Ленинградский ордена Ленина Государственный
университет имени А.А.Жданова

математико-механический факультет

БРЭГМАН Л.М.

РЕЛАКСАЦИОННЫЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ ОБЩЕЙ ТОЧКИ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ.

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук.

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук
И.В.Романовский

Ленинград, 1966

В в е д е н и е

В различных областях математики и её приложениях часто встречаются задачи нахождения общей точки некоторой системы множеств или минимизации некоторой функции на пересечении этих множеств. К таким задачам можно отнести нахождение решений систем уравнений и неравенств, задачи оптимального программирования, некоторые функциональные уравнения и неравенства и т.д. Иногда к задаче нахождения общей точки системы множеств можно свести задачи, которые первоначально довольно далеки от такой формулировки.

Однако в общем случае такие задачи трудно поддаются решению. Даже в случае небольшого числа множеств нахождение их общей точки - трудная вычислительная задача.

Гораздо более благоприятно обстоят дела для случая, когда все рассматриваемые множества выпуклы. В этом случае (а особенно в случае, когда эти множества заданы неравенствами $f(x) \leq 0$, где $f(x)$ выпуклая функция) можно предложить ряд эффективных методов (например, см. [I7] , [I6], [I5], [2I]). Также поддаются решению задачи минимизации выпуклых функций на пересечении выпуклых множеств (задачи выпуклого программирования) (см. например [I7], [20]).

Однако часто методы, эффективные для задач небольшого размера, оказываются непригодными для очень больших задач из-за ограниченности памяти Э.В.М. Причём это часто бывает не из-за большого объёма исходной информации, а ~~не~~ из-за того, что в процессе счёта требуется хранить целый ряд промежуточных данных. Например, часто возникают задачи линейного программирования очень большого размера, подавляющее большинство исходных данных у которых нули или нули и единицы. Однако при решении этих задач каким-либо алгорифмом симплекс-метода это обстоятельство бывает трудно использовать.

Поэтому возникает потребность в таких методах, которые используют структуру задачи (например, учитывают, что в исходной информации много нулей и т.д.). К таким методам можно отнести, например, методы блочного программирования для решения задач линейного программирования ([5], [34]). К таким методам можно отнести и релаксационные методы.

Релаксационный метод для решения систем линейных неравенств был предложен Эгмоном [27] и Моцкином [32]. Идея этого метода следующая: берется произвольное начальное приближение x^0, затем x^0 проектируется на полупространство, определяемое одним из линейных неравенств (у Эгмона и Моцкина на максимально удалённое от x^0 полупространство) проекция точки x^0 принимается за первое приближение x^1 и т.д. Полученная последовательность $\{x^n\}$ сходится к некоторой точке x^* - решению системы неравенств. Этот метод имеет наглядную геометрическую интерпретацию (рис.I).

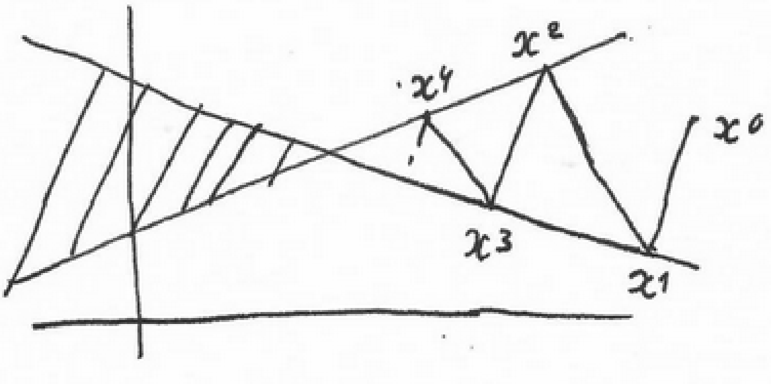

рис.I.

Метод Эгмона-Моцкина был обобщён для случая произвольных замкнутых выпуклых множеств И.И.Ерёминым [I5]. Затем различными авторами рассматривались модификации и обобщения в различных направоениях этого метода (см. [22], [I7], [8])

В.А.Булавским ([5]) был рассмотрен релаксационный метод для решения задач линейного программирования. В методе В.А.Булавского проектирование на полупространства сочетаются со сдвигами точек последовательности $\{x^n\}$ в направлении антиградиента минимизируемой функции.

В данной диссертации рассматривается релаксационный метод нахождения общей точки выпуклых множеств, близкий по идее к методу Моцкина. В этом методе каждое следующее приближение находится из предыдущего путем нахождения так называемой D -проекции на некоторое выпуклое множество. D -проекцией точки y на множество A называется точка $x \in A$, которая минимизирует функцию $D(z,y)$ по всем $z \in A$. Если $D(x,y)$ - евклидово расстояние, то D -проекция совпадает с обычной проекцией.

Релаксационный метод с функцией $D(x,y)$, отличной от расстояния в ряде случаев бывает более выгодным. Например, если по условию задачи некоторые переменные должны быть неотрицательны, то бывает удобно рассматривать функцию $D(x,y)$ содержащую логарифмы этих переменных (метод решения задач линейного программирования, основанный на этой идее см. например [33]). Кроме того, рассмотрение D -проекций вместо обычных проекций позволяет получить алгоритмы для решения релаксационным методом задач выпуклого программирования.

В § I диссертации рассматриваются условия, которым должна удовлетворять функция $\mathcal{D}(x,y)$, и при этих условиях доказываются теоремы о сходимости релаксационного метода.

В § 2 рассматриваются примеры функций $\mathcal{D}(x,y)$, удовлетворяющих условиям § I.

В § 3 изучается, как зависит точка, к которой сходится последовательность, полученная в результате релаксационного метода, от начального приближения. Эта зависимость используется для решения задач выпуклого программирования и двойственных к ним задач.

В § 4 и § 5 рассматривается применение релаксационного метода для решения задач линейного и квадратичного программирования.

В § 6 оценивается скорость сходимости релаксационного метода. При этом в ряде случаев сходимость оказывается не медленней, чем сходимость геометрической прогрессии.

В § 7 рассматривается некоторая модификация релаксационного метода, которая позволяет в ряде случаев упростить вычисления.

В § 8 релаксационный метод применяется для решения систем неравенств в гильбертовом пространстве.

И, наконец, в § 9 рассматривается вопрос, как обнаружить, что задача не имеет решения, т.е., что рассматриваемые множества не имеют общей точки.

Основное содержание диссертации опубликовано в [I] - [3]

§ I. Релаксационный метод для нахождения общей точки выпуклых множеств

Пусть задано линейное топологическое пространство X (все определения, относящиеся к линейным топологическим пространствам см. [6]).

