \quad q \in (0, 1]. \quad (6.10)$$

Заметим, что из (6.9) заведомо следует (6.10) при $q=1$. Однако, если (6.10) выполнено при $q<1$, то это позволяет расширить класс функций h в определении $H(s)$. Из (6.9) следует также, что (6.10) или условие

$$T_q(s) \in \mathbf{S}, \quad q \in (0, 1] \quad (6.11)$$

для какого-нибудь с.-н. идеала достаточно проверять при $s=0$. При этом $T_q(s)$ непрерывно зависит от s в норме класса $\mathbf{R}$ или $\mathbf{S}$. Условимся обозначать через $\psi_{h,q}$ функцию $(\lambda - i)^q \times \psi_h(\lambda, \mu)$.

Теорема 6.3. *Пусть выполнено* (6.10) *и* $\psi_{h,q} \in \mathfrak{M}_r(\overline{R}^1)$. *Тогда функция* $H(s)$ *дифференцируема в* $\mathbf{R}$, *причем*

$$\frac{dH(s)}{ds} = \iint \psi_{h,q}(\lambda, \mu)\, E_s(d\mu)\, T_q(s)\, E_s(d\lambda). \quad (6.12)$$

Если, кроме того, $\psi_{h,q} \in \mathfrak{M}_l(\overline{R}^1)$, *то производная* (6.12) *непрерывна в* $\mathbf{R}$. *Если выполнено* (6.11), *то в обоих утверждениях можно заменить* $\mathbf{R}$ *на* $\mathbf{S}$.

Теорема 6.4. *Пусть* $\psi_{h,q} \in \mathfrak{N}_r(R^1)$. *Если выполнено* (6.10), *то производная* (6.12) *существует в сильном смысле. Если* *выполнено* (6.11), *а идеал* $\mathbf{S}$ *сепарабелен, то производная* (6.12) *существует в норме* $\mathbf{S}$. *Если* $\psi_{h,q} \in \mathfrak{N}_r(R^1) \cap \mathfrak{N}_l(R^1)$, *то при условии* (6.10) *производная* (6.12) *слабо непрерывна, а при условии* (6.11) — *непрерывна в норме сепарабельного идеала* $\mathbf{S}$.

Доказательство обеих теорем основано на представлении

$$t^{-1}[H(s+t)-H(s)] = \iint \psi_{h,q}(\lambda, \mu)\, E_{s+t}(d\mu)\, T_q(s)\, E_s(d\lambda),$$

даваемом теоремой 4.6. Доказательство теоремы 6.3 сводится к ссылкам на п. 1) теоремы 5.8 и далее на п. 1) предложений 5.4 и 5.6. В условиях теоремы 6.4 при $q>0$ мы не можем воспользоваться п. 1) теоремы 5.7 и вынуждены использовать п. 2) этой теоремы. Дальнейшее сводится к ссылке на п. 2) и п. 3) предложений 5.4 и 5.6. Теорема доказана.

В заключение отметим, что в условиях обеих теорем при $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1$ будет

$$\operatorname{Sp}\frac{dH(s)}{ds} = \int (\lambda - i)^q \frac{dh(\lambda)}{d\lambda} \operatorname{Sp}[E_s(d\lambda)\, T_q(s)]. \qquad (6.13)$$

§ 7. Замечания о функциональных классах

Результаты предшествующих параграфов сформулированы в терминах классов $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$, введенных выше. Рассмотрим некоторые свойства этих классов и их взаимоотношения с другими, более традиционными функциональными классами. Предварительно отметим, что классы $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$ нелинейны. Можно было бы рассмотреть линейную оболочку каждого из этих классов и затем замкнуть ее по естественно возникающей кросс-норме. Однако такое „расширение“ вряд ли практически полезно.

1. Отметим прежде всего, что функция $\varphi \in \mathfrak{N}_r(R^1)$ равномерно непрерывна по первому аргументу. Действительно,

$$|\varphi(\lambda+\tau, \mu) - \varphi(\lambda, \mu)|^2 \leqslant C^2(\beta) \int |\gamma(\lambda+\tau-x) - \gamma(\lambda-x)|^2\, dx,$$

и остается сослаться на непрерывность в целом функции $\gamma \in L^2R^1$. Точно так же, если $\varphi \in \mathfrak{N}_l(R^1)$, то она равномерно непрерывна по второму аргументу. Подобным же образом обстоит дело для функций классов $\mathfrak{M}(\overline{R}^1)$, а также для классов $\mathfrak{N}(S^1)$, $\mathfrak{M}(S^1)$. Если $\varphi \in \mathfrak{N}_r \cap \mathfrak{N}_l$ (или $\varphi \in \mathfrak{M}_r \cap \mathfrak{M}_l$), то φ равномерно непрерывна по совокупности переменных. Отсюда, в частности, вытекает следующее: если для (симметричной) функции (6.2) выполнено включение $\psi_h \in \mathfrak{N} \cup \mathfrak{M}$, то соответствующая функция h имеет равномерно непрерывную ограниченную производную.

