

U N I W E R S Y T E T W R O C Ł A W S K I
im. Bolesława Bieruta
Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii

Andrzej Berowiec

RELATYWISTYCZNA MECHANIKA KWANTOWA Z ZACHOWANYM
PRĄDEM PRAWDOPODOBIENSTWA

Praca d o k t o r s k a
wykonana w Instytucie Fizyki
Teoretycznej pod kierunkiem
doc.dra hab. Arkadiusza Jadczyka.

W R O C Ł A W 1984

S p i s t r e ś c i

	str.
W s t ę p	4
 R o z d z i a ł I	
/A/ Ograniczenia na hamiltonian wynikające z zasady zachowania prądu prawdopodobieństwa	8
/B/ Relatywistyczna mechanika kwantowa z zachowanym prądem prawdopodobieństwa jako współzmienniczą reprezentacją logiki przyczynowej	16
/C/ Dowód podstawowego twierdzenia 1.3	22
 R o z d z i a ł II	
/A/ Skończenie wymiarowe reprezentacje r.h.a	30
/B/ Reprezentacje r.h.a z antykomutującymi składowymi operatora prędkości	33
/C/ Reprezentacje r.h.a z komutującymi składowymi operatora prędkości	38
 R o z d z i a ł III	
/A/ Reprezentacja stowarzyszona z reprezentacją r.h.a ..	45
/B/ Dowód twierdzenia 3.1	47
/C/ Związek z teorią niezmienniczych równań falowych ...	55
L i t e r a t u r a	61

W s t ę p

Problem lokalizowalności w relatywistycznej mechanice kwantowej nie ma do dziś zadowalającego rozwiązania. Wyczerpująca dyskusja różnych podejść do tego zagadnienia znajduje się w artykule [4]. W klasycznej już pracy [1], Newton i Wigner skonstruowali operatory położenia dla układów /elementarnych/ kwantowych opisanych nieprzywiedlnymi reprezentacjami grupy Poincarego. Jednakże operatory te nie spełniają warunku przyczynowości. Innym defektem takich teorii jest brak dobrej interpretacji probabilistycznej. Okazuje się, że nie można pogodzić warunku spektralnego /dodatniość hamiltonianu/ z przyczynowością [9,41]. Wynika stąd konieczność użycia, do opisu relatywistycznych układów kwantowych, przywiedlnych reprezentacji grupy Poincarego.

Z drugiej strony, sukcesy teorii Diraca i związanej z nią ^{kwantowej} elektrodynamiki, zachęciły wielu autorów do rozwinięcia teorii niezmienniczych równań falowych /pierwszego rzędu/, w ramach klasycznej teorii pola /formalizm lagrange'owski/ [23-25, 32-34]. W wersji drugiego kwantowania spodziewano się otrzymać dobrą teorię fizyczną. Wkrótce okazało się jednak, że podejście to jest źródłem nowych problemów, takich jak akauzalność i niekonsystencja w obecności "minimalnie włączonego" pola zewnętrznego [29-31]. Równocześnie badane były teorie nieskończenie komponentowe [37-39]. Główną przyczyną tych zainteresowań była możliwość zastosowania do opisu relatywistycznych

układów złożonych z nietrywialnym spektrum masy i spinu, jak np. atom wodoru, stany wzbudzone itp.

Równolegle do rozwoju teorii niezmienniczych równań falowych badano ich interpretację kwantowo-mechaniczną [2,14,42,43]. Barut i Malin pokazali, że spośród szerokiej klasy modeli tylko teoria Diraca spełnia wymagane postulaty. Wiele prac poświęcono tzw. schrödingerskiej postaci równań falowych /niejawnie współzmienniczych/ [42-46]. Poza przypadkiem Diraca hamiltonian w takich teoriach był nieliniowy w pędach.

Istotny wkład do rozwiązania problemu lokalizacji wnieśli Cegła i Jadczyk. Połączyli oni ideę przyczynowości i lokalizacji w konstrukcji logiki przyczynowej czasoprzestrzeni [5,6]. Mechanika kwantowa rozumiana jest jako współzmiennicza reprezentacja takiej logiki, za pomocą operatorów rzutowych w przestrzeni Hilberta. Ci sami autorzy rzucili nowe światło na rolę jaką w teorii kwantowej odgrywa zachowany prąd prawdopodobieństwa, a mianowicie służy on do konstrukcji stanów na logice przyczynowej [7]. Operatorowy prąd prawdopodobieństwa badany był w pracach [8,9]. Jadczyk sklasyfikował współzmiennicze reprezentacje logiki antyprzyczynowej [12].

Tematem niniejszej pracy jest relatywistyczna mechanika kwantowa, rozumiana jako współzmiennicza reprezentacja logiki przyczynowej, generowana przez operatorowy prąd prawdopodobieństwa [10,11].

Rozdział I zawiera zarówno podstawowe idee jak i główny wynik pracy, twierdzenie 1.3. Stanowi ono o postaci generatorów grupy Poincarego w relatywistycznej mechanice kwantowej.

W szczególności hamiltonian układu musi być liniowy w pędach. Okazuje się, że teorie takie zadane są przez pewną algebrę operatorów, działających w przestrzeni stanów wewnętrznych. Algebrę tę będziemy nazywać relatywistyczną algebrą hamiltonowską /r.h.a./. Dalsza część pracy poświęcona jest reprezentacjom r.h.a.

W rozdziale II sklasyfikowano dwa rodzaje reprezentacji r.h.a - z komutującymi i antykomutującymi składowymi operatora prędkości. Brak jest przykładów innych typów reprezentacji. W przypadku skończone wymiarowym tylko neutrino Weyla i elektron Diraca spełniają przyjęte założenia. W przypadku reprezentacji "fermionowych" równanie Schrödingera jest formalnie takie samo jak w teorii Weyla czy Diraca, z tą różnicą, że funkcja falowa i jej własności transformacyjne zależą od dodatkowego parametru zespolonego. W przypadku "bozonowym" reprezentacje r.h.a są we wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości z nieprzywiedlnymi unitarnymi reprezentacjami grupy Poincarégo. W tym wypadku nasuwa się analogia z teoriami bilokalnymi typu Yukawy [40].

W rozdziale III wykazano związek pomiędzy reprezentacjami r.h.a a pewną klasą nieunitarnych reprezentacji grupy Lorentza. Wprawdzie nie prowadzi to do nowych przykładów reprezentacji r.h.a /twierdzenie 3.1/, ale okazuje się przydatne do wykazania związku z teorią niezmienniczych równań falowych /twierdzenia 3.2 i 3.3/.

Dowody wszystkich twierdzeń w pracy przeprowadzone są na poziomie formalno-algebraicznym. W szczególności oznacza

to że autora nie interesują dziedziny rozważanych operatorów. Niemniej końcowe rezultaty można sformułować w bardziej precyzyjnej pod względem matematycznym postaci.

Wielkości podkreślone oznaczają obiekty trójskładnikowe. /trójwektory/. W przypadku relatywistycznym autor stosuje zapis kowariantny z metryką $/-, +, +, +/$. Przyjęto umowę sumacyjną dla górnych i dolnych wskaźników. Rozważane są tylko ośrodkowe przestrzenie Hilberta.

R o z d z i a ł I

/A/ Ograniczenia na hamiltonian wynikające z zasady zachowania prądu prawdopodobieństwa

Przez lokalizowalność w mechanice kwantowej, rozumiemy zazwyczaj istnienie w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ stanów układu, reprezentacji kanonicznych reguł komutacji w postaci

$$\begin{aligned} [P_i, P_j] &= [X_i, X_j] = 0 \\ [P_i, X_j] &= -i \delta_{ij}. \end{aligned} \quad /1.1/$$

za pomocą samosprzężonych operatorów $\underline{P}$ i $\underline{X}$. Powyższe związki wyrażają zasadę kwantowania kanonicznego. Polega ona na zastąpieniu nawiasów Poissona odpowiedniej teorii klasycznej przez komutatory. Operatory $\underline{P}$ i $\underline{X}$ pełnią w tym formalizmie rolę obserwabli prądu i położenia.

Wightman wprowadził pojęcie lokalizowalności w obszarze jako układ imprymitywności (E, V) bazujący na $\mathbb{R}^3$. E jest miarą spektralną, która każdemu borelowskiemu obszarowi $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ przyporządkowuje projektor $E(\Delta)$ w przestrzeni stanów $\mathcal{H}$.

V jest unitarną reprezentacją grupy przesunięć T^3 w $\mathcal{H}$, taką że

$$V(\underline{\alpha}) E(\Delta) V^*(\underline{\alpha}) = E(\Delta + \underline{\alpha}) \quad /1.2/$$

dla $\underline{\alpha} \in T^3$. Mówimy, że miara E jest współzmiennicza względem

przesunięć. Projektor $E(\Delta)$ interpretujemy jako pytanie, czy układ znajduje się w obszarze Δ . Oczywiście /1.1/ jest algebraiczną /infinitesimalną/ postacią /1.2/. Zachodzi bowiem

$$\underline{X} = \int \underline{x} dE(\underline{x}) ; V(\underline{a}) = e^{i\underline{a} \cdot \underline{P}} \quad /1.3/$$

Lokalizowalność Wightmana [3] otrzymamy wtedy, gdy w miejsce T^3 weźmiemy grupę euklidesową $\mathcal{E}(3) = SU(2) \square T^3 / \square$ oznacza iloczyn półprosty/.

Dynamika układu zadana jest przez jednoparametrową grupę operatorów unitarnych $\mathbb{R} \ni t \rightarrow U(t) = e^{itH}$, której samosprzężony generator H /hamiltonian/ interpretowany jest jako obserwabla energii układu. Oczywiście powinniśmy założyć, że operatory $\underline{P}$, $\underline{X}$ i H mają wspólną, niezmienniczą i gęstą dziedzinę, na której są istotnie samosprzężone. Zgodnie z wyjaśnieniem podanym we wstępie, w dalszej części będziemy pomijać tego rodzaju założenia. Będziemy posługiwać się tzw. obrazem Heisenberga. Oznacza to, że ewolucji w czasie podlegać będą obserwabla /a nie wektory reprezentujące stany/. Jeśli F jest operatorem reprezentującym pewną wielkość fizyczną w chwili $t = 0$, to

$$F(t) \doteq U(t) F U(t)^* = U(t-t_0) F(t_0) U(t-t_0)^* \quad /1.4/$$

$$\dot{F}(t) \doteq \frac{dF(t)}{dt} = i [H, F(t)]$$

Wprowadźmy jednoparametrową rodzinę miar spektralnych

$$\Delta \rightarrow E_t(\Delta) \doteq U(t) E(\Delta) U(t)^* ; \text{wówczas}$$

$$\underline{X}(t) = \int \underline{x} dE_t(\underline{x})$$

Operatory $\underline{X}(t)$ są kanonicznie sprzężone do $\underline{P}(t)$, zadają więc lokalizację na hiperpłaszczyźnie $t = \text{const}$. Ogólniej, jeśli $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją borelowską, to możemy zdefiniować funkcję od operatora $\underline{X}(t)$ za pomocą

$$\begin{aligned}\hat{f}_t &= f(\underline{X}(t)) = \int f(\underline{x}) dE_t(\underline{x}) = U(t) \hat{f} U(t)^* ; \\ \hat{f} &= \hat{f}_0 = \int f(\underline{x}) dE(\underline{x}) .\end{aligned}$$

Definicja 1.1

Mówimy, że $\mathcal{H}$ jest lokalizowalnym układem kwantowym /l.u.k/ jeśli

- 1° $\mathcal{H}$ jest /ośrodkową/ przestrzenią Hilberta;
- 2° w $\mathcal{H}$ realizowana jest reprezentacja /całkowalna do /1.2// kanonicznych reguł komutacji /1.1/;
- 3° w $\mathcal{H}$ działa /silnie ciągle/ jednoparametrowa grupa operatorów unitarnych $t \rightarrow U(t) = \exp(itH)$

Znane twierdzenie von Neumanna [17] stanowi, że przestrzeń $\mathcal{H}$ l.u.k może być realizowana jako przestrzeń funkcji $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3, h, d^3x)$ tj. przestrzeń funkcji na $\mathbb{R}^3$ o wartościach w przestrzeni Hilberta h , całkowalnych z kwadratem względem miary Lebesgue'a, z iloczynem skalarnym:

$$\langle \Psi, \Phi \rangle = \int \langle \Psi(\underline{x}), \Phi(\underline{x}) \rangle d^3x \quad /1.5/$$

gdzie $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jest iloczynem skalarnym w h . Dokładniej zachodzi następujące

Twierdzenie 1.1 /von Neumann/

Niech $\mathcal{H}$ będzie l.u.k. Wówczas $\mathcal{H} \cong \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3, h, d^3x)$ z iloczynem

$\{ \cdot, \cdot \}$, gdzie $\cong$ znaczy "unitarna równoważność", $\mathfrak{h}$ jest pewną przestrzenią Hilberta, oraz operatory $\underline{X}, \underline{P} \in E(\Delta)$ mają następującą kanoniczną postać:

$$(E(\Delta)\Psi)(\underline{x}) = \chi_{\Delta}(\underline{x}) \Psi(\underline{x})$$

$$(X_i \Psi)(\underline{x}) = x_i \Psi(\underline{x}) \quad /1.6/$$

$$(P_i \Psi)(\underline{x}) = -i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Psi \right)(\underline{x})$$

gdzie χ_{Δ} jest funkcją charakterystyczną zbioru Δ .

□

W dalszej części potrzebny nam będzie lemat o postaci operatorów w przestrzeniach typu $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3, \mathfrak{h}, d^3 \underline{x})$

Lemat 1.1

Niech A będzie samosprzężonym operatorem ograniczonym w $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3, d^3 \underline{x}, \mathfrak{h})$, takim że $[\underline{X}, A] = 0$. Wtedy

$$(A \Psi)(\underline{x}) = A(\underline{x}) \Psi(\underline{x})$$

gdzie $\mathbb{R}^3 \ni \underline{x} \rightarrow A(\underline{x})$ jest borelowską i ograniczoną funkcją o wartościami w przestrzeni samosprzężonych operatorów ograniczonych w $\mathfrak{h}$.

D o w ó d :

Lemat 1.1 jest szczególnym przypadkiem lematu 9.4 [16] str.63. Inny dowód można znaleźć w [17].

□

W n i o s e k :

Jeśli $A = A^*$ i $[A, \underline{P}] = 0$, to A jest postaci $A(\underline{p})$. Jeśli ponadto $[A, \underline{X}] = 0$ to A jest stałym operatorem w $\mathfrak{h}$. Dla dowodu wystarczy posłużyć się lematem 1.1 i reprezentacją pędową

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3, d^3 \underline{p}, \mathfrak{h}) \cong \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3, d^3 \underline{x}, \mathfrak{h})$$

gdzie unitarna równoważność zadana jest przez przekształcenie Fouriera

$$\Psi(\underline{p}) = (2\pi)^{-3/2} \int e^{-i\underline{p}\underline{x}} \Psi(\underline{x}) d^3x$$

Uwaga 1.1

W mechanice kwantowej mamy do czynienia zazwyczaj z nieograniczonymi operatorami. Przy dowodzie twierdzeń 1.2 i 1.3 zajdzie więc potrzeba posłużenia się formalnie lematem 1.1, dla przypadku nieograniczonych operatorów. Przemawia za tym zarówno intuicja fizyczna jak i brak innych możliwości. Autorowi nie jest znany analog lematu 1.1 dla nieograniczonych operatorów.