Пусть в X задано некоторое семейство замкнутых выпуклых множеств A_i, $i \in \mathcal{J}$, где $\mathcal{J}$ - некоторое множество индексов. Будем предполагать, что $R = \bigcap\limits_{i \in \mathcal{J}} A_i$ не пусто.

Требуется найти какую-либо точку из пересечения множеств A_i.

Пусть $S \in X$ некоторое выпуклое множество, такое что $S \cap R \neq \Lambda$.

Рассмотрим функцию $\mathcal{D}(x,y)$, заданную на $S \times S$ и удовлетворяющую следующим условиям:

I. $\mathcal{D}(x,y) \geqslant 0$; $\mathcal{D}(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$.

II. Для любого $y \in S$ и $i \in \mathcal{J}$ существует точка $x = P_i y \in A_i \cap$ такая, что $\mathcal{D}(x,y) = \min\limits_{z \in A_i \cap S} \mathcal{D}(z,y)$

Эту точку x будем называть $\mathcal{D}$ -проекцией точки y на множество A_i.

III. Для любого $y \in S$ и $i \in \mathcal{J}$ функция $\varphi(z) = \mathcal{D}(z,y) - \mathcal{D}(z, P_i y)$ выпукла на $A_i \cap S$.

IV. Существует производная $\mathcal{D}'_x(x,y)$ функции $\mathcal{D}(x,y)$ при $x = y$, причём $\mathcal{D}'_x(y,y) = 0$ (т.е. при всех

$$z \in X \quad \lim_{t \to 0} \frac{\mathcal{D}(y+tz, y)}{t} = 0 \;).$$

У. При каждом $z \in R \cap S$ и при каждом вещественном числе L множество $T = \{x \in S \mid D(z,x) \leq L\}$ компактно.

УI. Если $D(x^n, y^n) \to 0$, $y^n \to y^* \in \bar{S}$ ($\bar{S}$ - замыкание множества S) и множество элементов последовательности $\{x^n\}$ компактно, то $x^n \to y^*$

Функцию, удовлетворяющую условиям I-УI, будем называть функцией релаксации.

Пусть задана некоторая функция релаксации $D(x,y)$

Рассмотрим следующий итеративный процесс:

I. Берём произвольную точку $x^0 \in S$

2. Если известна точка $x^n \in S$, то выбираем некоторым образом индекс $i_n \in J$ и находим точку x^{n+1} - D - проекцию точки x^n на множество A_{i_n}.

Полученную в результате этого процесса последовательность $\{x^n\}$ будем называть релаксационной последовательностью.

Последовательность индексов $\{i_0, i_1, \ldots\}$, которые выбираются на каждом шагу, будем называть, следуя [26], управлением релаксацией.

Управление релаксацией $\{i_0, i_1, \ldots\}$ будем называть подходящим, если при любом начальном приближении $x^0 \in S$ все предельные точки релаксационной последовательности $\{x^n\}$ принадлежат R .

Мы будем рассматривать чаще всего следующие управления релаксацией:

I-е управление. Пусть $\mathcal{J} = \{1, 2, \ldots m\}$

Тогда будем выбирать индексы циклически, т.е. $i_0 = 1$, $i_1 = 2, \ldots i_{m-1} = m$, $i_m = 1$, $i_{m+1} = 2$ и т. д.

Это управление релаксацией будем также называть циклическим.

2-е управление. Пусть $\mathcal{J}$ - произвольное множество и при каждом $y \in S$ существует $\max\limits_{i \in \mathcal{J}} \min\limits_{x \in A_i} D(x, y)$

В качестве i_n будем выбирать тот индекс, который реализует $\max\limits_{i \in \mathcal{J}} \min\limits_{x \in A_i} D(x, x^n)$. Если таких индексов несколько, то в качестве i_n можно взять любой из них.

3-е управление. Пусть $A_i = \{x \in X \mid f_i(x) \geqslant b_i\}$, где f_i - линейные функционалы на X, b_i - вещественные числа. Зададимся некоторым числом $\gamma > 0$ и в качестве i_n будем выбирать тот индекс, для которого имеет место

$$b_{i_n} - f_{i_n}(x^n) \geqslant \gamma \sup_{i \in \mathcal{J}} (b_i - f_{i_n}(x^n)).$$

В частности, если при каждом $y \in S$ существует $\max\limits_i (b_i - f_i(y))$, то в качестве i_n можно выбирать тот индекс, который реализует $\max\limits_{i \in \mathcal{J}} (b_i - f_i(x^n))$

Докажем, что эти три управления являются подходящими.

Нам понадобятся следующие леммы:

Лемма I. Пусть $D(x, y)$ - функция релаксации и пусть $z \in A_i \cap S$. Тогда при любом $y \in S$ имеет место неравенство:

$$D(P_i y, y) \leq D(z, y) - D(z, P_i y).$$

Доказательство. Согласно условию Ш при всех $\lambda \in [0,1]$ имеем

$$D(\lambda z+(1-\lambda)P_i y, y) - D(\lambda z+(1-\lambda)P_i y, P_i y) \leq$$
$$\leq \lambda (D(z,y) - D(z, P_i y)) + (1-\lambda) D(P_i y, y).$$

Отсюда при $\lambda > 0$ получим

$$D(z,y) - D(z, P_i y) - D(P_i y, y) \geq$$
$$\geq \frac{D(\lambda z+(1-\lambda)P_i y, y) - D(P_i y, y)}{\lambda} - \frac{D(\lambda z+(1-\lambda)P_i y, P_i y)}{\lambda} \quad (1.1)$$

Т.к. $\lambda z+(1-\lambda)P_i y \in A_i \cap S$, то первое слагаемое в правой части (I.I) неотрицательно (ввиду условия П), а второе стремится к ~~нему~~ нулю при $\lambda \to 0$ (ввиду условия IУ). Отсюда $D(z,y) - D(z, P_i y) - D(P_i y, y) \geq 0$

Лемма доказана.

Лемма 2. При любом управлении релаксацией имеет место:

I) Множество элементов релаксационной последовательности $\{x^n\}$ компактно.

2) При любом $z \in R \cap S$ существует $\lim D(z, x^n)$

3) $D(x^{n+1}, x^n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Возьмём $z \in R \cap S$. По лемме I

$$D(x^{n+1}, x^n) \leq D(z, x^n) - D(z, x^{n+1}) \quad (1.2)$$

Т.к. $D(x^{n+1}, x^n) \geq 0$, то $D(z, x^{n+1}) \leq D(z, x^n)$.

Следовательно, существует $\lim D(z, x^n)$, что вместе с (I.2) даёт $D(x^{n+1}, x^n) \to 0$.