2. Классы $\mathfrak{N}(S^1)$ удобно описывать в терминах рядов Фурье, а классы $\mathfrak{N}(R^1)$ — в терминах интегралов Фурье.

Рассмотрим сначала случай окружности. Пусть $\vartheta(z, \mu) \in \in \mathfrak{N}_r(S^1)$ и пусть

$$\vartheta(z, \mu) = \int_{S^1} \gamma(zw^{-1}) \beta(\mu, w)\, dw \quad (z \in S^1) \tag{7.1}$$

— соответствующее интегральное представление.* Пусть $\hat{\gamma}_n$ — коэффициенты Фурье функции γ:

$$\hat{\gamma}_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} \gamma(z) z^{-(n+1)}\, dz, \quad n = 0, \pm 1, \ldots,$$

а $\hat{\vartheta}_n(\mu)$, $\hat{\beta}_n(\mu)$ — коэффициенты Фурье функций $\vartheta(\cdot, \mu)$, $\beta(\cdot, \mu)$. Из (7.1) вытекает соотношение

$$\hat{\vartheta}_n(\mu) = 2\pi i \hat{\gamma}_n \hat{\beta}_n(\mu),$$

причем, поскольку $\beta \in L^\infty ML^2S^1$, $\gamma \in L^2S^1$, то

$$\{\hat{\beta}_n(\cdot)\} \in L^\infty \mathrm{M} l^2, \quad \{\hat{\gamma}_n\} \in l^2.$$

Таким образом, справедливо следующее предложение.

Предложение 7.1. *Включение* $\vartheta \in \mathfrak{N}_r(S^1)$ *равносильно существованию такой последовательности* $\{\hat{\gamma}_n\} \in l^2(-\infty, +\infty)$, *что*

$$\sup_\mu \sum_n |\hat{\gamma}_n|^{-2} |\hat{\vartheta}_n(\mu)|^2 < \infty. \tag{7.2}$$

Для функций ϑ, не зависящих от μ, условие (7.2) означает абсолютную сходимость ряда Фурье; однако, в общем случае условие (7.2) жестче, поскольку числа $\hat{\gamma}_n$ не должны зависеть от μ. Разумеется, условие (7.2) выполнено, если

$$\sum_n \sup_\mu |\hat{\vartheta}_n(\mu)| < \infty. \tag{7.3}$$

3. Пусть теперь $\varphi \in \mathfrak{N}_r(R^1)$, т. е. допускает представление

$$\varphi(\lambda, \mu) = \int \gamma(\lambda - x) \beta(\mu, x)\, dx \quad (\gamma \in L^2R^1,\ \beta \in L^\infty ML^2R^1).$$

Обозначая символом $\wedge$ преобразование Фурье по переменной $x \in R^1$, получим:

$$\varphi(\lambda, \mu) = 2\pi \int \hat{\gamma}(\xi) \hat{\beta}(\mu, \xi) e^{i\lambda\xi}\, d\xi, \tag{7.4}$$

причем подынтегральная функция суммируема при почти всех $\mu \in M$. Представление (7.4) приводит к следующему аналогу предложения 7.1.

Предложение 7.2. *Включение* $\varphi \in \mathfrak{N}_r(R^1)$ *равносильно существованию такой функции* $\hat{\gamma} \in L^2R^1$, *что*

$$\sup_\mu \int |\hat{\gamma}(\xi)|^{-2} |\hat{\varphi}(\mu, \xi)|^2\, d\xi < \infty. \tag{7.5}$$

---

* Представление (7.1) фактически не отличается от представления (2.1) при условии (5.8), но несколько удобнее в записи.

Условие (7.5) выполнено, если выполнен аналог условия (7.3)

$$\int \sup_{\mu} |\hat{\varphi}(\mu, \xi)|\, d\xi < \infty.$$

Более удобными, однако, являются признаки принадлежности φ классам $\mathfrak{N}$, формулируемые в терминах интегральной гладкости. Наиболее общий признак такого рода установлен в [3] на основе одного результата Берлинга. Он заключается в следующем.