Twierdzenie 1.1 nie mówi nic o postaci hamiltoniana H l.u.kł. Zazwyczaj H jest funkcją operatorów położenia i pędów, a jego postać otrzymuje się przez zastąpienie odpowiednich wielkości klasycznych operatorami. W wielu wypadkach /jak np. w relatywistycznej mechanice kwantowej/ procedura ta zawodzi [18]. Powstała idea [18-20, 5] aby postać hamiltoniana uzyskać z bardziej elementarnych zasad jak np. zasada współzmienniczości teorii. Idea ta jest główną motywacją obecnej pracy. W [5] podano najogólniejszą postać hamiltoniana w galileuszowej mechanice kwantowej. Tu zajmiemy się przypadkiem relatywistycznym. Najpierw zbadamy, jakie ograniczenia na Hamiltonian wynikają z zasady zachowania prądu prawdopodobieństwa.

Przystąpmy więc do definicji prądu prawdopodobieństwa. Miara /1.6/ jest absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a w $\mathbb{R}^3$. Wygodnie jest wprowadzić formalny operator $\mathcal{G}(\underline{x})$ jako "operatorową pochodną" Radona-Nikodyma $\frac{dE(\underline{x})}{d^3x}$. Teraz:

$$\hat{f} = \int f(\underline{x}) g(\underline{x}) d^3x$$

/1.7a/

W szczególności

$$g(\underline{x}) = g(\underline{x})^* ; \int g(\underline{x}) d^3x = 1 ; g(\underline{x}) g(\underline{y}) = \delta(\underline{x}-\underline{y}) g(\underline{x}) / 1.7b/$$

Ostatnia własność, zwana idempotentnością, wyraża formalnie znaną własność całki spektralnej: $\widehat{f \cdot g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$. Rzeczywiście,

$$\hat{f} \cdot \hat{g} = \iint f(\underline{x}) g(\underline{y}) g(\underline{x}) g(\underline{y}) d^3x d^3y,$$

$$\text{natomiast } \widehat{f \cdot g} = \int f(\underline{x}) g(\underline{x}) g(\underline{x}) d^3x$$

Wykorzystując drugą z własności /1.7/, mamy dalej formalnie

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \int \langle \Phi, g(\underline{x}) \Psi \rangle d^3x = \int \langle \Phi(\underline{x}), \Psi(\underline{x}) \rangle d^3x$$

stąd

$$\langle \Phi, g(\underline{x}) \Psi \rangle = \langle \Phi(\underline{x}), \Psi(\underline{x}) \rangle$$

Dokładniej, niech $\Delta \subset \mathbb{R}^3$, $\chi_\Delta(\underline{x})$ jego funkcja charakterystyczna, a $E_t(\Delta)$ pytanie, czy układ znajduje się w obszarze Δ w chwili t . Wówczas:

$$\begin{aligned} \langle \Psi, E_t(\Delta) \Psi \rangle &= \langle \Psi, \int \chi_\Delta(\underline{x}) dE_t(\underline{x}) \Psi \rangle = \\ &= \int_\Delta \langle \Psi, g(t, \underline{x}) \Psi \rangle d^3x = \int_\Delta \|\Psi_t(\underline{x})\|^2 d^3x \end{aligned}$$

jest prawdopodobieństwem zdarzenia polegającego na tym, że układ w chwili t znajduje się w obszarze Δ . Przyjmijmy więc

$$g(t, \underline{x}) = \frac{dE_t(\underline{x})}{d^3x} = U(t) g(\underline{x}) U(t)^*$$

za operatorową gęstość prawdopodobieństwa w chwili t .

W analogii do hydrodynamiki zdefiniujmy prąd prawdopodobieństwa w przestrzeni h l.u.k za pomocą wzorów:

$$j^0(t, \underline{x}) \doteq g(t, \underline{x})$$

$$j^i(t, \underline{x}) \doteq \frac{1}{2} \{ \dot{\chi}^i(t), g(t, \underline{x}) \}$$

/1.8/

gdzie $\dot{X}(t) = i[H, X(t)]$ jest operatorem prędkości a antykomutator $\{ \dots \}$ zapewnia formalną samosprzężoność. W rzeczywistości wzory /1.8/ określają w każdej chwili czasu t , dystrybucje $j^\mu(t, \cdot)$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) o wartościach operatorowych

$$j^0(t, f) \doteq \hat{f}_t$$

/1.8b/

$$j^i(t, f) \doteq \frac{1}{2} \{ \dot{X}^i(t), \hat{f}_t \}$$

Uwaga 1.2

Wzory /1.8b/ mają sens dla każdej funkcji borelowskiej f , ale dopuszczenie zbyt szerokiej klasy funkcji może powodować kłopoty ze wspólną dziedziną dla operatorów $X, P, H, j^\mu(f)$.

W naszym wypadku wystarczy ograniczyć się do funkcji nieskończenie różniczkowalnych o wielomianowym wzroście /tzw. funkcji klasy $O(\mathbb{R}^3)$ [35] /. Funkcje ograniczone produkują operatory ograniczone.

Zažadamy teraz, aby prąd /1.8/ był zachowany. Szczegółowe omówienie równania ciągłości $\partial_\mu j^\mu = 0$ przeprowadzimy w punkcie /B/. Prąd j^μ jest współzmienniczy względem translacji w czasie

$$U(t) j^\mu(t_0, f) U(t)^* = j^\mu(t_0 + t, f)$$

Wystarczy więc, aby równanie ciągłości spełnione było w chwili $t = 0$, tzn. aby

$$i[H, j^0(0, f)] - j^i(0, \partial_i f) = 0 \quad /1.9a/$$

lub równoważnie

$$\frac{d\hat{f}}{dt} = \frac{1}{2} \{ \dot{X}^i, \hat{\partial}_i f \} \quad /1.9b/$$

Okazuje się, że /1.9/ nakłada silne ograniczenia na możliwą postać hamiltoniana H , a mianowicie że H może być co najwyżej kwadratowy w pędach. Dokładniej mówi o tym następujące

Twierdzenie 1.2

Istnieje 1-1 odpowiedniość /z dokładnością do unitarnej równoważności/ pomiędzy l.u.k. $\mathcal{H}$ z zachowanym prądem prawdopodobieństwa postaci /1.8/ a l.u.k. realizowanym w przestrzeni $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3, h, d^3x)$ z hamiltonianem postaci

$$H = \frac{1}{2} (P_i A^{ij}(\underline{x}) P_j + A^i(\underline{x}) P_i + P_i A^i(\underline{x})) + A(\underline{x}) \quad /1.10/$$

gdzie h jest pewną przestrzenią Hilberta, a $\underline{x} \rightarrow A^{ij}(\underline{x}) = A^{ji}(\underline{x})$; $\underline{x} \rightarrow A^i(\underline{x})$; $\underline{x} \rightarrow A(\underline{x})$ są mierzalnymi funkcjami na $\mathbb{R}^3$ o wartościach w przestrzeni samosprzężonych /na ogół nieograniczonych/ operatorów w h .

D o w ó d :

Z twierdzenia 1.1 $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3, h, d^3x)$ zaś operatory $\underline{X}, \underline{P}$ mają kanoniczną postać /1.6/. Wprowadźmy $A^{ij} = i [\dot{X}^i, X^j]$.

Z tożsamości Jacobiego $[[H, X^i], X^j] + \text{cykl.} = 0$ otrzymamy $A^{ij} = A^{ji} = A^{ij*}$. Przeanalizujemy teraz /1.9/ dla poszczególnych f . Dla $f = x^k$ i $f = x^k x^j$ /1.9/ jest tożsamością.

$f = x^k x^l x^m$ prowadzi do $[X^k, A^{lm}] = 0$. Oznacza to /lemat 1.1 i uwaga 1.1/, że A^{lm} jest funkcją na $\mathbb{R}^3$ o wartościach w przestrzeni hermitowskich operatorów w h , tzn.

$$(A^{ij} \Psi)(\underline{x}) = A^{ij}(\underline{x}) \Psi(\underline{x})$$

dla prawie wszystkich $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$. Zdefiniujmy $V^i = \frac{1}{2} (A^{ij} P_j + P_j A^{ij})$

$$A^{ij} = i [V^i, X^j] \quad \text{oraz} \quad V^{i*} = V^i$$

Jeśli $A^i = \dot{X}^i - V^i$ to $[X^k, A^i] = 0$ oraz $A^i = A^{i*}$. W rezultacie, jak poprzednio, otrzymamy $A^i = A^i(x)$. Analogicznie, niech $H_0 = \frac{1}{2} \{P_i, \dot{X}^i\} - \frac{1}{4} \{A^{ij}, P_i P_j\}$. Wówczas $[H_0, X^k] = i \dot{X}^k = [H, X^k]$. Jeśli $A = H - H_0$ to $[A, X^k] = 0$ i $A = A^*$, więc $H = H_0 + A(x)$. Na zakończenie sprawdzamy /korzystając z $\hat{\partial}_i f = i [P_i, \hat{f}]$, że hamiltonian /1.10/ spełnia równanie ciągłości /1.9/ dla każdej różniczkowalnej funkcji $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

□

Uwaga 1.3

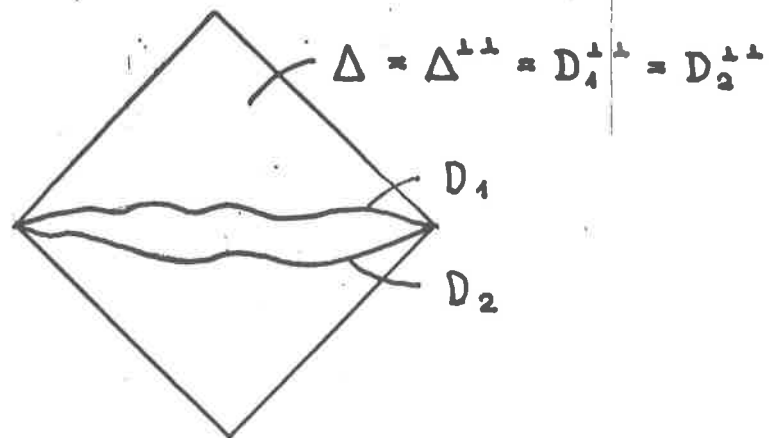
Pokażemy, co może być interesujące w przypadku relatywistycznym, że jeśli $\underline{\dot{X}}$ ma wiec ograniczone widmo to hamiltonian /1.10/ może być co najwyżej liniowy. W istocie, niech $T(\underline{\alpha}) = \exp(i \underline{\alpha} \underline{\dot{X}})$ unitarna translacja w przestrzeni pędów, wówczas $T(\underline{\alpha}) \dot{X}^i T(\underline{\alpha}) = \dot{X}^i + A^{ij} \alpha_j$. W takim razie $\{T(\underline{\alpha}) \Psi, \dot{X}^i T(\underline{\alpha}) \Psi\} = \{\Psi, \dot{X}^i \Psi\} + \{\Psi, A^{ij} \Psi\} \alpha_j$ dla każdego $\underline{\alpha} \in \mathbb{R}^3$. Ostatnia równość oznacza, że w przypadku $A^{ij} \neq 0$ widmo operatora $\underline{\dot{X}}$ jest nieograniczone. Jak zobaczymy później /rozdział II /C//, liniowość hamiltonianu nie zapewnia ograniczoneści widma operatora $\underline{\dot{X}}$.

/B/ Relatywistyczna mechanika kwantowa z zachowanym prądem prawdopodobieństwa jako współzmiennicza reprezentacja relatywistycznej logiki przyczynowej

Logika przyczynowa czasoprzestrzeni /zarówno relatywistycznej jak i nierelatywistycznej/ została skonstruowana przez Cegłę i Jadczyka [5,6]. Dla lepszego zrozumienia inspiracji niniejszej pracy przytoczymy główne elementy tej konstrukcji.

Struktura przyczynowa czasoprzestrzeni Minkowskiego $\mathcal{M}$

zadana jest przez relację ortogonalności. Punkty $x, y \in \mathcal{M}$ nazywamy ortogonalnymi /przyczynowe niezależnymi/ $x \perp y$ jeśli $x \neq y$ i $(x-y)^2 \gg 0$. Zbiór $D \subset \mathcal{M}$ jest ortogonalny, jeśli każde dwa jego punkty są ortogonalne. Rodzina zbiorów $L(\mathcal{M}) = \{\Delta \subset \mathcal{M} \mid \Delta^{\perp\perp} = \Delta\}$ jest σ -zupełną kratą ortomodularną, zwaną relatywistyczną logiką przyczynową. Każdy element $\Delta \in L(\mathcal{M})$ zadany jest przez maksymalny zbiór ortogonalny D w nim zawarty: $\Delta = D^{\perp\perp}$ /niejednoznacznie!/. Mówiąc obrazowo, typowy element $\Delta \in L(\mathcal{M})$ jest podwójnym stożkiem /diamentem/ rozpiętym przez kawałek powierzchni przestrzennopodobnej D . Ilustruje to następujący rysunek



Powierzchnia D kontroluje obszar Δ . Fizycznie oznacza to, że każda cząstka przechodząca przez punkt $x \in \Delta$ zostanie zarejestrowana przez "licznik" D . Innymi słowy, prawdopodobieństwo zarejestrowania cząstki przez "licznik" D jest takie samo jak znalezienia jej w obszarze Δ . Δ jest reprezentantem całej klasy "liczników" równoważnych.

W pracy [7] ci sami autorzy wykazali, że zachowany $\mathbb{R}$ -liczbowy prąd, $\partial_\mu j^\mu = 0$, zadaje stan na logice $L(\mathcal{M})$ za pomocą wzoru:

$$\mu(\Delta) = \int_D j;$$

gdzie $\mu : L(\mathcal{M}) \rightarrow [0,1]$ jest σ - addytywną funkcję zbiorów, D maksymalny zbiór ortogonalny generujący $\Delta : D^{\perp\perp} = D$. Widać stąd, że równanie ciągłości /via twierdzenie Stokesa/ zapewnia niezależność prawej strony od wyboru D . Niestety nie wiadomo, czy każdy stan μ jest postaci /1.11/.