Т.к. множество элементов релаксационной последовательности $\{x^n\}$ содержится в множестве

$$T = \{x \in S \mid D(z,x) \le D(z,x^0)\},$$

которое согласно условию У компактно, то утверждение I)леммы также верно.

Теорема I. I-е управление релаксацией является подходящим.

Доказательство. Пусть x^* - предельная точка последовательности $\{x^n\}$ и $x^{n_k} \longrightarrow x^*$

Выделим из последовательности $\{x^{n_k}\}$ подпоследовательность, целиком содержащуюся в одном из множеств A_i, например в A_1. Будем считать, что уже $\{x^{n_k}\} \subset A_1$. Выделим из последовательностей $\{x^{n_k+i-1}\}$ сходящиеся подпоследовательности. Можно считать ~~сходящиеся~~, что уже сами последовательности $\{x^{n_k+i-1}\}$ сходящиес Пусть

$$x^{n_k} \longrightarrow x^* = x_1^*$$
$$x^{n_k+1} \longrightarrow x_2^*$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x^{n_k+m-1} \longrightarrow x_m^*$$

т.к. $\{x^{n_k+i-1}\} \subset A_i$, то $x_i^* \in A_i$

По лемме 2 $D(x^{n_k+1}, x^{n_k}) \to 0$. Вследствие условия УI $\lim x^{n_k+1} = \lim x^{n_k} = x_1^* = x_2^*$

Аналогично $x_2^* = x_3^*$, $x_3^* = x_4^*$ и т.д.

Следовательно $x^* \in$ ~~A_2~~ R

Теорема 2. 2-е управление релаксацией является подходящим.

Доказательство. Пусть $x^{n_k} \to x^*$

Обозначим через $y_i^{n_k}$ D -проекцию точки x^{n_k} на множество A_i. Тогда

$$D(y_i^{n_k}, x^{n_k}) \le \max_{j \in J} D(y_j^{n_k}, x^{n_k}) = D(x^{n_k+1}, x^{n_k})$$

Т.к. по лемме 2 $D(x^{n_k+1}, x^{n_k}) \to 0$, то и

$$D(y_i^{n_k}, x^{n_k}) \to 0 . \tag{1.3}$$

По лемме I при любом $z \in R$ имеет место

$$D(z, y_i^{n_k}) \le D(z, x^{n_k}) \le D(z, x^0) .$$

Следовательно, по условию У множество $\{y_i^{n_k}\}$ компактно, что вместе с (I.3) на основании условия УI даёт $y_i^{n_k} \to x^*$ при всех $i \in J$.

Т.к. $y_i^{n_k} \in A_i$ то $x^* \in \bigcap_{i \in J} A_i$

Теорема 3. Пусть X - нормированное пространство, f_i - линейные непрерывные функционалы и $\|f_{i_n}\| \le M$ для всех i_n . Тогда 3-е управление релаксацией является подходящим.

Доказательство. Возьмём $i \in J$. Тогда имеем

$$b_i - f_i(x^n) \le \frac{1}{\gamma}(b_{i_n} - f_{i_n}(x^n))$$

Т.к. $x^{n+1} \in A_{i_n}$, то $b_{i_n} \le f_{i_n}(x^{n+1})$. Поэтому

$$b_i - f_i(x^n) \le \frac{1}{\gamma} f_{i_n}(x^{n+1} - x^n) \le \frac{M}{\gamma} \|x^{n+1} - x^n\| . \tag{1.4}$$

Пусть $x^{n_k} \to x^*$. Т.к. $\mathcal{D}(x^{n_k+1}, x^{n_k}) \to 0$ и множество элементов последовательности $\{x^{n_k+1}\}$ компактн то $x^{n_k+1} \to x^*$. Переписывая неравенство (I.4) для $n = n_k$ и переходя к пределу при $k \to \infty$ получим

$b_i - f_i(x^*) \leq 0$ для всех $i \in J$

Следовательно, $x^* \in \bigcap\limits_{i \in J} A_i$

Замечание I. Условие У нужно только для того, чтобы доказать компактность множества элементов последовательности $\{x^n\}$. Если компактность этого множества следует из каких-либо других соображений, то теоремы I-3 можно доказать и без условия У.

Замечание 2. Во многих случаях релаксационная последовательность $\{x^n\}$ имеет единственную предельную точку $x^* \in R$. Это имеет место, например, если выполнено одно из следующих условий:

(A). Множество S замкнуто, и при любых $z_1, z_2 \in R \cap S$ функция $H(y) = \mathcal{D}(z_1, y) - \mathcal{D}(z_2, y)$ непрерывна на S.

(B). Функция $\mathcal{D}(x, y)$ определена при $x \in \bar{S}$ и, если $y^n \to y^* \in \bar{S}$, то $\mathcal{D}(y^*, y^n) \to 0$.

Действительно, пусть выполнено (A) и пусть

$x^{n_k} \to x^* \in R$, $x^{n_e} \to x^{**} \in R$

Согласно лемме 2 существует

$\lim H(x^n) = \lim (\mathcal{D}(x^*, x^n) - \mathcal{D}(x^{**}, x^n))$

Для подпоследовательности x^{n_e}

$\lim H(x^{n_e}) = \mathcal{D}(x^*, x^{**}) \geq 0$

Для подпоследовательности x^{n_k}

$$\lim H(x^{n_k}) = -D(x^{**}, x^*) \leq 0$$

Следовательно, $D(x^*, x^{**}) = D(x^{**}, x^*) = 0$ и согласно условию I $x^* = x^{**}$

Пусть теперь выполнено условие (В) и снова

$$x^{n_k} \longrightarrow x^* \in R, \quad x^{n_e} \longrightarrow x^{**} \in R$$

Тогда $0 = \lim D(x^*, x^{n_k}) = \lim D(x^*, x^n) =$

$$= \lim D(x^*, x^{n_e})$$

Отсюда ввиду условия УI следует, что $x^* = x^{**}$

§ 2. Примеры функций релаксации

Рассмотрим некоторые примеры функций релаксации.

I. Пусть X - вещественное гильбертово пространство,

$S = X$ и $D(x, y) = D(x-y, x-y)$

Функция $D(x, y)$ очевидно удовлетворяет условию I.

Условие II выполняется, т.к. D -проекция на выпуклое множество совпадает в данном случае с обычной проекцией.

Определенная в условии III функция

$$\varphi(z) = D(z, y) - D(z, P_i y) = (z-y, z-y) -$$

$$-(z - P_i y, z - P_i y) = 2(z, P_i y - y) + (y, y) - (P_i y, P_i y)$$

линейна, и, следовательно, это условие также выполнено.

Далее

$$D'_x(y, y) = \lim_{t \to 0} \frac{(y + tz - y, y + tz - y)}{t} = \lim_{t \to 0} t(z, z) = 1$$

Следовательно, выполнено условие IУ.