Предложение 7.3. *Пусть существует такая функция* $\omega(\tau)$, $\tau > 0$, *что*

$$\int_0^\infty \tau^{-3/2}\, \omega(\tau)\, d\tau < \infty \tag{7.6}$$

и при почти всех $\mu \in \mathrm{M}$ *выполняется неравенство*

$$\int |\varphi(\lambda + \tau, \mu) - \varphi(\lambda, \mu)|^2\, d\lambda \leqslant \omega^2(\tau). \tag{7.7}$$

Тогда $\varphi \in \mathfrak{N}_r(R^1)$.

Аналогично формулируется признак принадлежности φ классу $\mathfrak{N}_r(S^1)$. Подробнее условия (7.6), (7.7) обсуждаются в [3].

Отметим еще следующее. Пусть преобразование $z = z(\lambda)$ есть непрерывная биекция расширенной оси R^1 (с отождествленными точками $\pm\infty$) на S^1. Тогда преобразование $\vartheta \to \varphi$, определяемое формулой $\varphi(\lambda, \mu) = \vartheta(z(\lambda), \mu)$, очевидно, отображает $\mathfrak{M}_r(S^1)$ в $\mathfrak{M}_r(\overline{R}^1)$. Поскольку, как уже отмечалось, $\mathfrak{N}_r(S^1) \subset \mathfrak{M}_r(S^1)$, этим можно пользоваться для проверки включения $\varphi \in \mathfrak{M}_r(\overline{R}^1)$.

4. Проанализируем теперь условия, обеспечивающие включение $\psi_m \in \mathfrak{N}(S^1)$ для функции (6.5). Эти условия получим в терминах исходной функции m. Рассмотрим остатки „положительной“ и „отрицательной“ частей ряда Фурье для $m(z)$:

$$\sigma_n^{\pm}(z) = \sum_{\pm k = n} \hat{m}_k z^k \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots;\ \ z \in S^1).$$

Предложение 7.4. *Пусть существует последовательность* $\{\hat{\gamma}_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$, *такая, что*

$$\sup_z \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{\gamma}_n|^{-2} |\sigma_n^{\pm}(z)|^2 < \infty.$$

Тогда $\psi_m \in \mathfrak{N}(S^1)$. *В частности*, $\psi_m \in \mathfrak{N}(S^1)$, *если*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_z |\sigma_n^{\pm}(z)| < \infty. \tag{7.8}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть функцию $m^+(z)=\sigma_0^+(z)$ и соответствующую функцию (6.5), которую обозначим через ψ_m^+. Имеем:

$$\psi_m^+(z, \zeta)=\sum_{n=1}^{\infty}\hat{m}_n\sum_{k=0}^{n-1}z^k\zeta^{n-k-1}=\sum_{k=0}^{\infty}z^k\zeta^{-k-1}\sigma_{k+1}^+(\zeta).$$

Таким образом, модули коэффициентов Фурье функции ψ_m^+ совпадают с $|\sigma_{k+1}^+(\zeta)|$. Остается сослаться на условие (7.2), а также заметить, что (7.3) непосредственно приводит к (7.8).

Предложение 7.5. *Условия предложения 7.4 выполняются в каждом из следующих случаев: 1) ряд Фурье функции* $m'(z)$ *абсолютно сходится;* 2) $m'(z)\in\mathrm{Lip}\,\varepsilon$ *при каком-либо* $\varepsilon>0$.

Доказательство сводится к проверке условия (7.8). Очевидно, $|\sigma_n^+(z)|\leqslant\sum_{k\geqslant n}k^{-1}|(\hat{m}')_k|$. Отсюда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sup_z|\sigma_n^+(z)|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}k^{-1}|(\hat{m}')_k|=\sum_{k=1}^{\infty}|(\hat{m}')_k|,$$

и утверждение 1) доказано. Для доказательства утверждения 2) достаточно принять во внимание оценку Лебега $|\sigma_n^{\pm}(z)|\leqslant\leqslant cn^{-(1+\varepsilon)}\ln(n+1)$ (ср. доказательство теоремы 7.10 в [1]).