Oczywiście grupa Poincarego jest grupą automorfizmów logiki $L(\mathcal{M})$. Prowadzi to do koncepcji uogólnionego układu imprymitywności:

$$U(\alpha, \Lambda) E(\Delta) U(\alpha, \Lambda)^* = E(\Lambda\Delta + \alpha) \quad /1.12/$$

gdzie, $U(\alpha, \Lambda)$ reprezentacja unitarna grupy Poincarego w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, $\Delta \rightarrow E(\Delta)$ σ - addytywna funkcja na $L(\mathcal{M})$ o wartościach w przestrzeni projektorów w $\mathcal{H}$. W pracy [8] zaproponowano konstrukcję $E(\Delta)$ za pomocą prądu j^μ o wartościach operatorowych, spełniającego następujące postulaty:

- /C-1/ hermitowskość: $j^\mu(x)^* = j^\mu(x)$
- /C-2/ zachowanie: $\partial_\mu j^\mu = 0$
- /C-3/ współzmienniczość: $U(\alpha, \Lambda) j^\mu(x) U(\alpha, \Lambda)^* = \Lambda^{-1\mu}_\nu j^\nu(\Lambda x + \alpha)$
- /C-4/ unormowanie: $\int j^0(x) d^3x = 1$
- /C-5/ dodatniość: $j^0(x) > 0$
- /C-6/ idempotentność: $\eta_\mu j^\mu(x) j^\nu(y) = \delta_\eta^3(x-y) j^\nu(y)$
dla $(x-y)^2 > 0$ lub $x = y$
- /C-7/ ortogonalność: $j^\mu(x) j^\nu(y) = 0$ dla $(x-y)^2 > 0$

gdzie η ($\eta^0 > 0$) jest wektorem czasopodobnym, a $\delta_\eta^3(x)$ jest δ - funkcją na hiperpłaszczyźnie przestrzennopodobnej ortogonalnej do η , zadana za pomocą

$$\delta_\eta^3(x) \delta(\eta x) = \delta^4(x)$$

W [9] pokazano, że prąd /C-1/ - /C-7/ rozwiązuje problem przyczynowej relatywistycznej lokalizacji na hiperpłaszczyznach przestrzennopodobnych, przez wprowadzenie operatorów położenia typu Fleminga [15].

Punktem wyjścia obecnych rozważań będzie zespół nieco innych niż /C-1/ - /C-7/ postulatów.

Postulat relatywistycznej współzmienniczości stanowi, że w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ stanów układu kwantowego działa unitarna /na ogół rzutowa/ reprezentacja U grupy Poincarego, której generatory samosprężone $\underline{M}, \underline{N}, \underline{P}, P^0$ spełniają dobrze znane relacje komutacji:

$$\begin{array}{ll} (i) \quad [M_i, P_i] = i \epsilon_{ijk} P_k & (v) \quad [N_i, P_j] = i \delta_{ij} P^0 \\ (ii) \quad [M_i, P_0] = 0 & (vi) \quad [N_i, P^0] = -i P_i \\ (iii) \quad [M_i, N_j] = i \epsilon_{ijk} N_k & (vii) \quad [N_i, N_j] = i \epsilon_{ijk} M_k \\ (iv) \quad [M_i, M_k] = i \epsilon_{ijk} M_k & (viii) \quad [P_\mu, P_\nu] = 0 \end{array}$$

Definicja 1.2

Mówimy, że $\mathcal{H}$ jest relatywistycznie współzmiennicznym lokalizowalnym układem kwantowym z zachowanym prądem prawdopodobieństwa /r.l.u k.z.p.p/, jeśli

- 1° $\mathcal{H}$ jest l.u.k.
- 2° w $\mathcal{H}$ działa unitarna reprezentacja grupy Poincarego (i) - (viii)
- 3° generatory P_i pełnią rolę operatorów pędu /1.1/
- 4° P^0 jest generatorem grupy dynamicznej
- 5° $[M_i, X_j] = i \epsilon_{ijk} X_k$ (ix)
- 6° w $\mathcal{H}$ działa czterowektorowektor prądu, jako dystrybucja o wartościach operatorowych, taki że

$$j^\mu(x)^* = j^\mu(x) \quad (x)$$

$$j^0(x)|_{x^0=0} = \varrho(x) \quad (xi)$$

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \quad (xii)$$

$$U(\alpha, \Lambda) j^\mu(x) U(\alpha, \Lambda)^* = \Lambda^{-1\mu}{}_\nu j^\nu(\Lambda x + \alpha) \quad (xiii)$$

gdzie $\varrho(x)$ dane jest za pomocą /1.7a/.

Uwaga 1.4

Prąd (x) - (xiii) spełnia /C-1/ - /C-5/. Postulaty /C-6/ i /C-7/ spełnione są w słabszej formie /1.7b/, a mianowicie

$$\varrho(x) \varrho(y) = \delta(x-y) \varrho(x).$$

Jak zobaczymy (x) - (xiii) nie gwarantują przyczynowej propagacji /rozdział II /C//.

Uwaga 1.5

R.l.u.k.z.p.p jest lokalizowalny w sensie Wightmana. Rzeczywiście nietrudno zauważyć, że operatory $\underline{M}, \underline{P}, \underline{X}$ są generatorami układu imprymitywności: grupa euklidesowa $E(3)$ działa w $\mathbb{R}^3$.

Zbadamy teraz jakie warunki na postać generatorów grupy Poincarego, a przede wszystkim na hamiltonian $H = P^0$ wynikają z (i) - (xiii). Okazuje się, że istnieje 1-1 odpowiedniość pomiędzy r.l.u.k.z.p.p a pewną algebrą operatorów w wewnętrznej przestrzeni Hilberta $\mathcal{h}$. W szczególności zobaczymy, że hamiltonian w takich teoriach musi być liniowy w pędach.

Definicja 1.3

Mówimy, że operatory $(\underline{m}, \underline{n}, \underline{A}, \underline{A})$ działające w przestrzeni Hilberta $\mathcal{h}$, tworzą w tej przestrzeni reprezentację relatywistycznej algebry hamiltonowskiej /r.h.a/, jeśli są samosprężone i spełniają następujące związki przemienności:

$$[m_i, m_j] = i \epsilon_{ijk} m_k \quad (a)$$

$$[m_i, n_j] = i \epsilon_{ijk} n_k \quad (aa)$$

$$[n_i, n_j] = -i \epsilon_{ijk} m_k + \frac{1}{2} [A_i, A_j] \quad (aaa)$$

$$[m_i, A_j] = i \epsilon_{ijk} A_k \quad (ab)$$

$$[n_i, A_j] = i \delta_{ij} - \frac{1}{2} \{A_i, A_j\} \quad (b)$$

$$[m_i, A] = 0 \quad (ba)$$

$$[n_i, A] = -\frac{1}{2} \{A_i, A\} \quad (baa)$$

Teraz możemy sformułować zasadnicze twierdzenie mówiące o postaci relatywistycznej mechaniki kwantowej.

Twierdzenie 1.3

Niech $\mathcal{H}$ będzie r.l.u.k.z.p.p. wówczas

$$\mathcal{H} \cong \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3, \hbar, d^3 p)$$

$$(X_i \Psi)(\underline{p}) = i \frac{\partial \Psi}{\partial p_i}(\underline{p}) \quad /1.13a/$$

$$(P_i \Psi)(\underline{p}) = p_i \Psi(\underline{p}) \quad /1.13b/$$

$$\underline{M} = \underline{X} \times \underline{P} + \underline{m} \quad /1.13c/$$

$$\underline{N} = \frac{1}{2} \{ \underline{X}, H \} + \underline{n} \quad /1.13d/$$

$$P^0 = H = A^i P_i + A \quad /1.13e/$$

$$j^i(0, f) = \frac{1}{2} \{ \dot{X}^i, \hat{f} \} = A^i \hat{f} \quad /1.13f/$$

gdzie operatory $(\underline{m}, \underline{n}, \underline{A}, A)$ tworzą w przestrzeni $\hbar$ reprezentacje r.h.a.

Na odwrót, jeśli w $\hbar$ zadana jest reprezentacja r.h.a. to wzory /1.13a - 1.13f/ zadają w przestrzeni $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3, \hbar, d^3 p)$ r.l.u.k.z.p.p.

Dowód powyższego twierdzenia przeprowadzimy w części /C/.

Natomiast reprezentacje r.h.a i odpowiadające im relatywistyczne układy kwantowe będą tematem rozdziałów II i III. Oczywiście, dwa układy kwantowe są fizycznie równoważne, jeśli odpowiadające im przestrzenie Hilberta i algebry operatorów są unitarnie równoważne.

Uwaga 1.6

Algebra operatorów wewnętrznych dla galileuszowej mechaniki kwantowej [5] składa się z siedmiu operatorów samosprzężonych, z których sześć spełnia związki przemienności algebry Liego grupy $\mathcal{E}(3)$. W przypadku relatywistycznym, tylko trzy operatory spinu $\underline{m}$, spośród dziesięciu generatorów reprezentacji r.h.a, domykają się do algebry Liego $su(2)$. Jak zobaczymy w rozdziale III, z operatorów prędkości $\underline{A}$ i operatorów $\underline{n}$ można zbudować niehermitowskie generatory specjalnych transformacji Lorentza. /Operator masy A jest operatorem hermitującym/. Grupa Lorentza, jako grupa niezwarta, dopuszcza przywiedlne choć nierozkładalne reprezentacje nieunitarne. Powoduje to trudności z pełną klasyfikacją reprezentacji r.h.a. Świadczy to również o tym, że teoria relatywistyczna jest "bogatsza" niż nierelatywistyczna, w tym sensie, że daje większe możliwości wyboru - prowadzi do szerszej klasy reprezentacji algebry operatorów wewnętrznych.

/C/ Dowód podstawowego twierdzenia 1.3

Dowód przeprowadzimy za pomocą kilku lematów. Pierwsza część tezy tj. postać $\mathcal{H}$ oraz /1.13a-b/ wynika z twierdzenia 1.1 /tym razem użyliśmy reprezentacji pędowej/.

Lemat 1.2

Przy założeniach jak w twierdzeniu 1.3, niech $\underline{m}$ i $\underline{n}$ będą zdefiniowane za pomocą /1.13c/ i /1.13d/. Wówczas $\underline{m}$ jest samosprzężonym operatorem w $\mathfrak{h}$, $\underline{n} = \underline{n}(\underline{p})$ jest funkcją na $\mathbb{R}^3$ o wartościach w przestrzeni samosprzężonych operatorów w $\mathfrak{h}$, oraz

$$[m_i, m_j] = i \epsilon_{ijk} m_k$$

$$[M_i, n_k] = i \epsilon_{ijk} n_k$$

D o w ó d :

Z (i) i (ix) otrzymamy /lemat 1.1/ $[\underline{m}, \underline{X}] = [\underline{m}, P] = 0$ więc $\underline{m}$ samosprzężony operator w $\mathfrak{h}$. Pierwsza równość wynika z (iv). W ten sposób otrzymaliśmy pierwszą z relacji r.h.a. Podobnie z (v) otrzymamy $[n_i, P] = 0$. Ostatnia równość wynika z (iii) oraz z $[M_i, \frac{1}{2} \{X^j, H\}] = i \epsilon_{ijk} \frac{1}{2} \{X^k, H\}$.

□

Znajdziemy teraz infinitesimalną postać warunków (xii) i (xiii). Analogicznie jak w /1.9a/ równanie ciągłości w chwili $X^0 = 0$ przyjmuje postać:

$$[H, \varphi(\underline{x})] = [P_i, j^i(0, \underline{x})]$$

lub po wycalkowaniu z funkcją próbną $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$[H, \hat{f}] = [P_i, j^i(0, f)] \quad /1.14/$$

Warunek (xiii) zapiszemy najpierw w niezmienniczym względem jednorodnych przekształceń, punkcie $x = 0 = (0, \underline{0})$

$$U(\underline{Q}, 1) j^\mu(0) U(\underline{Q}, 1) = \Lambda^{-1 \mu \nu} j^\nu(0)$$

Wynika stąd, że $j^\mu(0)$ przekształca się jak czterowektor,

w szczególności

$$[N_i, q(0)] = i j^i(0)$$

$$[N_i, j_k(0)] = i \delta_{ik} q(0)$$

Formalnie $j^\mu(0, \underline{x}) = \exp(-i \underline{x} \underline{P}) j^\mu(0) \exp(i \underline{x} \underline{P})$, zaś

$\underline{N} - \underline{x} H = \exp(-i \underline{x} \underline{P}) \underline{N} \exp(i \underline{x} \underline{P})$, więc

$$[N_i, q(\underline{x})] = i j^i(0, \underline{x}) + [H, q(\underline{x})] x^i$$

$$[N_i, j^k(0, \underline{x})] = i \delta_i^k q(\underline{x}) + [H, j^k(0, \underline{x})] x^i$$

W końcu po "rozmyciu" z funkcją próbną f otrzymamy:

$$[N_i, \hat{f}] = i j^i(0, f) + [H, \hat{f} x^i] \quad /1.15a/$$

$$[N_i, j^k(0, f)] = i \delta_i^k \hat{f} + [H, j^k(0, f) x^i] \quad /1.15b/$$

szukaną postać współzmienniczości prądu j^μ względem specjalnych transformacji Lorentza.

Lemat 1.3

Przy założeniach jak w twierdzeniu 1.3 istnieją samosprężone operatory $\alpha^{ij}, \alpha^i, A^{ij}, A^i, A$ w $\hbar$ takie że:

$$\alpha^{ij} = -\alpha^{ji}; \quad A^{ij} = A^{ji};$$

$$n^i = \alpha^{ij} P_j + \alpha^i; \quad H = \frac{1}{2} A^{ij} P_i P_j + A^i P_i + A \quad /1.16/$$

D o w ó d :

Z /1.14/ i /1.15a/ mamy:

$$[H, \hat{f}] + i [P_i, [N^i, \hat{f}]] - i [P_i, [H, \hat{f} x^i]] = 0$$

W dwóch ostatnich członach skorzystamy z tożsamości Jacobiego.

$$[H, \hat{f}] + [N^i, \hat{\partial}_i f] - [H, \hat{\partial}_i f x^i] = 0$$

a następnie wstawiamy /1.13d/ by otrzymać:

$$[H, f] - \frac{1}{2} \{ \hat{\partial}_i f, \dot{x}^i \} = -[n^i, \hat{\partial}_i f] \quad /1.17/$$

Warunek ten przeanalizujemy dla poszczególnych f . Dla $f = x^i$ obie strony /1.18/ znikają. $f = x^i x^k$ prowadzi do /lewa strona /1.17/ znika/:

$$[n^i, X^j] + [n^j, X^i] = 0$$

W szczególności, oznacza to że $[X^i, [X^j, n^k]] = 0$. Wynika stąd /lemat 1.1/ że zależność $n(p)$ jest co najwyżej liniowa, tzn. $n^i(p) = a^{ij} p_j + a^i$, gdzie $a^{ij} = -a^{ji}$, a^i są stałymi operatorami hermitowskimi w $\mathfrak{h}$. Analogicznie wstawiając $f = x^i x^j x^k$ /teraz prawa strona /1.17/ znika/ otrzymamy $[X^i, [X^j, [X^k, H]]] = 0$. Ponieważ $[H, p] = 0$, wynika stąd że $H = \frac{1}{2} A^{ij} p_i p_j + A^i p_i + A$, gdzie $A^{ij} = A^{ji}$, A^i, A stałe operatory hermitowskie w $\mathfrak{h}$. □

Lemat 1.4

Dla H i n postaci /1.16/ warunek /1.17/ spełniony jest dla każdej funkcji f o ciągłych drugich pochodnych.