Фигурирующее в условии У множество

$$T = \{y \in S \mid (x-y^{*}, x-y) \leq L\}$$

не является компактным, но оно ограничено и, следовательно, будет компактным, если считать, что в **X** введена слабая топология.

Условие УI выполняется, если под сходимостью понимать слабую сходимость.

Действительно, пусть

$$(x^n - y^n, x^n - y^n) \to 0 \qquad y^n \dashrightarrow y^*$$

и множество элементов последовательности $\{x^n\}$ слабо компактно. Пусть $x^{n_k} \dashrightarrow x^*$. Тогда при каждом $u \in X$ имеет место

$$|(u, x^{n_k} - y^{n_k})| \leq \|u\| \|x^{n_k} - y^{n_k}\| \to 0$$

Следовательно, $\lim (u, x^{n_k}) = \lim (u, y^{n_k}) = (u, y^*)$,

и значит $x^* = y^*$

Условие (А) также выполнено, т.к. функция

$$H(y) = (z_1 - y, z_1 - y) - (z_2 - y, z_2 - y) = (z_1, z_1) - (z_2, z_2) + 2(z_2 - z_1, y)$$

линейна и, следовательно, непрерывна в слабой топологии.

Заметим, что замкнутое выпуклое множество в X является замкнутым и в слабой топологии пространства X.

Поэтому функция $D(x, y) = (x - y^{*}, x - y)$ является функцией релаксации при любом семействе замкнутых выпуклых множеств A_i.

При любом подходящем управлении релаксацией и любом начальном приближении x^0 релаксационная последовательность $\{x^n\}$ слабо сходится к точке $x^* \in \bigcap\limits_{i \in J} A_i$

Отметим, что хотя пространство X со слабой топологией не является нормированным, 3-е управление релаксацией является подходящим (при выполнении условий теоремы 3). Учитывая, что $\|x^{n+1}-x^{n}\| = (\mathcal{D}(x^{n+1},x^{n}))^{1/2} \to 0$ доказательство теоремы 3 можно без изменений перенести на этот случай.

2. Пусть $f(x)$ - строго выпуклая дифференцируемая функция, заданная на выпуклом множестве $S \in E^{p}$, $g(x)$ - её градиент в точке x.

Рассмотрим функцию

$$\mathcal{D}(x,y) = f(x) - f(y) - (g(y), x-y) \qquad (2.1)$$

Покажем, что $\mathcal{D}(x,y)$ удовлетворяет условиям I-IУ.

Действительно, условие I представляет собой одно из свойств выпуклых функций, означающее, что график выпуклой функции лежит по одну сторону от опорной гиперплоскости (см. [19] стр.789).

Условие II выполняется, т.к. при каждом $y \in S$ существует $\min\limits_{x \in S} \mathcal{D}(x,y) = 0$ и, следовательно существует $\min\limits_{x \in S \cap A} \mathcal{D}(x,y)$ при всяком замкнутом множестве A.

Фигурирующая в условии III функция $\varphi(z)$ выпукла, т.к.

$$\varphi(z) = -f(y) + f(P_i y) - (g(y), y) + (g(P_i y), P_i y) - \\ - (g(y) - g(P_i y), z).$$

Далее $\mathcal{D}'_x(y,y) = g(y) - g(y) = 0$

Следовательно, условие IУ выполнено.

Условие УI и условие (А) выполняются при некоторых дополнительных предположениях относительно функции $f(x)$ Например, они выполнены, если множество S замкнуто, а функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема.

Условие У не является следствием выпуклости $f(x)$, и поэтому в дальнейшем будем рассматривать только такие функции, для которых условие У выполнено. Однако, как уже отмечалось, если компактность релаксационной последовательности следует из других соображений, то можно рассматривать произвольные строго выпуклые функции $f(x)$.

Таким образом, если выполнены условия У и УI, то построенная по формуле (2.I) функция $D(x,y)$ является функцией релаксации.

Примером функции $f(x)$, для которой функция $D(x,y)$ построенная согласно формуле (2.I), является функцией релаксации, может служить положительно определённая квадратичная форма, заданная на всём пространстве E^p . Соответствующая ей функция $D(x,y) = (x-y, C(x-y))$, как легко видеть, удовлетворяет не только условиям I-IУ, но и условиям I-УI и (А).

Другим примером такой функции будет

$$f(x) = \sum_{j=1}^{p} x_j \ln x_j$$

заданная на множестве $S = \{x \in E^p \mid x > 0\}$

Соответствующая ей функция $D(x,y)$ имеет вид:

$$D(x,y) = \sum_{j=1}^{p} (y_j - x_j + x_j(\ln x_j - \ln y_j)) \quad (2.2)$$

Согласно приведённым выше рассуждениям функция (2.2) удовлетворяет условиям I–IУ. Легко видеть, что функция (2.2) удовлетворяет условию У.

Проверим, что функция (2.2) удовлетворяет условию УI.

Пусть $D(x^n, y^n) \to 0$ и $y^n \to y^* = (y_1^*, \dots, y_p^*)$

Если $y_j^* = 0$, то и $x_j^n \to 0$, т.к. иначе $D(x^n, y^n) \to \infty$

Если $y_j^* > 0$, то $x_j^n \to y_j^*$ ввиду непрерывности функции $D(x,y)$ при $y_j > 0$.

Как видно из формулы (2.2) функция $D(x,y)$ удовлетворяет условию (В).

Следовательно, релаксационная последовательность $\{x^n\}$, построенная по функции релаксации (2.2) для любого семейства замкнутых выпуклых множеств при подходящем управлении релаксацией будет сходиться к точке $x^* \in \bigcap_{i \in J} A_i$

В заключение параграфа заметим, что для функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ разность которых является линейной функцией, функции

$$D_1(x,y) = f_1(x) - f_1(y) - (g_1(y), x-y)$$

и

$$D_2(x,y) = f_2(x) - f_2(y) - (g_2(y), x-y)$$

совпадают.

§ 3. Решение задач выпуклого программирования

Если $R = \bigcap_{i \in J} A_i$ состоит не из одной точки, то предел релаксационной последовательности будет зависеть от выбора начального приближения и управления релаксацией. Поэтому, выбирая подходящим образом начальное приближение и управление релаксацией, можно добиться того, что предельная точка x^* будет обладать некоторыми заданными свойствами, например, будет минимизировать на R некоторую функцию. Воспользуемся этими соображениями для решения некоторых задач выпуклого программирования.

Пусть $f(x)$ – строго выпуклая функция, непрерывно дифференцируемая на выпуклом множестве $S \subset E^p$ и непрерывная на $\bar{S}$.