5. Укажем теперь условия, обеспечивающие включение $\psi_h\in\mathfrak{N}(R^1)$ для функции (6.2). Пусть функция h допускает интегральное представление

$$h(\lambda)-h(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda\xi}-1}{i\xi}\tau(d\xi), \tag{7.9}$$

где τ — некоторая (комплексная) мера в R^1, удовлетворяющая условию

$$\int\frac{|\tau|(d\xi)}{1+|\xi|}<\infty. \tag{7.10}$$

Если мера τ конечна, то представление (7.9) равносильно представлению производной в виде

$$h'(\lambda)=\int e^{i\lambda\xi}\tau(d\xi).$$

Из формулы (7.9) следует, что

$$\psi_h(\lambda, \mu)=\int\frac{e^{i\mu\xi}-e^{i\lambda\xi}}{i\xi(\mu-\lambda)}\tau(d\xi).$$

Предположим, что у меры τ отсутствует точечная нагрузка при $\xi=0$ (это равносильно выделению у функции h линейного слагаемого). Введем в рассмотрение функцию

$$\psi_h^+(\lambda, \mu)=\int_0^{\infty}\frac{e^{i\mu\xi}-e^{i\lambda\xi}}{i\xi(\mu-\lambda)}\tau(d\xi),$$

а также функцию

$$r^+(\xi, \mu) = \int_\xi^\infty \frac{e^{i\mu s}}{s} \tau(ds); \quad \xi > 0.$$

Аналогично определим функции ψ_h^- и r^-. Интегрируя по частям, находим

$$\psi_h^+(\lambda, \mu) = -\int_0^\infty \frac{e^{i(\lambda-\mu)\xi} - 1}{i(\lambda-\mu)} d_\xi r^+(\xi, \mu) = \int_0^\infty e^{i(\lambda-\mu)\xi} r^+(\xi, \mu)\, d\xi$$

(нетрудно проверить, что внеинтегральные члены обращаются в нуль). Таким образом,

$$|\hat{\psi}_h^+(\xi, \mu)| = |r^+(\xi, \mu)|,$$

и использование предложения 7.2 приводит к следующему результату.

Предложение 7.6. *Пусть функция h допускает представление* (7.9) *с мерой* τ, *удовлетворяющей условию* (7.10). *Пусть, далее, существует такая функция* $\hat{\gamma} \in L^2R^1_+$, *что*

$$\sup_\mu \int_0^\infty |\hat{\gamma}(\xi)|^{-2} |r^\pm(\xi, \mu)|^2 d\xi < \infty.$$

Тогда $\psi_h \in \mathfrak{N}(R^1)$. *В частности, это верно, если*

$$\int_0^\infty \sup_\mu |r^\pm(\xi, \mu)|\, d\xi < \infty.$$

Предложение 7.7*. *Пусть функция h допускает представление* (7.9) *с конечной мерой* τ. *Тогда* $\psi_h \in \mathfrak{N}(R^1)$.

Действительно, в рассматриваемом случае

$$\int_0^\infty \sup_\mu |r^+(\xi, \mu)|\, d\xi \leqslant \int_0^\infty d\xi \int_\xi^\infty \frac{|\tau|(ds)}{s} = \int_0^\infty |\tau|(ds) < \infty.$$

6. Нижеследующее условие, достаточное для принадлежности функции ψ_h классу $\mathfrak{N}(R^1)$, не покрывается условием предложения 7.7.

Предложение 7.8. *Пусть* $h' \in L^\infty R^1 \cap L^p R^1 \cap \mathrm{Lip}\,\varepsilon$ *при каких-либо* $p \geqslant 1$, $\varepsilon > 0$. *Тогда* $\psi_h \in \mathfrak{N}(R^1)$.

Доказательство проведем, опираясь на предложение 7.3. Не уменьшая общности, можно считать, что $p > 2$. Модуль непрерывности η производной h' удовлетворяет оценке **

$$\eta(\delta) \leqslant c \cdot \min(\delta^\varepsilon; 1). \tag{7.11}$$

---

* Функции h, удовлетворяющие условию предложения 7.7, играют существенную роль в теории функции спектрального сдвига М. Г. Крейна [7].

** Буквой c обозначаем различные постоянные, точное значение которых нам безразлично.

Дальнейшие оценки используют элементарные неравенства

$$|\psi_h(\lambda+\tau,\ \mu)-\psi_h(\lambda,\ \mu)|\leqslant \leqslant \tau\cdot\min\left\{\frac{\eta(\tau)}{\tau};\ \frac{\eta(|\lambda-\mu|)}{|\lambda-\mu|};\ \frac{\eta(|\lambda+\tau-\mu|)}{|\lambda+\tau-\mu|}\right\}; \tag{7.12}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{h(\lambda+\tau)-h(\lambda)}{\tau}\right|^p d\lambda\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|h'(\lambda)|^p d\lambda, \tag{7.13}$$

а также неравенство Харди

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi_h(\lambda,\ \mu)|^p d\lambda\leqslant c\int_{-\infty}^{\infty}|h'(\lambda)|^p d\lambda \tag{7.14}$$

(постоянная c здесь не зависит от μ).