D o w ó d :

Bezpośredni rachunek wykazuje, że obie strony /1.17/ znikają. □

Lemat 1.5

Przy założeniach jak w twierdzeniu 1.3 współczynniki operatorowe A^{ij} , a^{ij} znikają oraz

$$j^k(f) \doteq j^k(0, f) = \frac{1}{2} \{ \dot{X}^k, \hat{f} \} = A^k \hat{f}$$

D o w ó d :

Do /1.15a/ wstawiamy

$$N^k = \frac{1}{2} \{ X^k, H \} + a^{kj} p_j + a^k$$

/1.18/

W rezultacie otrzymujemy

$$j^k(f) = \frac{1}{2} \{ \dot{X}^k, \hat{f} \} - \alpha^{kj} \widehat{\partial_j f}$$

Uwzględniając, że $\dot{X}^k = A^{ki} P_i + A^k$, bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy, że

$$j^i(f X^k) = \frac{1}{2} \{ j^i(f), X^k \} - \alpha^{ik} \hat{f}$$

Ostatnie wyrażenie oraz /1.18/ wstawiamy do /1.15b/ i korzystając z tożsamości

$$[\{A, B\}, C] - [A, \{B, C\}] = [B, \{A, C\}]$$

otrzymujemy

$$\frac{1}{2} [X^k, \{H, j^i(f)\}] + [n^k, j^i(f)] + [H, \alpha^{ik} \hat{f}] = i \delta_{ik} \hat{f} \quad /1.19/$$

Dla $f = 1$

$$j^i(1) = \dot{X}^i = A^{ij} P_j + A^i = i [H, X^i]$$

Teraz /1.19/ sprowadza się do

$$\frac{1}{2} [X^k, [X^i, H^2]] + [n^k, A^{ij} P_j + A^i] + [H, \alpha^{ik}] - i \delta_{ik} = 0$$

Człony kwadratowe, liniowe i stałe w pędach powinny znikać niezależnie. Wstawiając postać H i n /1.16/ dla członu kwadratowego w pędach otrzymamy:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \{ A^{ki}, A^{lm} \} + \frac{1}{4} \{ A^{ki}, A^{ln} \} + \frac{1}{4} \{ A^{km}, A^{il} \} = \\ & = [\alpha^{ki}, A^{lm}] + \frac{1}{2} [\alpha^{kl}, A^{in}] + \frac{1}{2} [\alpha^{km}, A^{il}] \end{aligned}$$

W szczególności dla $k = i, l = m$

$$i(A^{kl})^2 + \frac{i}{2}\{A^{kk}, A^{ll}\} = [\alpha^{kl}, A^{kl}]$$

Lewa strona ostatniej równości jest symetryczna, a prawa antysymetryczna we wskaźnikach k, l , muszą więc znikać niezależnie. Dla $k = l$ otrzymamy $A^{kk} = 0$, a stąd $A^{kl} = 0$. Teraz $H = A^i P_i + A$, $j^k(f) = A^k \hat{f} - \alpha^{ki} \hat{\partial}_i f$. Wstawiając to do /1.19/ dostaniemy

$$\frac{1}{2}\{A^k, j^l(f)\} + [n^k, j^l(f)] - [H, \alpha^{ki} \hat{f}] = i \delta^{ki} f. \quad /1.20/$$

Wybierając $f = x^n x^l$ i grupując wyrazy przy odpowiednich potęgach operatorów $\underline{P}$ i $\underline{X}$ otrzymamy w szczególności:

$$\alpha^{kn} \alpha^{il} + \alpha^{kl} \alpha^{in} = 0$$

Dla $k = i, n = l$ otrzymamy $\alpha^{ii} = 0$. Ostatecznie więc

$$n^i = \alpha^i; \quad j^i(f) = A^i \hat{f}$$

□

Lemat 1.6

Przy założeniach jak w twierdzeniu 1.3 operatory $(\underline{m}, \underline{n}, \underline{A}, \underline{A})$ tworzą reprezentację r.h.a.

D e w ó d :

Korzystając z wyników poprzedniego lematu /1.20/ można zapisać jako

$$[n_k, A_i] \hat{f} + \frac{i}{2}\{A_k, A_i\} \hat{f} - i \delta_{ki} \hat{f} = 0$$

lub równoważnie w postaci /b/. Pozostałe związki /aa/ - /ab/, /ba/ i /baa/ można łatwo otrzymać z postaci generatorów $\underline{M}$, $\underline{N}$, $\underline{H}$ i reakcji $(i) - (v i i)$ /por. lemat 1.2/.

□

Uwaga 1.7

Korzystając z jawnej postaci operatorów $\underline{M}, \underline{N}, \underline{H}$, łatwo sprawdzić, że warunki współzmienniczości /1.15/ oraz warunek zachowania prądu prawdopodobieństwa /1.14/ spełnione są dla każdej funkcji różniczkowalnej $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Analogicznym rachunkiem można wykazać, że prąd /1.13f/ transformuje się współzmiennie względem obrotów w $\mathbb{R}^3$.

Lemat 1.6 zakończył pierwszą część dowodu twierdzenia 1.3. Dowód twierdzenia odwrotnego można uzyskać przez bezpośrednie sprawdzenie, że /a/ - /baa/ oraz /1.13a/ - /1.13f/ prowadzą do r.l.u.k. z.p.p. /por. uwaga 1.7/.

□

R o z d z i a ł II

Zgodnie z tezą twierdzenia 1.3 problem znalezienia wszystkich relatywistycznych układów kwantowych z zachowanym prądem prawdopodobieństwa sprowadza się do klasyfikacji reprezentacji r.h.a. W rzeczywistości jednak reprezentacja r.h.a nie jest reprezentacją żadnej znanej abstrakcyjnej struktury algebraicznej. Nie istnieje więc ogólna teoria takich reprezentacji. W rozdziale tym podamy pełną klasyfikację reprezentacji z komutującymi i antykomutującymi składowymi operatora prędkości $\underline{A}$.

Niech samosprężone operatory $(\underline{m}, \underline{n}, \underline{A}, A)$ tworzą w przestrzeni Hilberta $\mathcal{h}$ reprezentację r.h.a. Jeśli domknięta podprzestrzeń $\mathcal{h}_1 \subset \mathcal{h}$ jest niezmiennicza względem operatorów $(\underline{m}, \underline{n}, \underline{A}, A)$, to jej dopełnienie ortogonalne $\mathcal{h}_2$ jest również podprzestrzenią niezmienniczą. Co więcej, operatory reprezentacji są w tym wypadku ortogonalną sumą prostą swoich ograniczeń do podprzestrzeni $\mathcal{h}_1$ i $\mathcal{h}_2$. Wynika stąd, że wystarczy ograniczyć się do badania reprezentacji /topologicznie/ nieprzywiedlnych, tj. takich, które nie dopuszczają nietrywialnych, podprzestrzeni domkniętych.

Z postaci relacji $/a/ - /baa/$ definiujących reprezentacje r.h.a wynika, że operatory $(\underline{m}, \underline{n}, \underline{A})$, spełniające związki $/a/ - /b/$ tworzą "podalgebrę" r.h.a. Z drugiej strony, wzory $/ba/$ i $/baa/$ określają operator A z dokładnością do współczynnika rzeczywistego. W szczególności A można zawsze wybrać

równe zero. Spostrzeżenia te prowadzą do przyjęcia następujących definicji.

Definicja 2.1

Samosprężone operatory $(\underline{m}, \underline{n}, \underline{A})$ działające w przestrzeni Hilberta $\mathcal{h}$ i spełniające relacje $/a/-/b/$ /definicji 1.3/, będziemy nazywać reprezentacją zredukowanej r.h.a /z.r.h.a/.

Definicja 2.2

Reprezentację r.h.a będziemy nazywać reprezentacją typu I, jeśli jedynym operatorem spełniającym $/ba/$ i $/baa/$ jest operator zerowy. W przeciwnym wypadku będziemy nazywać ją typu II.

/A/ Skończenie wymiarowe reprezentacje r.h.a

Założenie, że $\mathcal{h}$ jest przestrzenią skończenie wymiarową, pozwala nam skorzystać z własności śladu macierzy. Możemy również skorzystać z faktu istnienia zupełnego /i skończonego/ układu wektorów własnych dla macierzy hermitowskich. Prowadzi to do następujących wyników całkowicie klasyfikujących ten przypadek.

Lemat 2.1

Istnieją dokładnie dwie unitarnie nierównoważne, skończenie wymiarowe nieprzywiedlne reprezentacje z.r.h.a. Reprezentacje te działają w przestrzeni $\mathcal{h}^{\varepsilon} = \mathbb{C}^2$, $\varepsilon = \pm 1$, przy czym:

$$m_i = -\frac{i}{8} \varepsilon_{ijk} [A_j, A_k] = \frac{1}{2} \theta_i$$

$$n_i = 0$$

$$A_i = \varepsilon \sigma_i$$

gdzie, σ_i są macierzami Pauliego.

D o w ó d :

Niech $A_i \Psi = \lambda_i \Psi$, wówczas z /b/

$$0 = \langle \Psi, [n_i, A_i] \Psi \rangle = i(1 - \lambda_i^2) \|\Psi\|^2,$$

$$\text{stad } A_i = 1. \text{ Dla } i \neq j, 0 = [n_i, A_j^2] = -\frac{i}{2} \{A_j, \{A_i, A_j\}\} = \\ = -i(A_j A_i A_j + A_i)$$

wiec $\{A_i, A_j\} = 2\delta_{ij}$. Wprowadźmy teraz operatory $s_k = -\frac{i}{2} \varepsilon_{kij} [A_i, A_j]$. s_k są samosprężone oraz $[s_i, s_j] = i\varepsilon_{ijk} s_k$, $[s_i, A_j] = i\varepsilon_{ijk} A_k$.

Niech $\tilde{m} = m - 1$. Łatwo sprawdzić, że operatory $\tilde{m}, n$ spełniają relacje komutacji grupy Lorentza. Ponieważ są samosprężone i reprezentacja jest skończenie wymiarowa, to $\tilde{m} = n = 0$.

Reasumując, istnieje 1-1 odpowiedniość pomiędzy skończenie wymiarowymi reprezentacjami z.r.h.a, a reprezentacjami relacji

$$\{A_i, A_j\} = 2\delta_{ij} \quad /2.1/$$

tj. reprezentacjami algebry Clifforda $\mathcal{C}_3$ przestrzeni euklidesowej E^3 . Ta ostatnia ma dokładnie dwie nieprzywiedlne, unitarne nierównoważne, reprezentacje w przestrzeni $\mathbb{C}^2$, a mianowicie $\underline{A} = \underline{\sigma}$ i $\underline{A} = -\underline{\sigma}$.

Lemat 2.2

□

Istnieje dokładnie jedna nieredukowalna, skończenie wymiarowa reprezentacja r.h.a typu II. Działa ona w przestrzeni $\mathbb{C}^4$, przy czym

$$m_i = -\frac{i}{2} \epsilon_{ijk} [A_j, A_k]$$

$$n_i = 0$$

$$A_i = d_i$$

$$A = \lambda \beta, \quad \lambda > 0$$

gdzie α, β są macierzami Diraca.

D o w ó d :

Powtarzając rozumowanie z poprzedniego dowodu otrzymamy

$\{A_i, A_j\} = 2\delta_{ij}$, $m = \underline{1}$, $n = 0$. Ponieważ $0 = \text{Tr} [n_i, A A_i A] =$
 $= \text{Tr} \{A_i, A\}^2$ oraz $\{A_i, A\}^2 \gg 0$, to $\{A_i, A\} = 0$. Niech teraz
 $A^2 = \sum_a \lambda_a^2 P_a$ będzie rozkładem spektralnym operatora A^2 , gdzie
 $0 < \lambda_a < \lambda_b$ dla $a < b$, λ_a^2 są wartościami własnymi, a P_a projekto-
rami na podprzestrzenie własne. Macierze A_i komutują z A^2 , więc
podprzestrzenie te są niezmiennicze względem operatorów A, A_i .
Wnioskujemy stąd, że jeśli reprezentacja jest nieprzywiedlna
to $A^2 = \lambda^2 \gg 0$. Dla $\lambda > 0$ wprowadźmy $A' \doteq \frac{1}{\lambda} A$, wówczas

$$\{A_i, A_j\} = 2\delta_{ij}, \quad \{A_i, A'\} = 0, \quad A'^2 = 1 \quad /2.2/$$

Oznacza to, że macierze A, A' tworzą reprezentację dobrze znanej
algebry Diraca. Jedyna nieprzywiedlna reprezentacja tej algebry
dana jest za pomocą macierzy Diraca.

W n i o s e k :

□

Reprezentacje z lematu 2.1 są typu I.

Bezpośrednim wnioskiem z lematów 2.1 i 2.2 jest następują-
ce

Twierdzenie 2.1

Niech samosprężone operatory $(\underline{m}, \underline{n}, \underline{A}, A)$ tworzą reprezentację
r.h.a w skończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta $\mathcal{h}$. Wówczas

$$\mathcal{h} = \bigoplus_{a=1}^{N_1} \mathcal{h}_a^+ \oplus \bigoplus_{b=1}^{N_2} \mathcal{h}_b^- \oplus \bigoplus_{c=1}^{N_3} \mathcal{h}_c$$

$$m_i = -\frac{i}{8} \epsilon_{ijk} [A_j, A_k]$$

- 33 -

$$n_i = 0$$

$$\underline{A} = \bigoplus_{a=1}^{N_1} \underline{G}_a \oplus \bigoplus_{b=1}^{N_2} (-\underline{G}_b) \oplus \bigoplus_{c=1}^{N_3} \underline{L}_c$$

$$A = \bigoplus_{a=1}^{N_1} 0_a \oplus \bigoplus_{b=1}^{N_2} 0_b \oplus \bigoplus_{c=1}^{N_3} \lambda_c \beta_c$$

gdzie, $h_a^+ \cong h_b^- \cong \mathbb{C}^2$, $h_c \cong \mathbb{C}^4$, $\underline{G}_a = \underline{G}_b = \underline{G}$ są macierzami Pauliego, $\lambda_c > 0$, $(\underline{L}_c, \beta_c) = (\underline{L}, \beta)$ są macierzami Diraca oraz $0_a = 0_b = 0 = 0$.

/B/ Reprezentacje z antykomutującymi składowymi operatora prędkości

Jak wynika z poprzednich rozważań w skończone wymiarowych reprezentacjach r.h.a, składowe operatora $\underline{A}$ antykomutują. W punkcie tym podamy klasyfikację wszystkich nieprzywiedlnych reprezentacji spełniających warunek /2.1/.

Przyjęcie warunku /2.1/ pozwala nam na powtórzenie rozumowania z dowodu lematu 2.1. Rzeczywiście, niech jak poprzednio $\Delta_i = -\frac{i}{8} \epsilon_{ijk} [A_j, A_k]$, $\tilde{m} = m - 1$. Wówczas operatory $\tilde{m}, \underline{n}$ są samosprężone i spełniają relacje komutacji grupy $SL(2, \mathbb{C})$ oraz

$$[\tilde{m}, \underline{A}] = [\underline{n}, \underline{A}] = 0$$

więc także

$$[\tilde{m}, \underline{\Delta}] = [\underline{n}, \underline{\Delta}] = 0$$

Ponieważ $[\Delta_i, \Delta_j] = i \epsilon_{ijk} \Delta_k$, dochodzimy do wniosku, że operatory $(\tilde{m}, \underline{n}, \underline{\Delta})$ tworzą w przestrzeni $\mathfrak{h}$ reprezentacje algebry Liego $sl(2, \mathbb{C}) + su(2)$

Przykład 2.1

Niech $\mathfrak{h}_1$ będzie przestrzenią nieprzywiedlną unitarnej reprezentacji grupy $SL(2, \mathbb{C})$, z generatorami $(\underline{M}, \underline{N})$, a $\mathfrak{h}^{\epsilon} = \mathbb{C}^2$, $\epsilon = \pm 1$ jak poprzednio przestrzenią reprezentacji algebry Clifforda $\mathcal{C}_2$. Wówczas operatory

$$\underline{m} = \underline{M} \otimes 1 + \frac{1}{2} 1 \otimes \underline{\xi}$$

$$\underline{n} = \underline{N} \otimes 1$$

$$\underline{A} = 1 \otimes \epsilon \underline{\xi}$$

tworzą w przestrzeni $\mathfrak{h}_1 \otimes \mathfrak{h}^{\epsilon}$ reprezentację z.r.h.a.