Рассмотрим задачу:

минимизировать $f(x)$ (3.1)

при условиях $Ax = b$ (3.2)

$x \in \bar{S}$ (3.3)

Здесь $A = \|a_{ij}\|$ – матрица с m строками и p столбцами, $x \in E^p$, $b \in E^m$.

Обозначим через $A_{i\cdot}$ i-тую строку матрицы A.

Предположим, что все $A_{i\cdot} \neq 0$

Пусть R – множество допустимых решений вектора задачи (3.I) - (3.3), т.е. $R = \{x \in E^p \mid Ax = b, x \in \bar{S}\}$

Будем считать, что R не пусто.

Предположим, что построенная согласно формуле (2.I) функция $D(x,y)$ удовлетворяет условиям I-VI и условик (B).

Отметим, что в этом случае условие (B) является следствием условия (A). Действительно, если $f(x)$ непрерывно дифференцируема на замкнутом множестве S, то $\mathcal{D}(x,y)$ непрерывна, и условие (B) выполнено.

Обозначим через Z множество тех $x \in S$, для которых существует $u \in E^m$, что

$$g(x) = uA$$

($g(x)$ - градиент функции $f(x)$).

Пусть $\overline{Z}$ - замыкание множества Z.

Лемма 3. Если $y^* \in R \cap \overline{Z}$, то y^* - решение задачи (3.I) - (3.3).

Доказательство. Т.к. $y^* \in R$, то

$$f(y^*) \geqslant \inf_{x \in R} f(x)$$

Поэтому существует $x^* \in R$, что

$$f(y^*) - f(x^*) = a \geqslant 0 \qquad (3.4)$$

Для доказательства леммы достаточно показать, что $a = 0$. Т.к. $y^* \in \overline{Z}$, то найдётся последовательность $\{y^n\}$ такая что $y^n \in Z$ и $y^n \to y^*$.

При каждом n найдется $u^n \in E^m$, такой, что $g(y^n) = u^n A$. Отсюда следует, что $(g(y^n), v) = 0$ при всех v, для которых $Av = 0$. Положим $v = y^* - x^*$. Тогда при всех n имеет место:

$$(g(y^n), y^* - x^*) = 0 \qquad (3.5)$$

Учитывая (3.5) и (2.I) имеем

$$a = f(y^*) - f(x^*) = (g(y^n), y^* - y^n) + \mathcal{D}(y^*, y^n) -$$
$$- (g(y^n), x^* - y^n) - \mathcal{D}(x^*, y^n) =$$
$$= \mathcal{D}(y^*, y^n) - \mathcal{D}(x^*, y^n) \qquad (3.6)$$

Из (3.6) следует: $a \leq \mathcal{D}(y^*, y^n)$

Отсюда, принимая во внимание условие (B) и (3.4) получаем $a = 0$.

Лемма доказана.

Теорема 4. Пусть $\mathcal{D}$ -проекция любой точки x , принадлежащей внутренности множества S на множество

$$A_i = \{x \in E^p \mid \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j = b_i\}$$

тоже принадлежит внутренности S . Пусть выбрано подходящее управление релаксацией и пусть $x^n \to x^*$

Тогда, если начальное приближение $x^0 \in Z \cap \operatorname{int} S$ ($\operatorname{int} S$ - внутренность множества S), то x^* - решение задачи (3.1) - (3.3).

Доказательство. Пусть x^{n+1} $\mathcal{D}$ -проекция точки x^n на множество A_i . Тогда имеет место

$$g(x^{n+1}) = g(x^n) + \lambda A_{i\cdot} \tag{3.7}$$

$$(A_{i\cdot}, x^{n+1}) = b_i \tag{3.8}$$

Отсюда видно, что если $x^n \in Z$,то и $x^{n+1} \in Z$

Следовательно, $x^* \in \overline{Z}$, и по лемме 3 x^* - решение задачи (3.1) - (3.3).

Замечание 3. x^{n+1} и λ определяются из условий (3.7) и (3.8) единственным образом.

Действительно, пусть существуют $y, z \in E^p$ и числа λ и μ , такие, что

$$g(y) = g(x^n) + \lambda A_{i\cdot} \qquad g(z) = g(x^n) + \mu A_{i\cdot}$$
$$(A_{i\cdot}, y) = b_i \qquad (A_{i\cdot}, z) = b_i$$

и

$$y \neq z$$

Тогда $f(y)-f(z) > (g(z), y-z) = (g(x^n), y-z) + \mu(A_{i\cdot}, y-z) = (g(x^n), y-z)$ (3.9)

$$f(z)-f(y) > (g(y), z-y) = (g(x^n), z-y) + \lambda(A_{i\cdot}, z-y) = (g(x^n), z-y) \qquad (3.10)$$

Складывая неравенства (3.9) и (3.10) получим $0>0$. Следовательно, $y=z$. Значит и $\lambda=\mu$

Замечание 4. Если $f(x)$ имеет глобальный минимум внутри S , то в качестве начального приближения можно взять точку, в которой этот минимум достигается, т.к. $g(x^0)=\mathbb{O}$ $u^0=\mathbb{O}$ и, следовательно, $x^0 \in Z$

Рассмотрим теперь задачу, в которой ограничения заданы в форме неравенств.

Минимизировать $f(x)$ (3.11)

при условиях $Ax \geqq b$ (3.12)

$x \in \bar{S}$ (3.13)

Пусть функция $f(x)$ обладает теми же свойствами, что и раньше и пусть $R=\{x \in E^p \mid Ax \geqq b,\ x \in \bar{S}\} \neq \Lambda$

Пусть $Z_0=\{x \in S \mid$ существует $u=(u_1, u_2 \ldots u_m)$, что $u \geqq \mathbb{O},\ g(x)=uA\}$

Для решения задачи (3.II) - (3.I3) релаксационный метод требуется несколько видоизменить.

Будем считать, что выполнено условие теоремы 4.

Рассмотрим следующий метод решения задачи (3.II)-(3.I3)

I⁰. Будем считать, что выбрано циклическое управление релаксацией. Обозначим через i_n индекс, выбираемый на n -ой итерации.