Рассмотрим интеграл

$$\omega^2(\tau)=\int|\psi_h(\lambda+\tau,\ \mu)-\psi_h(\lambda,\ \mu)|^2 d\lambda=\int_{\mu-\frac{\tau}{2}}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\mu-\frac{\tau}{2}}\equiv J_1+J_2. \tag{7.15}$$

Оба слагаемых оцениваются одинаково. Оценим интеграл J_1. Пусть сначала $\tau\geqslant 1$. В этом случае преобразуем подынтегральное выражение в (7.15) к виду

$$\left|\frac{h(\lambda)-h(\mu)}{\lambda-\mu}-\frac{h(\lambda+\tau)-h(\lambda)}{\tau}\right|^2\cdot\frac{\tau^2}{(\lambda+\tau-\mu)^2}$$

и затем оценим интеграл J_1 по неравенству Гельдера, принимая во внимание (7.13) и (7.14). В результате получим $J_1\leqslant c\tau^{1-2/p}$, откуда

$$\omega(\tau)\leqslant c\tau^{1/2-p^{-1}}\quad(\tau\geqslant 1). \tag{7.16}$$

Если $\tau\leqslant 1$, то разбиваем интеграл J_1 на три слагаемых:

$$J_1=J_{11}+J_{12}+J_{13}=\int_{\mu-\frac{\tau}{2}}^{\mu}+\int_{\mu}^{\mu+1}+\int_{\mu+1}^{\infty}.$$

Интеграл J_{13} оценивается уже описанным способом; это приводит к неравенству $J_{13}\leqslant c\tau^2$. При оценке интегралов J_{11}, J_{12} используются неравенства (7.11), (7.12). Мы получаем $J_{11}\leqslant c\tau^{1+2\varepsilon}$, $J_{12}\leqslant c\tau^{1+2\varepsilon}$. Таким образом,

$$\omega(\tau)\leqslant c(\tau+\tau^{1/2+\varepsilon})\quad(\tau\leqslant 1). \tag{7.17}$$

Оценки (7.16) и (7.17) показывают, что интеграл (7.6) конечен. Предложение доказано.

7. При исследовании функций $\psi_{h,q}(\lambda,\ \mu)=(\lambda-i)^q\psi_h(\lambda,\mu)$ иногда полезно сведение к случаю окружности.

Предложение 7.9. *Пусть $h(\lambda)$ — функция на R^1 и $m(z)$ — функция на окружности, определяемая соотношением*

$$m(z) = h\{i[l + z)/(l - z)]\}.$$

Если $\psi_m \in \mathfrak{N}(S^1)$, *то при любом* $q \leqslant 1$ *будет* $\psi_{h,q} \in \mathfrak{M}_r(R^1) \cap \mathfrak{M}_l(R^1)$.

В самом деле, интегральное представление вида (7.1) для функции ψ_m непосредственно приводит к требуемым интегральным представлениям для функции $\psi_{h,q}$.

8. При доказательстве утверждения 1) теоремы 5.8 использовалось то, что для функций $h \in C^2\overline{R}^1$, постоянных вне некоторого промежутка, имеет место включение $\psi_{h,q} \in \mathfrak{A}(R^1)$. Действительно, нетрудно показать, что $\psi_{h,q} \in \mathfrak{N}_l(R^1) \subset \mathfrak{A}(R^1)$. Нужные оценки получаются так же, как при доказательстве предложения 7.8; возникают лишь упрощения, связанные с постоянством функции h вне конечного промежутка.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк. Сб. Проблемы математической физики, вып. 1. Изд. ЛГУ, 33—67, 1966.
2. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк. Сб. Проблемы математической физики, вып. II. Изд. ЛГУ, 26—60, 1967.
3. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк. Изв. ВУЗов, математика, № 9, 11—17, 1969.
4. Ю. Л. Далецкий, С. Г. Крейн. Труды семинара по функциональному анализу, вып. 1, Воронеж, 81—105, 1956.
5. М. Г. Крейн. Сб. Первая летняя математическая школа, вып. 1, Киев, 103—187, 1964.
6. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. Изд. «Наука», 1965.
7. К. Тельнер. Сб. Проблемы математического анализа, вып. II. Изд. ЛГУ, 79—99, 1969.
8. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк. «Вестник ЛГУ», № 7, 43—53, 1967; № 13, 21—28, 1967; № 1, 35—48, 1969.
9. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк. Записки научных семинаров ЛОМИ, т. 27, 33—46, 1972.