Lemat 2.3

Reprezentacje z przykładu 2.1 są typu I.

D o w ó d :

Udowodnimy, że każdy operator $\underline{A}$ spełniający $/ba/$ i $/baa/$ musi znikać. Korzystając z izometrii $\mathfrak{h}_1 \otimes \mathbb{C}^2 \cong \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_1$ możemy operatory $\underline{m}, \underline{n}, \underline{A}, \underline{A}$ zapisać w blokowo-macierzowej postaci

$$\underline{m}_1 = \begin{pmatrix} \underline{M}_1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \underline{M}_1 \end{pmatrix}; \quad \underline{m}_2 = \begin{pmatrix} \underline{M}_2 - \frac{1}{2} & \\ \frac{1}{2} & \underline{M}_2 \end{pmatrix}; \quad \underline{m}_3 = \begin{pmatrix} \underline{M}_3 + \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \underline{M}_3 - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\underline{n} = \begin{pmatrix} \underline{N} & 0 \\ 0 & \underline{N} \end{pmatrix}$$

$$\underline{A}_1 = \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \underline{A}_2 = \epsilon \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \underline{A}_3 = \epsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b^+ & a \end{pmatrix}$$

gdzie: $a = a^*$, $d = d^*$, b są operatorami w przestrzeni $\mathfrak{h}_1$.

Z /ba/ i /baa/ mamy

$$[M_1, a] = -[M_1, d] = \varepsilon [N_2, a] = \varepsilon [N_2, d] = \frac{1}{2}(b - b^*);$$

$$[M_1, b] = i [M_2, b] = \frac{1}{2}(\alpha - d);$$

$$[M_2, a] = -[M_2, d] = -\varepsilon [N_1, a] = -\varepsilon [N_1, d] = \frac{1}{2}(b + b^*);$$

$$[M_3, a] = [M_3, d] = [N_3, b] = 0; [M_3, b] = -b;$$

$$[N_3, a] = -i \varepsilon a; [N_3, d] = -i \varepsilon d;$$

$$[N_2, b] = i [N_1, b] = -\frac{1}{2} \varepsilon (\alpha + d);$$

Z tożsamości Jacobiego $[M_3, [M_1, d]] + \text{cykl.} = 0$ otrzymamy $b^* = -b$. Uwzględniając ten fakt z $[M_2, b] = \frac{1}{2}(d - \alpha)$ wynika $d = \alpha$. Teraz $[M_1, a] = b$, $[M_2, a] = [M_3, a] = 0$, więc $b = 0$. W końcu $[N_1, b] = -i \varepsilon a$ prowadzi do $a = 0$

□

Twierdzenie 2.2

Reprezentacje z przykładu 2.1 wyczerpują zbiór wszystkich nieredukowalnych reprezentacji r.h.a typu I spełniających warunek /2.1/.

D o w ó d :

Każda nieprzywiedlna reprezentacja r.h.a typu I jest nieprzywiedlną reprezentacją z.r.h.a /twierdzenie odwrotne nie jest na ogół prawdziwe/. Wobec lematu 2.3, wystarczy pokazać, że reprezentacje z przykładu 2.1 wyczerpują zbiór wszystkich nieprzywiedlnych reprezentacji z.r.h.a.

Skorzystamy teraz z twierdzenia Dixmiera [21] /twierdzenie 13.18 str. 273/. Orzeka ono, że jeśli G_1 jest grupą typu I, to każda unitarna nieprzywiedlna reprezentacja iloczynu

prostego $G_2 \times G_1$ jest postaci $T_1 \otimes T_2$, gdzie T_1, T_2 są odpowiednio nieprzywiedlnymi unitarnymi reprezentacjami grup G_1, G_2 . $SU(2)$ jak każda grupa zwarta jest typu I [22]. Dowód kończy spostrzeżenie, że w naszym wypadku, reprezentacja $SU(2)$ zadana jest przez reprezentację algebry Clifforda ℓ_3 . $\square$ Przejdźmy teraz do klasyfikacji reprezentacji z nietrywialnym operatorem masy. Założenie

$$\{A_1, A\} = 0 \quad /2.3/$$

pozwała nam na powtórzenie rozumowania z dowodu lematu 2.2. Rzeczywiście, operator A^2 komutuje w tym wypadku z pozostałymi generatorami reprezentacji. Jeśli więc $\lambda^2 \gg 0$ jest wartością własną A^2 , to odpowiadająca mu podprzestrzeń jest podprzestrzenią niezmienniczą. Prowadzi to do następującego przykładu reprezentacji r.h.a.

Przykład 2.2

Niech $(\underline{M}, \underline{N})$ będą generatorami nieprzywiedlnej, unitarnej reprezentacji grupy Lorentza w przestrzeni $\mathfrak{h}_1$, a $(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$ macierzami Diraca. Położmy

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \otimes \mathbb{C}^4$$

$$m_i = M_i \otimes 1 - \frac{i}{2} \epsilon_{ijk} [A_j, A_k]$$

$$\underline{n} = \underline{N} \otimes 1$$

$$\underline{A} = 1 \otimes \underline{\alpha}$$

$$A = \lambda \cdot 1 \otimes \beta \quad ; \quad \lambda \neq 0$$

Twierdzenie 2.3

Reprezentacje z przykładu 2.2 wyczerpują zbiór wszystkich

unitarnych i nieprzywiedlnych reprezentacji r.h.s typu II, spełniających warunki /2.1/, /2.3/, $\mathcal{H}^2$ - ma dyskretne spektrum.

D o w ó d :

Dowód przebiega analogicznie do drugiej części dowodu twierdzenia 2.2. W miejsce $SU(2)$ należy wybrać 32-elementową grupę Diraca [36], generowaną przez relacje /2.2/

□

Równanie Schrödingera dla reprezentacji z przykładu 2.1 ma postać równania Weyla

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \epsilon \underline{G} \underline{P} \Psi \quad /2.4/$$

dla dwukomponentowego neutrina. Różnica polega na tym, że funkcja falowa $\Psi = \Psi(t, x, z)$ zależy dodatkowo od zespolonego parametru z . Wynika to z faktu, że unitarne reprezentacje grupy $SL(2, \mathbb{C})$, mogą być realizowane w przestrzeni $L^2(\mathbb{C}, dz d\bar{z})$. Własności transformacyjne będą inne niż spinora Weyla. Parametr "z" będzie oddziaływał z minimalnie sprzężonym polem grawitacyjnym.

Podobnie w przypadku reprezentacji typu II, otrzymamy nieskończenie - komponentowe równanie Diraca

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi = (\underline{G} \underline{P} + \lambda \beta) \Psi \quad /2.5/$$

gdzie $\Psi = \Psi(t, x, z) \in \mathbb{C}^4$

Oba równania można rozwiązać metodami analogicznymi jak w przypadku skończenie wymiarowym.

/0/ Reprezentacje z komutującymi składowymi operatora prędkości

Zbadamy teraz alternatywny do poprzednio rozważanego przypadek, mianowicie gdy

$$[A_i, A_j] = [A_i, A] = 0 \quad /2.6/$$

Z /2.6/ wynika, że operatory $(\underline{m}, \underline{n})$ reprezentacji $(\underline{m}, \underline{n}, \underline{A}, A)$ z.r.h.a., spełniają relacje komutacji grupy $SL(2, \mathbb{C})$, oraz

$$[m_i, A_j] = i \epsilon_{ijk} A_k \quad /2.7a/$$

$$[n_i, A_j] = i (\delta_{ij} - A_i A_j)$$

$$[m_i, A] = 0$$

/2.7b/

$$[n_i, A] = -i A_i A$$

Ostatnie związki oznaczają, że zarówno w przypadku /2.7a/ jak i /2.7a-b/ mamy do czynienia z algebraiczną postacią układu imprymitywności 16 /tom II s.146/. Przypadek /2.7a/ odpowiada reprezentacji z.r.h.a. Musimy teraz odpowiedzieć na następujące pytanie: na jakiej $SL(2, \mathbb{C})$ przestrzeni w bazu-je układ imprymitywności /2.7/. Odpowiedzi na to pytanie udzieli następujący lemat.

Lemat 2.4

Niech $(\underline{m}, \underline{n}, \underline{\pi}_\mu)$ będą generatorami unitarnej reprezentacji grupy Poincarego, oraz niech istnieje $\underline{\pi}^{0-1}$. Wówczas operatory $(\underline{m}, \underline{n}, \underline{A}, A)$, gdzie $\underline{A} = \underline{\pi} \underline{\pi}^{0-1}$, $A = \underline{\pi}^{0-1}$ spełniają związki komutacji /2.6/ i /2.7/.

D o w ó d :

Przez bezpośredni rachunek. Na przykład, mnożąc obustronnie

przez $\frac{1}{\pi^0}$ z $[\underline{n}, \pi^0] = i \underline{\pi}$ dostaniemy $[\underline{n}, \frac{1}{\pi^0}] = -i \frac{\underline{\pi}}{\pi^0} \cdot \frac{1}{\pi^0}$. $\square$

Wniosek z powyższego lematu jest stwierdzenie, że układ imprymitywności /2.7a/ odpowiada działaniu grupy Lorentza w przestrzeni rzutowej $P(\mathbb{R}^4)$. Rzeczywiście, punktami przestrzeni rzutowej $P(\mathbb{R}^4)$ są proste w przestrzeni $\mathbb{R}^4$, przechodzące przez początek układu współrzędnych. Grupa Lorentza działa liniowo w $\mathbb{R}^4$, więc przeprowadza proste w proste. Niech $p \in P(\mathbb{R}^4)$ a $y = (y_0, \underline{y})$ będzie punktem na prostej p . Każdej takiej prostej /z wyjątkiem prostych leżących na hiperpowierzchni $y^0 = 0$ możemy przyporządkować współrzędne $W_i \doteq \frac{y_i}{y^0} \in \mathbb{R}^3$. Ale jak wynika z lematu 2.4 operator A_i przekształca się jak $\frac{y_i}{y^0}$, więc $W = P(\mathbb{R}^3)$. Dalej ograniczymy się do przypadku tranzytywnych układów imprymitywności. Działanie $SL(2, \mathbb{C})$ w $P(\mathbb{R}^4) \stackrel{P.W.}{\cong} \mathbb{R}^3 / \stackrel{P.W.}{\cong}$ oznacza równość z dokładnością do zbioru miary zero/, ma trzy obszary tranzytywności /orbity/: $W^2 < 1$, $W^2 = 1$ i $W^2 > 1$. Oznaczmy je kolejno W_+ , W_0 , W_- . Obszary te można otrzymać przez zrzutowanie odpowiednio: hiperboloidy dwupowłokowej $y^2 = -1$, stożka $y^2 = 0$ i hiperboloidy jednopowłokowej $y^2 = 1$. Grupami stabilności w pierwszym i ostatnim przypadku są $SU(2)$ i $SU(1,1) = SL(2, \mathbb{R})$. Grupą stabilności punktu na sferze W_0 jest paraboliczna podgrupa $\mathcal{P} = (\mathbb{R}^+ \times U(1)) \ltimes \mathbb{R}^2$ z działaniem [23]:

$$(\lambda, \vartheta, z)(\lambda', \vartheta', z') = (\lambda \lambda', \vartheta + \vartheta', z' + \lambda^2 e^{i2\vartheta} z) \quad /2.8/$$

Możemy teraz posłużyć się twierdzeniem Mackeya o imprymitywności [16], [23], by otrzymać wszystkie nieredukowalne, tranzytywne układy imprymitywności odpowiadające relacjom /2.7a/. Najpierw jednak zajmiemy się reprezentacjami typu II.

W tym przypadku konstrukcję Mackeya można ominąć.

Lemat 2.5

Jeśli operatory $(\underline{m}, \underline{n}, \underline{A}, A)$ tworzą nieprzywiedlną reprezentację r.h.a typu II, spełniającą /2.6/, to istnieje A^{-1} .

D o w ó d :

Założmy, że A jest nieodwracalny. Oznacza to, że 0 jest wartością własną operatora A . Niech h_0 będzie odpowiednią podprzestrzenią własną. Z /2.6/ i /2.7/ wynika, że h_0 jest niezmiennicza względem operatorów $(\underline{m}, \underline{n}, \underline{A})$. Rzeczywiście, jeśli $\psi \in h_0$, to $A n_i \psi = (n_i A - i A_i A) \psi = 0$ więc $n_i \psi \in h_0$. Z nieprzywiedlności wynika $A = 0$

Lemat 2.6

Istnieje 1-1 odpowiedniość pomiędzy nieredukowalnymi reprezentacjami r.h.a typu II, spełniającymi warunek /2.6/ a unitarnymi, nieprzywiedlnymi reprezentacjami grupy Poincarego z $\pi \neq 0$

D o w ó d :

Niech $(\underline{m}, \underline{n}, \underline{A}, A)$ będzie taką reprezentacją. Ponieważ $A \neq 0$ to istnieje A^{-1} . Łatwo sprawdzić, że operatory $(\underline{m}, \underline{n}, \underline{\pi}, \pi^0)$, gdzie $\pi^0 = A^{-1}$, $\underline{\pi} = \underline{A} A^{-1}$ spełniają relacje komutacji grupy Poincarego. Twierdzenie odwrotne wynika z lematu 2.4.

Lemat 2.7

Reprezentacje z.r.h.a, odpowiadające nieprzywiedlnym i tranzytywnym układom imprymitywności /2.7a/, bazującym na przestrzeniach W_+ i W_- są typu II.

D o w ó d :

Dowód przeprowadzimy dla przypadku $y^2 < 1$. Zgodnie z twierdzeniem Mackeya, układ taki może być realizowany w przestrzeni $L^2(W_0, \mathcal{H}, d^1w)$, gdzie $\mathcal{H}$ jest przestrzenią nieprzywiedlnej, unitarnej reprezentacji małej grupy $SU(2)$. Operatory A_i mają kanoniczną postać, tzn. $(\underline{A} f)(\underline{w}) = \underline{w} f(\underline{w})$.