2⁰. В качестве начального приближения берём точку

$$x^0 \in Z_0 \cap \operatorname{int} S$$

Вектор $u^0 = (u_1^0, \dots, u_m^0)$, такой что

$$g(x^0) = u^0 A$$

3⁰. а) Если $(A_{i_n \cdot}, x^n) < b_{i_n}$, то в качестве x^{n+1} берём D -проекцию точки x^n на множество $A_{i_n} = \{x \in E^p \mid (A_{i_n \cdot}, x) = b_{i_n}\}$, т.е. x^{n+1} определяется из условий

$$g(x^{n+1}) = g(x^n) + \lambda_n A_{i_n \cdot} \tag{3.14}$$

$$(A_{i_n \cdot}, x^{n+1}) = b_{i_n} \tag{3.15}$$

(Согласно замечанию 3 x^{n+1} и λ_n из условий (3.I4) - (3.I5) определяются единственным образом).

u^{n+1} определяется по формулам:

$$u_{i_n}^{n+1} = u_{i_n}^n + \lambda_n; \quad u_i^{n+1} = u_i^n \quad \text{при } i \neq i_n$$

б) Если $(A_{i_n \cdot}, x^n) = b_{i_n}$ или $(A_{i_n \cdot}, x^n) > b_{i_n}$, а $u_{i_n} = 0$, то $x^{n+1} = x^n$ и $u^{n+1} = u^n$

в) Если $(A_{i_n \cdot}, x^n) > b_{i_n}$ и $u_{i_n} > 0$ то определяем x^{n+1} из соотношения

$$g(x^{n+1}) = g(x^n) - \mu_n A_{i_n \cdot}, \tag{3.16}$$

а u^{n+1} определяется по формулам

$$u^{n+1}_{i_n} = u^n_{i_n} - \mu_n ; \quad u^{n+1}_i = u^n_i \quad \text{при } i \neq i_n$$

Здесь $\mu_n = \min(\mu'_n, \mu''_n)$ (3.17), где μ'_n определяется из условий:

$$g(y) = g(x^n) - \mu'_n A_{i_n} \qquad (3.18)$$

$$(A_{i_n}, y) = b_{i_n} \qquad (3.19)$$

а $\mu''_n = u_{i_n}$.

Теорема 5. Полученная в результате описанного процесса последовательность $\{x^n\}$ сходится к точке x^*, которая является решением задачи (3.II) - (3.I3)

Доказательство. I. Покажем, что при всех n $x^n \in Z_0$

Согласно 2^0, $x^0 \in Z_0$. Пусть $x^n \in Z_0$ при $n \leq k$. Если для индекса i_k имеет место 3^0б) или 3^0в), то, как видно из формулы (3.I6) $x^{k+1} \in Z_0$ (т.к. $u^{k+1} \geqq 0$ ввиду того, что $\mu_k \leq u^k_{i_k}$).

Пусть имеет место 3^0 а). Из условия (3.I4) получаем:

$$(g(x^{k+1}) - g(x^k), x^{k+1} - x^k) = \lambda_k (A_{i_k}, x^{k+1} - x^k) \quad (3.20)$$

Как легко получить из формулы (2.I) левая часть (3.20) равна $D(x^{k+1}, x^k) + D(x^k, x^{k+1})$

Отсюда, учитывая (3.I5) получим:

$$\lambda_k = \frac{D(x^{k+1}, x^k) + D(x^k, x^{k+1})}{b_{i_k} - (A_{i_k}, x^k)} > 0 \qquad (3.21)$$

Следовательно, $u^{k+1} \geqslant 0$ и $x^{k+1} \in Z_0$

2. Рассмотрим функцию $\varphi(x,u) = f(x) - (u, Ax - b)$

Покажем, что $\varphi(x^{n+1}, u^{n+1}) \geqslant \varphi(x^n, u^n)$ (3.22)

$$\varphi(x^{n+1}, u^{n+1}) - \varphi(x^n, u^n) = f(x^{n+1}) - f(x^n) - (u^{n+1}, Ax^{n+1} - b) + (u^n, Ax^n - b) = D(x^{n+1}, x^n) + (g(x^n), x^{n+1} - x^n) - (g(x^{n+1}), x^{n+1}) + (g(x^n), x^n) + (u^{n+1} - u^n, b) = D(x^{n+1}, x^n) + (u^{n+1} - u^n, b) + (g(x^n) - g(x^{n+1}), x^{n+1})$$

Если для индекса i_n имеет место 3^0а), то

$$\varphi(x^{n+1}, u^{n+1}) - \varphi(x^n, u^n) = D(x^{n+1}, x^n) \quad (3.23)$$

и, следовательно, (3.22) выполнено.

Если для индекса i_n имеет место 3^0 в), то

$$\varphi(x^{n+1}, u^{n+1}) - \varphi(x^n, u^n) = D(x^{n+1}, x^n) + \mu_n((A_{i_n}, x^{n+1}) - b_{i_n}$$

Так же, как формулу (3.2I) можно получить:

$$\mu_n = -\frac{D(x^{n+1}, x^n) + D(x^n, x^{n+1})}{b_{i_n} - (A_{i_n}, x^n)} > 0$$

Т.к., как видно из (3.I7), (3.I8) и (3.I9)

$$(A_{i_n}, x^{n+1}) - b_{i_n} \geqslant 0 ,$$ то

$$\varphi(x^{n+1}, u^{n+1}) - \varphi(x^n, u^n) \geqslant D(x^{n+1}, x^{n})$$

и, следовательно, (3.22) выполнено.

3. Пусть $z \in R$. Тогда

$$\mathcal{D}(z, x^n) = f(z) - f(x^n) - (g(x^n), z - x^n) =$$

$$= f(z) - f(x^n) - (u^n A, z - x^n) \leq f(z) - f(x^n) -$$

$$- (u^n, b - Ax^n) = f(z) - \varphi(x^n, u^n) \leq f(z) - \varphi(x^0, u^0) \quad (3.25$$

Отсюда, ввиду условия У, следует, что множество элементов последовательности $\{x^n\}$ компактно. Кроме того из (3.25) следует, что $\varphi(x^n, u^n) \leq f(z)$ (3.26)

Это вместе с (3.22) показывает, что существует

$$\lim \varphi(x^n, u^n) \leq f(z) \quad (3.27)$$

4. Из (3.24), (3.25) и (3.27) следует, что $\mathcal{D}(x^{n+1}, x^n) \longrightarrow 0$. Поэтому, повторяя рассуждения теоремы I, можно получить, что любая предельная точка x^* последовательности $\{x^n\}$ принадлежит множеству R. Кроме того, т.к. выполнено условие (B), то имеет место

$$x^n \to x^* \in R$$

5. Пусть $\mathcal{J}_1 = \{ i \in \{1, 2, \dots m\} \mid (A_{i\cdot}, x^*) > b_i \}$

$$\mathcal{J}_2 = \{ i \in \{1, 2 \dots m\} \mid (A_{i\cdot}, x^*) = b_i \}$$

Возьмём N такое, что при $n > N$ для $i \in \mathcal{J}_1$ имеет место $(A_{i\cdot}, x^n) > b_i$

Тогда при $n > N + m$ для $i \in \mathcal{J}_1$ $u_i^n = 0$

Поэтому при $n > N + m$ имеем:

$$(u^n, Ax^n - b) = \sum_{i \in \mathcal{J}_2} u_i^n (A_{i\cdot}, x^n - x^*) = \sum_{i=1}^{n} u_i^n (A_{i\cdot}, x^n - x^*)$$

$$= (g(x^n), x^n - x^*) = \mathcal{D}(x^*, x^n) - f(x^*) + f(x^n)$$

Т.к. условие (B) выполнено, и функция $f(x)$ - непрерывна на $\overline{S}$, то $(u^n, Ax^n - b) \longrightarrow 0$

Отсюда $\lim \varphi(x^n, u^n) = \lim(f(x^n) - (u^n, Ax^n - b)) = f(x^*)$

Сравнивая это с (3.27) получаем, что x^* - решение задачи (3.11) – (3.13)

Теорема доказана.