Sprawdzimy, że operator $A = \sqrt{1 - \underline{w}^2} = \sqrt{1 - A^2}$ spełnia relacje /2.7b/. Rzeczywiście, z /2.7a/ wynika

$$[n_i, A^2] = 2i A_i (1 - A^2)$$

więc

$$-2i A_i (1 - A^2) = [n_i, 1 - A^2] = 2\sqrt{1 - A^2} [n_i, \sqrt{1 - A^2}]$$

$$\text{stad } [n_i, A] = -i A_i A$$

Analogiczny rachunek można przeprowadzić dla $w^2 > 1$ z $A = \sqrt{A^2 - 1}$. $\square$

Pozostał nam jeszcze przypadek tranzytywnych, nieprzywiedlnych układów imprymitowności, bazujących na sferze W_0 . Układy takie mogą być realizowane w przestrzeni $\mathcal{h} \cong L^2(W_0, \mathcal{H}, dw)$ gdzie dw jest kanoniczną miarą na sferze, a $\mathcal{H}$ przestrzenią unitarnej nieprzywiedlnej reprezentacji małej grupy. Sklasyfikujemy wprawdzie przestrzeń $\mathcal{H}$.

Mała grupa $P = (\mathbb{R}^+ \times U(1)) \ltimes \mathbb{R}^2$ ma strukturę regularnego iloczynu półprostego [23] grupy $\mathbb{R}^+ \times U(1)$ z grupą translacji $\mathbb{R}^2$. Wynika stad, że jej reprezentacje mogą być realizowane w przestrzeniach $\mathcal{H} \cong L^2(\Omega, k, d\mu_k)$, gdzie Ω jest orbitą grupy $\mathbb{R}^+ \times U(1)$ w przestrzeni $\mathbb{R}^2$, a k jest przestrzenią nieprzywiedlnej unitarnej reprezentacji małej grupy, przynależnej do orbity Ω . Łatwe sprawdzić, że działanie $R \in \mathbb{R} \rightarrow \lambda^2 e^{i2\phi} z$

ma dwa obszary tranzytywności $\Omega_+ = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ i $\Omega_0 = \{0\}$. W pierwszym przypadku małą grupą punktu z Ω_+ jest podgrupa $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$. $\mathbb{Z}_2$ ma dwie nierównoważne reprezentacje, działające w przestrzeniach $k^\delta = \mathbb{C}$, gdzie $\delta = 0$ odpowiada trywialnej reprezentacji a $\delta = 1$ wiernej. Ostatecznie więc $\mathcal{H}^\delta \cong \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2, k^\delta, dx dy) = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}, dx dy)$. W drugim przypadku $\Omega_0 = \{0\}$ małą grupą jest podgrupa $\mathbb{R}^+ \times U(1)$. Wszystkie nieprzywiedlne unitarne reprezentacje $\mathbb{R}^+ \times U(1)$ są jednowymiarowe i mają postać

$$(\lambda, \nu) \rightarrow \lambda^{i\sigma} e^{im\theta}; \quad \sigma \in \mathbb{R}, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

W tym wypadku $\mathcal{H}^{i\sigma, m} = k^{i\sigma, m} = \mathbb{C}$.

Tranzytywne układy imprymitywności realizowane w przestrzeniach $\mathcal{L}^2(W_0, \mathcal{H}^{i\sigma, m}, d\omega)$ są nieredukowalnymi reprezentacjami grupy Lorentza. Tworzą one główną serię reprezentacji unitarnych [23]. Zazwyczaj, realizowane są nie w przestrzeni funkcji na sferze, ale w przestrzeni funkcji na uzavarczonej płaszczyźnie zespolonej $\bar{\mathbb{C}}$. Przejście $W_0 \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ odbywa się za pomocą rzutu stereograficznego $\omega \rightarrow z = \frac{\omega_1 + i\omega_2}{1 - \omega_3}$. $SL(2, \mathbb{C})$ działa w $\bar{\mathbb{C}}$ odwzorowaniami prawie liniowymi:

gdzie $z \rightarrow z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$. $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$.

Reasumując dotychczasowe rozważania stwierdzamy, że zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.4

Nieprzywiedlne unitarne reprezentacje grupy Poincarego, z wyjątkiem uzupełniającej serii reprezentacji unitarnych grupy Lorentza, oraz reprezentacje realizowane w przestrzeni $\mathcal{L}^2(W_0, \mathcal{H}^\delta, d\omega)$, $\delta = 0, 1$, wyczerpują zbiór wszystkich nieprzywiedlnych r.h.a spełniających warunek /2.6/ /w klasie tranzy-

reprezentacji

tywnych układów imprymitywności /2.7//.

□

Napišemy teraz równanie Schrödingera dla układów kwantowych z komutującymi składowymi operatora prędkości. Wektor stanu takiego układu należy do przestrzeni $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3, \hbar, d^3x)$, gdzie $\hbar$ jest przestrzenią nieprzywiedlnej unitarnej reprezentacji grupy Poincarégo. Jak wiadomo $\hbar$ może być realizowana jako przestrzeń $\mathcal{L}^2(V, \mathcal{H}, d\mu)$, gdzie V jest jednym ze zbiorów $V_+^\lambda, V_0, V_-^\lambda, \{0\}$. Zbiory V zadane są odpowiednio przez $y^2 = -\lambda^2, y^2 = 0, y^2 = \lambda^2, \lambda \in \mathbb{R}$. $d\mu$ jest miarą inwariantną na V , a $\mathcal{H}$ przestrzenią nieprzywiedlnej reprezentacji unitarnej małej grupy. Małymi grupami odpowiednio do orbit są $SU(2)$, $E(2)$, $SU(1,1)$ i $SL(2, \mathbb{C})$. Przypadek $SL(2, \mathbb{C})$ omówimy oddzielnie. Równanie Schrödingera ma postać

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Phi = (\underline{\omega} \underline{P} + \omega^0) \Phi \quad /2.9/$$

Funkcja falowa $\Phi = \Phi(t, \underline{x}, y)$, gdzie $y \in V$, ma wartości w przestrzeni $\mathcal{H}$. $\underline{\omega} = \underline{y}$, $\omega^0 = \frac{t}{y^0}$ gdzie $y^0 = \sqrt{y^2 \pm \lambda^2}$ dla $y \in V_\pm^\lambda$ i $y^0 = \sqrt{y^2}$ dla $y \in V_0$. Ogólnym rozwiązaniem tego równania jest

$$\Phi(t, \underline{x}, y) = \Phi_0(\underline{x} - \underline{\omega}t, y) e^{-i\omega^0 t} \quad /2.10/$$

Widzimy stąd, że jeśli $\underline{\omega}^2 > 1$, a tak się dzieje dla $y \in V_-^\lambda$, to propagacja w /2.10/ jest akauzalna. Dlatego też przypadek ten należy wykluczyć /por. uwaga 1.3 i 1.4/.

Jeśli małą grupą jest $SL(2, \mathbb{C})$ to musimy ograniczyć się do głównej serii reprezentacji unitarnych. Teraz $\underline{y} \in W_0$, $y^2 = 1$ i w miejsce /2.9/ otrzymamy

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Phi = (\underline{y} \cdot \underline{p}) \Phi$$

/2.11/

gdzie

$$\Phi = \Phi(t, \underline{x}, \underline{y}) \in \mathbb{C}$$

Ogólne rozwiązanie równania /2.11/ ma postać

$$\Phi(t, \underline{x}, \underline{y}) = \Phi_0(\underline{x} - \underline{y}t, \underline{y}).$$

R o z d z i a ł III

W rozdziale tym wykazemy związek pomiędzy reprezentacjami r.h.a., a pewną klasą niehermitowskich reprezentacji algebry Liego $sl(2, \mathbb{C})$. Niestety, nie doprowadzi to do nowych przykładów r.h.a. Okazuje się bowiem, że znane reprezentacje grupy Lorentza nie spełniają dodatkowego warunku. Nowa technika będzie przydatna do wykazania związków pomiędzy relatywistyczną mechaniką kwantową /w wersji zaproponowanej w pracy/, a teorią niezmienniczych równań falowych, dających się otrzymać z niezmienniczej funkcji Lagrange'a.

/A/ Reprezentacja stowarzyszona z r.h.a

Lemat 3.1

Niech $(\underline{m}, \underline{n}, \underline{A})$ będzie reprezentacją z.r.h.a w przestrzeni Hilberta $\mathfrak{h}$. Wówczas operatory $(\underline{m}, \underline{l})$, gdzie $\underline{l} \in \underline{n} - \frac{i}{2} \underline{A}$ tworzą w tej przestrzeni reprezentacje algebry Liego $sl(2, \mathbb{C})$, wraz z dodatkowymi warunkami postaci:

$$l_i^* l_j + l_j^* l_i - l_i l_j - l_j l_i^* = \delta_{ij} \quad /3.1/$$

Na odwrót, niech $(\underline{m}, \underline{l})$, $\underline{m} = \underline{m}^*$, $\underline{l} \neq \underline{l}^*$ będzie reprezentacją $sl(2, \mathbb{C})$ w przestrzeni Hilberta $\mathfrak{h}$. Jeśli spełnione są warunki /3.1/, to operatory $(\underline{m}, \underline{n}, \underline{A})$, gdzie $\underline{n} = \frac{1}{2}(\underline{l} + \underline{l}^*)$, $\underline{A} = i(\underline{l} - \underline{l}^*)$ tworzą w tej przestrzeni reprezentację z.r.h.a.

D o w ó d :

Przez policzenie odpowiednich komutatorów. Na przykład
 $[n_i, A_j] = i \delta_{ij} - \frac{i}{2} \{A_i, A_j\}$ dostaniemy $(n_i + \frac{i}{2} A_i) -$
 $- A_j (n_i - \frac{i}{2} A_i) = i \delta_{ij}$ czyli

$$L_i^* A_j - A_j L_i = i \delta_{ij} \quad /3.2/$$

wstawiając teraz

$$A_j = i (L_i - L_i^*) \quad /3.3/$$

dostaniemy /3.1/.

□

Definicja 3.1

Niech $(\underline{m}, \underline{l})$ będzie reprezentacją $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ spełniającą warunki /3.1/. Reprezentacje $(\underline{m}, \underline{l})$ będziemy nazywać stowarzyszoną z reprezentacją r.h.a.

Lemat 3.2

Niech samosprężone operatory $(\underline{M}, \underline{N})$ tworzą w przestrzeni Hilberta h_1 reprezentację algebry $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ i niech $(\underline{m}, \underline{l})$ będzie reprezentacją stowarzyszoną w h_2 . Wówczas iloczyn tensorowy $(\underline{M}, \underline{N}) \otimes 1 + 1 \otimes (\underline{m}, \underline{l})$ jest reprezentacją stowarzyszoną w przestrzeni $h_1 \otimes h_2$.

D o w ó d :

Ponieważ dla operatorów samosprężonych prawa strona /3.1/ znika, łatwo sprawdzić, że operatory $\underline{N} \otimes 1 + 1 \otimes \underline{l}$ spełniają warunki /3.1/.

Uwaga

□

Nieskończenie wymiarowe reprezentacje r.h.a., z antykomutu-

jącymi A_i /przykład 2.1/, można otrzymać metodą lematu 3.2. W miejsce (m, k) należy wziąć reprezentację fundamentalną /spinerową/ $(\frac{1}{2} \leq, \pm \frac{1}{2} \leq)$.

Pojawia się teraz następujące pytanie. Która spośród znanych reprezentacji $sl(2, \mathbb{C})$ jest reprezentacją stowarzyszoną? W skończone wymiarowym przypadku, odpowiedź jest znana /rozdział II /A// - tylko obie reprezentacje fundamentalne spełniają /3.1/. W przypadku nieprzewiedlnych reprezentacji nieskończone wymiarowych oraz nierozkładalnych reprezentacji typu Gelfanda-Ponomariowa odpowiedź daje następujące

Twierdzenie 3.1

1. Niech (m, k) będą generatorami nieprzywiedlnej, nieskończone wymiarowej reprezentacji algebry $sl(2, \mathbb{C})$, odpowiadającej parze (k_0, k_1) [24, 25, 26], gdzie k_0 - całkowita lub połówkowa, k_1 - zespolona. Wówczas (m, k) nie jest reprezentacją stowarzyszoną.
2. Nierozkładalne reprezentacje $sl(2, \mathbb{C})$ typu nieosobliwego /według Gelfanda-Ponomariowa [27]/ nie są reprezentacjami stowarzyszonymi.

/B/ Dowód twierdzenia 3.1

Dla dowodu posłużymy się techniką macierzową Najmarka. Wprowadzimy najpierw operatory pomocnicze P, D, Q [24]. W tym celu wygodnie jest rozważyć ogólniejszą klasę reprezentacji, niż ta, o której jest mowa w twierdzeniu 3.1.

Rozważmy reprezentację $(\pi, \mathcal{H})$, algebry Liego $\mathfrak{su}(2, \mathbb{C})$, w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Będziemy dalej zakładać, że jej część $\mathfrak{su}(2)$ jest całkowalna do reprezentacji T grupy $SU(2)$. Niech wskaźnik $K, K = 0, 1/2, 1, \dots$ numeruje nieredukowalne reprezentacje grupy $SU(2)$. Zdefiniujemy operatory E_{IJ}^K [24]

$$E_{IJ}^K = \int_{SU(2)} \bar{C}_{IJ}^K(g) T(g) dg$$

gdzie $I, J = -K, -K+1, \dots, K$, a $C_{IJ}^K(g)$ są elementami macierzowymi K -tej nieprzywiedlnej reprezentacji. E_{IJ}^K są ograniczonymi operatorami spełniającymi

$$E_{IJ}^K E_{I'J'}^{K'} = \delta^{KK'} \delta_{IJ} E_{IJ}^K$$

W szczególności E_{II}^K są projektorami. X jest domkniętą sumą prostą domkniętych podprzestrzeni $X_I^K = E_{II}^K X$. Odwzorowanie $E_{IJ}^K: X_J^K \rightarrow X_I^K$ jest izometrią.

Jeśli T jest unitarna, to $E_{IJ}^{K'} = E_{JI}^K$. W szczególności E_{II}^K są projektorami ortogonalnymi.

Najmark pokazał [24] /twierdzenie 2 str. 299/, że można wprowadzić operatory

$$P_K: X_K^K \rightarrow X_K^K; \quad Q_K: X_K^K \rightarrow X_{K-1}^{K-1}; \quad D_K: X_{K-1}^{K-1} \rightarrow X_K^K$$

takie, że

$$\begin{aligned} 1_3 E_{JJ}^K &= \sqrt{K^2 - J^2} E_{JK-1}^{K-1} Q_K E_{KJ}^K - J E_{JK}^K P_K E_{KJ}^K - \\ &- \sqrt{(K+1)^2 - J^2} E_{JK+1}^{K+1} D_{K+1} E_{KJ}^K \end{aligned}$$

/3.4/

Jawna postać operatorów P, D, Q znana jest dla nieprzywiedlnych reprezentacji $sl(2, \mathbb{C})$. Jeśli liczby (k_0, k_1) są niezmiennikami takiej reprezentacji, to [28]

$$P_K = \frac{1 k_0 k_1}{K(K+1)}$$

$$Q_K = \frac{i [(K^2 - k_0^2) (K^2 - k_1^2)]^{1/2}}{K (4K^2 - 1)^{1/2} \tau(K)}$$

/3.5/

$$D_K = \frac{i [(K^2 - k_0^2) (K^2 - k_1^2)]^{1/2} \tau(K)}{K (4K^2 - 1)^{1/2}}$$

gdzie $\tau(K)$ jest skończoną, niezerową liczbą zespoloną, dla $K = k_0, k_0+1, \dots$

Zapiszemy teraz warunki /3.1/ za pomocą operatorów P, D, Q .

Lemat 3.3

Niech $(\mathfrak{m}, \mathfrak{l})$ będzie reprezentacją algebry $sl(2, \mathbb{C})$ w przestrzeni Hilberta taką, że jej część $su(2)$ jest całkowalna do unitarnej reprezentacji grupy $su(2)$. Wówczas /3.1/ jest równoważne z

$$2 l_3^* l_3 - l_3^2 - l_3^{*2} = 1 \quad /3.6/$$

D o w ó d :

Pokażemy, że z /3.6/ wynikają pozostałe związki /3.1/. Korzystając z całkowalności $su(2)$ mamy $e^{-i\frac{\pi}{2} m_1} l_3 e^{i\frac{\pi}{2} m_1} = l_2$. Mnożąc odpowiednio obie strony /3.6/ przez operatory $e^{\pm i\frac{\pi}{2} m_1}$ dostaniemy $2 l_2^* l_2 - l_2^2 - l_2^{*2} = 1$. Licząc obustronnie komutator /3.6/ z operatorem m_2 i pamiętając, że $[l_i, l_j] = [l_i^*, l_j^*]$ otrzymamy $l_1^* l_3 + l_3^* l_1 - l_1 l_3 - l_3 l_1^* = 0$.

□

Lemat 3.4

Niech (m, l) będzie reprezentacją stowarzyszoną w przestrzeni Hilberta X , a P, D, Q operatorami pomocniczymi /3.4/. Wówczas:

$$2 \langle D_K v, Q_{K+1} w \rangle + \langle v, Q_{K+1} Q_K w \rangle + \langle D_{K+1} D_K v, w \rangle = 0$$

/3.7a/

$$\text{dla } v \in X_{K-1}^{K-1}, w \in X_{K+1}^{K+1}, K \geq k_0 + 1$$

$$2 \langle P_K v, Q_{K+1} w \rangle - 2 \langle D_{K+1} v, P_{K+1} w \rangle +$$

/3.7b/

$$+ \langle (D_{K+1} P_K + P_{K+1} D_{K+1}) v, w \rangle - \langle v, (P_K Q_{K+1} + Q_{K+1} P_{K+1}) w \rangle = 0$$

$$v \in X_K^K, w \in X_{K+1}^{K+1}, K \geq k_0$$

$$K^2 F(K, v, w) + (K+1)^2 G(K, v, w) - J^2 (F(K, v, w) + G(K, v, w) +$$

/3.8/

$$+ H(K, v, w)) = \langle v, w \rangle$$

$$\text{dla } v, w \in X_K^K, K \geq k_0, J = -K, -K+1, \dots, K.$$

gdzie

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ SU(2) niezmienniczy iloczyn skalarny w X

k_0 - minimalny spin w reprezentacji SU(2),

$$F(K, v, w) = 2 \langle Q_K v, Q_K w \rangle + \langle D_K Q_K v, w \rangle + \langle v, D_K Q_K w \rangle;$$

$$G(K, v, w) = 2 \langle D_{K+1} v, D_{K+1} w \rangle + \langle Q_{K+1} D_{K+1} v, w \rangle + \langle v, Q_{K+1} D_{K+1} w \rangle;$$

$$H(K, v, w) = -2 \langle P_K v, P_K w \rangle + \langle P_K^2 v, w \rangle + \langle v, P_K^2 w \rangle.$$

D o w ó d :

Zademonstrujemy metodę dowodu. Przepiszmy /3.6/ w postaci

$$2 \langle l_3 x, l_3 y \rangle - \langle l_3^2 x, y \rangle - \langle x, l_3^2 y \rangle = \langle x, y \rangle$$

Teraż podprzestrzenie X_J^K są ortogonalne. Niech $x \in X_J^{K-1}$, $y \in X_J^{K+1}$. Z /3.4/ otrzymujemy

$$\begin{aligned} l_3 x &= l_3 E_{JJ}^{K-1} = \sqrt{(K-1)^2 - J^2} E_{JK-1}^{K-2} Q_{K-1} E_{K-1J}^{K-1} x - \\ &- J E_{JK-1}^{K-1} P_{K-1} E_{K-1J}^{K-1} x + \sqrt{K^2 - J^2} E_{JK}^K D_K E_{K-1J}^{K-1} x. \end{aligned}$$

Analogicznie

$$\begin{aligned} l_3 y &= \sqrt{(K+1)^2 - J^2} E_{JK}^K Q_{K+1} E_{K+1J}^{K+1} y - J E_{JK+1}^{K+1} P_{K+1} E_{K+1J}^{K+1} y - \\ &- \sqrt{(K+2)^2 - J^2} E_{JK+2}^{K+1} D_{K+2} E_{K+1J}^{K+1} y \end{aligned}$$

Widzimy, że $l_3 x$ ma wartości w przestrzeni $X_J^{K-2} \oplus X_J^{K-1} \oplus X_J^K$, natomiast $l_3 y$ w przestrzeni $X_J^K \oplus X_J^{K+1} \oplus X_J^{K+2}$. Wynika stąd, że jedyny nie znikający człon w iloczynie $\langle l_3 x, l_3 y \rangle$ wynosi $-\sqrt{K^2 - J^2} \sqrt{(K+1)^2 - J^2} \langle E_{JK}^K D_K E_{K-1J}^{K-1} x, E_{JK}^K Q_{K+1} E_{K+1J}^{K+1} y \rangle$.

Niech $v = E_{K-1J}^{K-1} x$, $w = E_{K+1J}^{K+1} y$. Pamiętając, że operator E_{JK}^K jest izometrią, otrzymamy

$$\langle l_3 x, l_3 y \rangle = -\sqrt{K^2 - J^2} \sqrt{(K+1)^2 - J^2} \langle D_K v, Q_{K+1} w \rangle$$

czyli pierwszą część /3.7a/. □

Uwaga

Dla $K > 1/2$ J^2 przyjmuje co najmniej dwie wartości. Ponieważ funkcje F, G, H nie zależą od J , więc równanie /3.8/ rozdziela się na dwa równania postaci:

$$K^2 F(K, v, w) + (K+1)^2 G(K, v, w) = \langle v, w \rangle; \quad /3.8a/$$

$$F(K, v, w) + G(K, v, w) + H(K, v, w) = 0. \quad /3.8b/$$

Teraz możemy przystąpić do dowodu pierwszej części twierdzenia 3.1.

D o w ó d :

Oznaczmy przez X przestrzeń reprezentacji. Dowód przeprowadzimy nie wprost. Załóżmy, że istnieje w X iloczyn skalarny $\langle \cdot, \cdot \rangle$ spełniający /3.7/ /3.8/. Niech v^{k_0} będzie ustalonym wektorem w X_{k_0} takim że $\|v^{k_0}\| = 1$. Określmy indukcyjnie $v^{K+1} = D_{K+1} v^K$. Z /3.5/ wynika /bez sumowania/:

$$p_K v^K = \frac{1 k_0 k_1}{K(K+1)} v^K = p_K v^K$$

$$q_K v^{K-1} = \frac{(k_0^2 - K^2)(K^2 - k_1^2)}{K^2(4K^2 - 1)} v^K = q_K v^K$$

Wstawmy teraz wektory v^K do /3.7a-3.8b/. Otrzymamy

$$2q_{K+1} + \frac{q_K q_{K+1}}{\alpha_K} + \alpha_{K+1} = 0, \quad K > k_0 \quad /3.9a/$$

$$(2p_K - \bar{p}_K - \bar{p}_{K+1}) \bar{q}_{K+1} - (2\bar{p}_{K+1} - p_K - \bar{p}_{K+1}) \alpha_{K+1} = 0 \quad /3.9b/$$

$$\frac{2q_K \bar{q}_K}{\mathcal{L}_K} + q_K + \bar{q}_K + 2\mathcal{L}_{K+1} + q_{K+1} + \bar{q}_{K+1} =$$

/3.9c/

$$= 2 \|p_K\|^2 - p_K^2 - \bar{p}_K^2 ;$$

$$K^2 \left(\frac{2q_K \bar{q}_K}{\mathcal{L}_K} + q_K + \bar{q}_K \right) + (K+1)^2 (2\mathcal{L}_{K+1} + q_{K+1} + \bar{q}_{K+1}) = 1;$$

/3.9d/

gdzie $\mathcal{L}_K = \frac{\|v^K\|^2}{\|v^{K-1}\|^2} > 0$ dla $K > k_0$. Dowód zakończymy lematem:

Lemat 3.5

Nieskończony układ równań /3.9a-d/ nie posiada dodatnich różnych od zera rozwiązań $\mathcal{L}_K$.

D o w ó d :

Z /3.9/ dostaniemy

$$2\mathcal{L}_K \operatorname{Im} q_{K+1} + \operatorname{Im} q_K q_{K+1} = 0$$

$$2 \operatorname{Re} q_{K+1} + \frac{1}{\mathcal{L}_K} \operatorname{Re} q_K q_{K+1} + \mathcal{L}_{K+1} = 0$$

Kombinując te dwa równania dla $\operatorname{Im} q_K \neq 0$ mamy

$$2 \operatorname{Re} q_{K+1} - 2 \operatorname{Im} q_{K+1} \frac{\operatorname{Re} q_K q_{K+1}}{\operatorname{Im} q_K q_{K+1}} = \frac{\operatorname{Im} q_{K+1} q_{K+2}}{2 \operatorname{Im} q_{K+2}}$$

Uwzględniając postać q_K dochodzimy do sprzeczności, czyli

$$\bar{q}_K = q_K, \text{ więc } \bar{k}_1 = \pm k_1.$$

Rozpatrzmy najpierw przypadek $\bar{k}_1 = -k_1$. Wtedy $\bar{p}_K = p_K$ i prawa strona /3.9c/ znika. Teraz łatwo sprawdzić, że układ

/3.9c-d/ jest sprzeczny.

Analogiczne rozumowanie wyklucza przypadek $k_0 = 0$ i $k_1 = 0$.

Pozostał nam jeszcze przypadek $\bar{k}_1 = k_1$ ($p_K \neq 0$). Z /3.9b/ wyliczamy, że $\mathcal{L}_K = -\frac{2K+1}{K-1} q_K$. Wstawiając to rozwiązanie do /3.9a/ otrzymamy sprzeczność. Reasumując: żadna z wartości k_1 nie daje dobrych rozwiązań układu /3.9a-d/. $\square$

Przejdziemy teraz do dowodu drugiej części twierdzenia 3.1. Teraz $X_J^K = \mathbb{C}^n$ dla każdego K, J . Operatory P, D, Q mają następującą postać [27].

$$P_K = \frac{k_0 k_1}{K(K+1)} [I] + \frac{k_0(k_0+1)}{K(K+1)} [a]$$

$$Q_K = \frac{k_0^2 - K^2}{K^2(4K^2 - 1)} \left\{ (K^2 - k_1^2) [I] + 2ik_1[a] + (k_0^2 + 1) [a^2] \right\}$$

$$D_K = [I]$$

gdzie k_0 - całkowita lub połówkowa, k_1 - zespolona, I macierz jednostkowa, $a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$ jest $n \times n$ klatką Jordana.

Wyberzmy w każdej przestrzeni $X_K^K = \mathbb{C}^n$ wektor v^K , o współrzędnych $[1, 0 \dots 0]$. Zauważmy, że $[a]v^K = 0$. Stąd $D_{K+1}v^K = v^{K+1}$, $P_K v^K = p_K v^K$, $Q_K v^K = q_K v^{K-1}$, gdzie p_K, q_K są takie same jak w przypadku reprezentacji nieredukowalnych. Prowadzi to do układu /3.9a-d/ i lematu 3.5. $\square$

Uwaga

Przypadek nierozkładalnych reprezentacji typu osobliwego [27] pozostaje nierozstrzygnięty.

Na zakończenie pokażemy, że skończone sumy proste reprezentacji z twierdzenia 3.1 nie są reprezentacjami stowarzyszonymi. Mówi o tym następujący lemat.

Lemat 3.6

Niech $(\underline{m}^I, \underline{l}^I)$, $I = 1, 2$ będą dwiema reprezentacjami $sl(2, \mathbb{C})$ w przestrzeniach $\underline{X}^I$. Niech $(\underline{m}, \underline{l}) = (\underline{m}^1, \underline{l}^1) + (\underline{m}^2, \underline{l}^2)$ /+ oznacza sumę prostą/. Jeśli $(\underline{m}, \underline{l})$ jest reprezentacją stowarzyszoną, to i takimi są reprezentacje $(\underline{m}^I, \underline{l}^I)$.

D o w ó d :

Jeśli $\langle , \rangle$ jest iloczynem skalarnym w $X = \underline{X}^1 + \underline{X}^2$, to
 $2 \langle l_3 x, l_3 y \rangle - \langle l_3^2 x, y \rangle - \langle x, l_3^2 y \rangle = \langle x, y \rangle$,
 $\langle \underline{m} x, y \rangle = \langle x, \underline{m} y \rangle$.

Pokażemy, że w przestrzeni $\underline{X}^I$ istnieje iloczyn $\langle , \rangle_I$ spełniający analogiczne związki. Niech $x \in \underline{X}^I$. Wówczas $l_3^I x = l_3^I x$, $\underline{m}^I x = \underline{m}^I x$. Wystarczy teraz w miejsce x, y wstawić wektory $\underline{x}^I, \underline{y}^I$ i zdefiniować $\langle , \rangle_I = \langle , \rangle|_{\underline{X}^I}$ □

/C/ Związek z teorią niezmienniczych równań falowych

Rozpatrzmy równanie postaci:

$$(\Gamma^\mu \partial_\mu + i \Omega) \Psi = 0 \quad /3.10/$$

gdzie, $\Psi: \mathbb{R}^5 \rightarrow h$ jest funkcją falową o wartościach w przestrzeni Hilberta h , a Γ^μ, Ω operatorami w h .

Definicja 3

Mówimy, że równanie /3.10/ jest /relatywistycznie/ niezmiennicze

[29], jeśli w przestrzeni h działają reprezentacje $\overset{4}{T}$, $\overset{2}{T}$ grupy Lorentza, takie że

$$\overset{2}{T}(\Lambda) \Gamma^\mu \overset{4}{T}(\Lambda)^{-1} = \Lambda^{-1\mu}{}_\nu \Gamma^\nu \quad /3.11a/$$

$$\overset{2}{T}(\Lambda) \Omega \overset{4}{T}(\Lambda)^{-1} = \Omega \quad /3.11b/$$

Inaczej mówiąc, równanie /3.10/ jest niezmiennicze jeśli Γ^μ transformuje się jak czterowektor, a Ω jak skalar względem reprezentacji $\overset{4}{T}$, $\overset{2}{T}$ grupy $SL(2, \mathbb{C})$.