Замечание 5. Рассмотрим задачу, двойственную к задаче (3.11) - (3.13) (см [29], [36])

максимизировать $\varphi(x,u) = f(x) - (u, Ax - b)$ (3.28)

при условиях $g(x) = uA$ (3.29)

$u \geqq 0 \quad x \in \overline{S}$ (3.30)

Как видно из теоремы 5 $\min f(x) = \sup \varphi(x,u)$ где минимум берётся по множеству векторов x, удовлетворяющих условиям (3.12) и (3.13), а супремум по множеству пар (x,u), удовлетворяющих условиям (3.29) и (3.30)

Замечание 6. Если последовательность $\{u^n\}$ имеет предельную точку u^*, то пара (x^*, u^*) является решением задачи (3.28) - (3.30)

Рассмотрим пример.

Пусть дана задача:

минимизировать $\sum\limits_{j=1}^{p} x_j \ln x_j$ (3.31)

при условиях $\sum a_{ij} x_j = b_i$ (3.32)

$x \in \overline{S}$, (3.33)

где $S = \{x \in E^p \mid x > 0\}$

Будем считать, что при всех i

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij}^2 > 0$$

Как было показано в § 2 функция $\mathcal{D}(x,y)$ в этом случае удовлетворяет условиям $\overline{\text{I}} - \overline{\text{VI}}$ и условию (B) Кроме этого функция (3.31) непрерывно дифференцируема на S и непрерывна на $\overline{S}$.

Пусть $y \in S$, x - $\mathcal{D}$ -проекция точки y на множество $A_i = \{x \in E^p \mid \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j = b_i\}$

Тогда, как следует из формул (3.7) и (3.8)

$$x_j = y_j e^{\lambda a_{ij}} \qquad (3.34)$$

где λ - единственный корень уравнения

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij} y_j e^{\lambda a_{ij}} = b_i \qquad (3.35)$$

Как видно из формулы (3.34), если $y \in S$, то и $x \in S$. Следовательно, при подходящем управлении релаксацией условия теоремы 3 выполнены. Поэтому релаксационная последовательность будет сходиться к точке x^* - решению задачи (3.31)-(3.33), если в качестве начального приближения выбрать точку абсолютного минимума функции (3.31) т.е. $x_j^0 = e^{-1}$.

Отметим, что уравнение (3.35) превращается в линейное относительно e^{λ}, если все коэффициенты a_{ij} равны 0 или 1. Последнее имеет место, в частности, для задач с транспортными ограничениями, т.е. для ограничения вида:

$$\sum_{j=1}^{p_1} x_{ij} = a_i \quad , \quad \sum_{j=1}^{p_2} x_{ij} = b_j \qquad (3.36)$$

Положим $\mu = e^{\lambda}$. Тогда уравнение (3.35) для ограничения (3.36) будет иметь вид

$$\sum_{j=1}^{p_1} y_{ij}\mu = a_i$$

Отсюда

$$\mu = \frac{a_i}{\sum_{j=1}^{p_1} y_{ij}}$$

и $\mathcal{D}$-проекция точки

$y = \{y_{ij}\}$ на множество $A_i = \{x \in E^{p_1 p_2} | \sum_{j=1}^{p_1} x_{ij} = a_i\}$

определяется согласно (3.34)

по формулам:

$$x_{ij} = y_{ij}\frac{a_i}{\sum_{j=1}^{p_1} y_{ij}}.$$

Таким образом один шаг релаксации в данном случае состоит в следующем: все переменные, входящие в заданное ограничение с коэффициентом I, умножаются на одно и то же число, так чтобы это ограничение не нарушалось.

Релаксационный метод в этом случае совпадает с методом Г.В.Шелейховского (см. [4]), который применяется для расчёта пассажиропотоков в городах и для некоторых других задач (см. [14],[30],[35]).

§ 4. Задача линейного программирования

Рассмотрим задачу линейного программирования

минимизировать (c, x) (4.1)

при условиях $Ax \geqq b$ (4.2)

$$x \geqq 0 \qquad (4.3)$$

Т.к. функция (4.1) не является строго выпуклой, то задачу (4.1) - (4.3) нельзя решать непосредственно релаксационным методом.

Поэтому заменим задачу (4.I) - (4.3) "близкой" задачей выпуклого программирования (как это сделано в [25]).

Рассмотрим задачу:

минимизировать $(c, x) + \varepsilon f(x)$ (4.4)

при условии $Ax \geqq b$ (4.5)

$x \geqq \mathbb{0}$ (4.6)

Здесь $f(x)$ - строго выпуклая непрерывно дифференцируемая функция, ε - положительное число. Пусть $g(x)$ - градиент функции $f(x)$ в точке x.

Теорема 6. Пусть множество допустимых планов задачи (4.1) - (4.3) ограничено. Тогда существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ x_ε - решение задачи (4.4) - (4.6) будет и решением задачи (4.1) - (4.3)

Доказательство. Согласно теореме Куна-Таккера ([24]) x_ε является решением задачи (4.4) - (4.6) тогда и только тогда, когда существует вектор u, такой что выполнены условия

$$c + \varepsilon g(x_\varepsilon) - uA \geqslant 0$$

$$(x_\varepsilon, c + \varepsilon g(x_\varepsilon) - uA) = 0$$

$$Ax_\varepsilon \geqq b$$

$$(u, Ax_\varepsilon - b) = 0$$

$$u \geqq \mathbb{0}, \quad x_\varepsilon \geqq \mathbb{0}$$

Отсюда видно, что x_ε является решением следующей задачи линейного программирования:

минимизировать $(c+\varepsilon g(x_\varepsilon), x)$

при условиях $Ax \geqq b$

$x \geqq 0$

Согласно лемме Удзавы ([25]) существует такое δ, что при $\varepsilon \| g(x_\varepsilon)\| < \delta$ x_ε является решением задачи (4.1) – (4.3)

Т.к. функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема, то существует число K, что $\|g(x)\| \leqslant K$ для всех допустимых векторов x.