Używając teorii Gardinga uogólnionych operatorów tensorowych [29] łatwo jest znaleźć algebraiczną postać /3.11/. Niech $(\overset{I}{m}, \overset{I}{l})$, $I = 1, 2$ będą generatorami reprezentacji $\overset{I}{T}$. Wówczas w miejsce /3.11/ możemy napisać

$$\begin{aligned} \overset{2}{m}_i \Gamma_j - \Gamma_j \overset{4}{m}_i &= i \epsilon_{ijk} \Gamma_k \\ \overset{2}{m}_0 \Gamma_0 - \Gamma_0 \overset{4}{m} &= 0 \\ \overset{2}{l}_i \Gamma_j - \Gamma_j \overset{4}{l}_i &= i \delta_{ij} \Gamma^0 \\ \overset{2}{l} \Gamma^0 - \Gamma^0 \overset{4}{l} &= i \Gamma \end{aligned} \quad /3.12a/$$

$$\begin{aligned} \overset{2}{m} \Omega - \Omega \overset{4}{m} &= 0 \\ \overset{2}{l} \Omega - \Omega \overset{4}{l} &= 0 \end{aligned} \quad /3.12b/$$

Twierdzenie 3.2

Równanie Schrödingera

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi = (-i A^k \partial_k + A) \Psi$$

dla stanów r.l.u.k.s.p.p. jest niezmienniczym równaniem falowym.

D o w ó d :

Niech $(\underline{m}, \underline{n}, \underline{A}, \underline{A})$ będzie reprezentacją r.h.a, a $(\underline{m}, \underline{l})$ reprezentacją z nią stowarzyszoną. Położmy $\underline{m}^1 = \underline{m}^2 = \underline{m}$; $\underline{l}^1 = \underline{l}$; $\underline{l}^2 = \underline{l}^*$; $\Gamma^0 = 1$; $\Gamma_i = A_i$, $\Omega = A$. Pokażemy, że tak określone operatory spełniają relacje /3.12/ niezmienniczego równania falowego. Rzeczywiście, ponieważ $\Gamma^0 = 1$, to /3.2/ i /3.3/ możemy zapisać

$$\begin{aligned} \underline{l}_i^* \Gamma_j - \Gamma_j \underline{l}_i &= i \delta_{ij} \Gamma^0 \\ \underline{l}_i^* \Gamma^0 - \Gamma^0 \underline{l}_i &= i \Gamma_i \end{aligned}$$

Podobnie z /ba/ i /baa/ dostaniemy /porównaj /3.15//

$$\underline{m} A - A \underline{m} = 0$$

$$\underline{l}^* A - A \underline{l} = 0$$

/3.13/

□

Uwaga

Ostatnie równania oznaczają, że A jest operatorem splatającym /edwzorowaniem homomorficznym/ reprezentację $(\underline{m}, \underline{l})$ z reprezentacją do niej kontrgradientną $(\underline{m}, \underline{l}^*)$.

Fizycy najchętniej zajmują się niezmienniczymi równaniami falowymi postaci /3.10/, w których $\hat{T} = \hat{T}^* = T$ [24,25,29-34]. Rozpatrzmy ten przypadek dokładniej. Niech $(\underline{m}, \underline{l})$ będą generatorami reprezentacji T . Wówczas lewe strony w /3.12/ stają się komutatorami. Zazwyczaj zakłada się ponadto, że w przestrzeni h wartości funkcji falowej, istnieje tzw. hermitująca forma $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Forma $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jest niezdegenerowaną /niekoniecznie dodatnio określoną/ formą póktoralinową, względem której zarówno generatory $(\underline{m}, \underline{l})$ jak i operatory Γ^0, Ω są "samosprężone" tzn.

$$\{\psi, \varphi\} = \{\varphi, \psi\} \quad /3.14/$$

gdzie $\psi, \varphi \in h$, ψ jest jednym z operatorów $(\underline{m}, \underline{L}, \Gamma^\mu, \Omega)$.
Jeśli h jest przestrzenią Hilberta, z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle$, wygodnie jest w miejsce formy $\{\cdot, \cdot\}$ wprowadzić hermitujący operator η [34]. η jest samosprzężonym i odwracalnym operatorem w h , takim że $\{\psi, \varphi\} = \langle \psi, \eta \varphi \rangle$. Wówczas warunek /3.14/ można zapisać algebraicznie:

$$\eta \psi = \psi^* \eta. \quad /3.15/$$

Problem istnienia i postaci takich form dla różnych reprezentacji grupy Lorentza, był wielokrotnie dyskutowany w literaturze [24,25].

Jest rzeczą dobrze znaną, że operator η pozwala na wprowadzenie współzmienniczych wielkości na przestrzeni rozwiązań równania /3.10/, takich jak:

$$\begin{aligned} \text{forma biliniowa } \langle \Phi, \Psi \rangle &= \int d\sigma_\mu(x) \langle \Phi(x), \eta \Gamma^\mu \Psi(x) \rangle \\ \text{funkcja Lagrange'a } \mathcal{L}(x) &= \langle \Phi(x), \eta (i \Gamma^\mu \partial_\mu - \Omega) \Psi(x) \rangle \\ \text{czterowektor prądu } j^\mu(x) &= \langle \Phi(x), \eta \Gamma^\mu \Psi(x) \rangle \end{aligned} \quad /3.16/$$

gdzie $\Phi(x), \Psi(x)$ są rozwiązaniami równania falowego, $\sigma(x)$ jest przestrzenno-podobną powierzchnią.

Równanie /3.10/ jest równaniem Eulera-Lagrange'a dla funkcji $\mathcal{L}(x)$. Prąd $j^\mu(x)$ jest współzmienniczy i zachowany. Jego zerową składową interpretujemy jako gęstość ładunku.

Definicja 3

Operatory $(\underline{m}, \underline{L}, \Gamma^\mu, \Omega, \eta)$ działające w przestrzeni Hilberta h , gdzie $(\underline{m}, \underline{L})$ - generatory grupy Lorentza, Γ^μ czterowektor, Ω skalar, η operator hermitujący, nazywamy reprezentacją

relatywistycznej algebry lagrange'owskiej /r.l.a./.

Następujące twierdzenie ustanawia związek pomiędzy formalizmem langrage'owskim i hamiltonowskim.

Twierdzenie 3.3

Niech $(\underline{m}, \underline{n}, \underline{A}, A)$ będzie reprezentacją r.h.a. Załóżmy, że istnieje operator B samosprzężony i odwracalny, oraz taki że

$$[\underline{m}, B] = 0 ; [\underline{n}, B] = \frac{i}{2} \{B, A\}.$$

Wówczas operatory $(\underline{m}, \underline{l}, \underline{\Gamma}, \underline{\Omega}, \eta)$, gdzie $(\underline{m}, \underline{l})$ jest reprezentacją stowarzyszoną, $\underline{\Gamma}^0 \doteq B^{-1}$, $\underline{\Gamma} \doteq B^{-1} \underline{A}$, $\underline{\Omega} \doteq B^{-1} A$, $\eta \doteq B$, tworzą reprezentację r.l.a. Na odwrót, niech $(\underline{m}, \underline{l}, \underline{\Gamma}, \underline{\Omega}, \eta)$ będzie reprezentacją r.l.a, taką że $\eta = \underline{\Gamma}^{0-1}$. Wówczas operatory $(\underline{m}, \underline{n}, \underline{A}, A)$, gdzie $\underline{n} \doteq \underline{l} + \frac{i}{2} \underline{A}$, $\underline{A} \doteq \underline{\Gamma}^{0-1} \underline{\Gamma}$, $A \doteq \underline{\Gamma}^{0-1} \underline{\Omega}$, tworzą reprezentację r.h.a.

D o w ó d :

$\Rightarrow$

B spełnia te same relacje komutacji co A , więc

$$1^* B - B 1 = 0$$

Pokażmy dla przykładu, że $[\underline{l}_i, \underline{\Gamma}_j] = i \delta_{ij} \underline{\Gamma}^0$. Rzeczywiście,

$$[\underline{l}_i, \underline{\Gamma}_j] = (\underline{l}_i B^{-1} A_j - B^{-1} A_j \underline{l}_i) = B^{-1} (\underline{l}_i^* A_j - A_j \underline{l}_i) = i \delta_{ij} B^{-1}$$

$\Leftarrow$

Sprawdźmy dla przykładu, że $[\underline{n}_i, A_j] = i (\delta_{ij} - \frac{1}{2} \{A_i, A_j\})$

$$[\underline{l}_i, \underline{\Gamma}^0] = i \underline{\Gamma}_i \text{ stąd } [\underline{\Gamma}^{0-1}, \underline{l}_i] = i \underline{\Gamma}^{0-1} \underline{\Gamma}_i \underline{\Gamma}^{0-1}$$

Teraz

$$[\underline{l}_i, A_j] = \underline{l}_i \underline{\Gamma}^{0-1} \underline{\Gamma}_j - \underline{\Gamma}^{0-1} \underline{\Gamma}_j \underline{l}_i = \underline{\Gamma}^{0-1} [\underline{l}_i, \underline{\Gamma}_j] - i \underline{\Gamma}^{0-1} \underline{\Gamma}_i \underline{\Gamma}^{0-1} \underline{\Gamma}_j = i \delta_{ij} - i A_i A_j$$

Ostatecznie więc

$$[\underline{n}_i, A_j] = [\underline{l}_i, A_j] + \frac{i}{2} [A_i, A_j] = i \delta_{ij} - \frac{i}{2} \{A_i, A_j\}.$$

□

Ostatnie twierdzenie prowadzi do nowej klasy niezmienniczych równań falowych, w których operator hermitujący $\gamma = \Gamma^{0-1}$ 0 ile autorowi wiadomo, równania tego typu nie były do tej pory badane. Zauważmy, że teraz prąd /3.16/ jest identyczny z prądem prawdopodobieństwa (4.13). Przykładami takich równań są równania /2.5/ i /2.9/. Rzeczywiście, biorąc $B = A$ otrzymamy odpowiednio:

$$(\gamma^\mu P_\mu + \lambda) \Psi = 0$$

$$(\pi^\mu P_\mu + \lambda) \Phi = 0$$

gdzie, $P_\mu = -i \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, γ^μ - γ - macierze Diraca, π^μ generatory przesunięć nieprzywiedlnej reprezentacji grupy Poincarego w przestrzeni stanów wewnętrznych. W ostatnim przypadku mamy również

$$(\pi^2 - m^2) \Phi = 0$$

$$(\omega^2 - m^2 s(s+1)) \Phi = 0$$

gdzie, $\omega^2 = \omega^\mu \omega_\mu$, ω^μ jest wektorem Pauli-Lubanskiego, m , s masa i spin reprezentacji $(\underline{m}, \underline{n}, \pi^\mu)$.

L i t e r a t u r a

1. Newton, T.D., Wigner, E.P., Rev.Mod.Phys. 21, 400 /1949/.
2. Barut, A.O., Malin, S., Rev.Mod.Phys. 40, 632 /1968/.
3. Wightman, A.S., Rev.Mod.Phys. 34, 845 /1962/.
4. Niederle, J., "Localizability of particles" w Proc. of the Conference Smolenice 1976, vol. 3, Veda, Bratislava 1978.
5. Cegła, W., Jadczyk, A., Rep.Math.Phys. 9, 377 /1976/.
6. Cegła, W., Jadczyk, A., Comm.Math.Phys. 57, 213 /1977/.
7. Cegła, W., Jadczyk, A., Lett.Math.Phys. 3, 109 /1979/.
8. Cegła, W., Jancewicz, B., Rep.Math.Phys. 11, 53 /1977/.
9. Jancewicz, B., J.Math.Phys. 18, 2487 /1977/.
10. Borowiec, A., Jadczyk, A., "Relativistic systems with a conserved probability current", Preprint nr 397, I.F.T. Wrocław 1977.
11. Borowiec, A., Jadczyk, A., Lett.Math.Phys. 3, 255 /1979/.
12. Jadczyk, A., "Anticausal current for massless particle", Preprint nr 491, I.F.T, Wrocław 1979.
13. Borowiec, A., "A note on the representations of the hamiltonian relativistic algebra", Preprint nr 521, I.F.T, Wrocław 1980.
14. Broyles, A.A., Phys.Rev. D1, 979 /1970/.
15. Fleming, G.N., J.Math.Phys. 9, 193 /1968/.
16. Varadarajan, V.S., "Geometry of quantum theory" v.2, van Nostrand Reinhold Company 1970.
17. Straumann, N., Helv.Phys.Acta, 40, 518 /1967/.

18. Ekstein, H., "Derivation of Newton's second law from quantum mechanics and invariance", Preprint, Argonne Physics Division, PHY-1968 H.
19. Jauch, J.M., "Foundations of quantum mechanics". Addison-Wesley, London 1968.
20. Piron, C., "Foundations of quantum physics", W.A.Benjamin, London 1976.
21. Dixmier, P.J., "Les C^* -algebras et leurs representations", wyd. ros., Izd. Nauka, Moskva 1974.
22. Maurin, K., "General eigenfunction expansions and unitary representations of topological groups", PWN, Warszawa 1968.
23. Barut, A.O., Raczka, R., "Theory of group representations and applications", PWN, Warszawa 1977.
24. Najmark, M.A., "Liniejnija predstavlenija grupy Lorentza", Gos.Izd.Fiz.Mat.Lit., Moskva 1958.
25. Gelfand, I.M., Minlos, R.A., Sapiro, Z.J., "Predstavlenija grupy vrascenij i grupy Lorentza ich primenenija", Gos.Izd.Fiz.Mat.Lit., Moskva 1958.
26. Gelfand, I.M., Graev, M.I., Vilenkin, N.A., "Obobscennije funkciji" t.5, Gos.Izd.Fiz.Mat.Lit., Moskva 1962.
27. Gelfand, I.M., Ponomarev, V.A., Usp.Mat.Nauk, 23, 3/1968/.
28. Bracken, A.J., Phys.Rev.D10, 1168 /1974/.
29. Wightman, A.S., "Invariant wave equations, general theory and ..." w Proc.of the "Ettore Majorana" /ed. Wightman, A.S., Velo, G./ Lectura Notes in Physics 73, Springer - Verlag 1978.

30. Zwizinger, D., "Method of characteristics in the external field ...", jak wyżej.
31. Seiler, R., "Particles with spin > 1 in external ...", jak wyżej.
32. Le Couteur, K.J., Proc.Roy.Soc. A202, 1068 /1950/.
33. Corson, E.M., "Introduction to tensors, spinors, and relativistic wave equations", Blaskie Son Lim., London 1954.
34. Hurley, W.J., Phys.Rev. D10, 1185 /1974/.
35. Schwartz, L., "Theorie des distributions, Hermann, Paris 1966.
36. Schweber, S.S., "An introduction to relativistic quantum field theory" /wyd.ros./ Izd.Inostr.Lit., Moskva 1963.
37. Steyanov, D.T., Todorov, I.T., J.Math.Phys. 9, 2146 /1968/.
38. Rühl, W., Comm.Math.Phys. 6, ³¹²286 /1967/.
39. Nambu, Y., Phys.Rev. 160, 1171 /1967/.
40. Yukawa, Z., Phys.Rev. 77, 219 /1953/; 91, 415 /1953/.
41. Hegerfeld, G.C., Phys.Rev. D10, 3320 /1974/.
42. Foldy, L.L., Phys.Rev. 102, 568 /1956/.
43. Feschbach, H., Villars, F., Rev.Mod.Phys. 30, 24 /1958/.
44. Moldauer, P.A., Case, K.H., Phys.Rev. 102, 279 /1956/.
45. Guertin, R.F., Wilson, T.L., Ann.Phys. /N.Y./ 104, 427 /1977/.
46. Guth, E., Ann.Phys. /N.Y./ 20, 309 /1962/.

Complete sets of solutions of linear Lorentz
covariant field equations with infinite number
of fields components