Полагая $\varepsilon_0 = \dfrac{\delta}{K}$, получим утверждение теоремы.

Таким образом, добавляя к функции (I) выпуклую функцию $\varepsilon f(x)$ с достаточно малым коэффициентом ε, мы получим задачу выпуклого программирования, решение которой является решением задачи (4.1) – (4.3). Если функция $f(x)$ такова, что построенная по ней с помощью формулы (2.1) функция $D(x,y)$ является функцией релаксации, то задачу (4.4) – (4.6) можно решать релаксационным методом, как это было описано в § 3.

Однако приближенное решение задачи (4.1) – (4.3) можно также получить добавляя функцию $f(x)$, не удовлетворяющую условиям теоремы 6.

Пусть множество допустимых планов содержится в множестве $\{x \mid x_j \leq k_j\}$

Возьмем $f(x) = \sum\limits_{j=1}^{p} \left(x_j \ln \dfrac{x_j}{k_j} - x_j\right)$

и рассмотрим задачу:

минимизирвать $(c, x) + \varepsilon f(x)$ (4.7)

при условиях $Ax = b$ (4.8)

$$x \geqq \mathbb{O} \qquad (4.9)$$

Предположим, что выполнено условие:

Существует допустимый план $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots \bar{x}_p)$, для которого $\bar{x}_j > 0$ $j = (1, 2, \dots p)$

Покажем, что в этом случае x^ε - решение задачи (4.7)-(4.9 также обладает свойством $x^\varepsilon > \mathbb{O}$.

Будем решать задачу (4.7)-(4.9) релаксационным методом с функцией релаксации

$$\mathcal{D}(x,y) = \Big(\sum_{j=1}^{p} (y_j - x_j + x_j(\ln x_j - \ln y_j))\Big)\varepsilon \qquad (4.10)$$

Т.к. функция (4.7) отличается от $\sum_{j=1}^{p} x_j \ln x_j$ только линейной функцией, то построенная по функции (4.7) с помощью формулы (2.1) функция $\mathcal{D}(x,y)$ имеет вид (4.10)

Если в качестве начального приближения взять точку абсолютного минимума функции (4.7) то согласно теореме 4 релаксационная последовательность $\{x^n\}$ сходится к x^ε

При этом, согласно лемме 2 существует

$$\lim \mathcal{D}(\bar{x}, x^n).$$

Т.к. $\bar{x}_j > 0$, то при $x_j^n \to 0$ $\mathcal{D}(\bar{x}, x^n) \to \infty$

Поэтому $\lim x_j^n = x_j^\varepsilon \neq 0$

Отсюда следует, что существует вектор

$u^\varepsilon = (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon, \dots u_m^\varepsilon)$, такой что

$$c_j + \varepsilon \ln \frac{x_j^\varepsilon}{K_j} = u^\varepsilon A_{.j} \qquad (j = 1, 2, \dots p) \qquad (4.11)$$

где $A_{.j}$ j-тый столбец, матрицы А.

Т.к. $\ln \frac{x_j^\varepsilon}{K_j} \leq 0$, u^ε является допустимым вектором двойственной задачи:

максимизировать (u, b)

при условиях $uA \leqq c$

Из (4.11) следует;

$$(c, x^{\varepsilon}) - (u^{\varepsilon}, b) = -\varepsilon \sum_{j=1}^{p} x_j^{\varepsilon} \ln \frac{x_j^{\varepsilon}}{K_j}$$

Отсюда

$$(c, x^{\varepsilon}) - (u^{\varepsilon}, b) \leq \varepsilon \frac{\sum_{j=1}^{p} K_j}{l} \qquad (4.12)$$

Обозначим через x^* решение задачи $(4.1)-(4.3)$

Т.к. $(c, x^*) \geqslant (u^{\varepsilon}, b)$, то из (4.12) получим

$$(c, x^{\varepsilon}) - (c, x^*) \leq \varepsilon \frac{\sum_{j=1}^{p} K_j}{l}$$

Отсюда видно, что при достаточно малом ε x^{ε} будет с заданной точностью давать решение задачи $(4.1)-(4.3)$

Заметим, что при решении задачи $(4.7)-(4.9)$ релаксационным методом условия $x_j \geqslant 0$ можно не учитывать, т.к. они выполняются автоматически.

Иногда может оказаться удобным не сводить задачу $(4.1)-(4.3)$ к задаче выпуклого программирования, а заменять её с помощью соотношений двойственности следующей системой неравенств:

$$Ax \geqq b \qquad (4.13)$$

$$uA \geqq c \qquad (4.14)$$

$$x \geqq \mathbb{O}, \ u \geqq \mathbb{O} \qquad (4.15)$$

$$(c, x) \leq (u, b) \qquad (4.16)$$

Эту систему можно решать релаксационным методом с любой функцией релаксации. При этом при любом начальном приближении релаксационная последовательность сходится к точному решению системы $(4.13)-(4.16)$.

Однако в системе $(4.13)-(4.16)$ больше ограничений и переменных, чем в задаче $(4.4)-(4.6)$.

§ 5. Задача квадратичного программирования

Рассмотрим следующую задачу:

найти вектор x, минимизирующий функцию

$$(p, x) + (xC, x) \tag{5.1}$$

при условиях $Ax = b$, $x \geqq 0$ (5.2)

где p и x - q-мерные векторы, b - m-мерный вектор, A - матрица размера $m \times q$, C - положительно полуопределенная квадратная матрица порядка q.

Если матрица C является положительно определённой, то функция (5.1) строго выпукла и по ней можно построить функцию релаксации

$$D(x,y) = ((x-y)C, (x-y)) \tag{5.3}$$

Однако при решении задачи $(5.1)-(5.2)$ релаксационным методом с функцией релаксации (5.3) приближение x^{n+1} по приближению x^n находить довольно трудно. Именно, оно находится из следующих соотношений (см.формулы (3.7) и (3.8)

$$x^{n+1}C = x^n C + \lambda_n A_{i_n \cdot} \tag{5.4}$$

$$(A_{i_n \cdot}, x^{n+1}) = b_{i_n} \tag{5.5}$$

где $A_{i_n \cdot}$ - строка матрицы A.

Из $(5.4)-(5.5)$ видно, что для отыскания x^{n+1} нужно решать систему линейных уравнений или знать матрицу C^{-1} Это может оказаться слишком трудоёмким.

Рассмотрим другой способ решения задачи $(5.1)-(5.2)$ релаксационным методом.

Известно, (ср. [13] стр.170), что x является решением задачи $(5.1)-(5.2)$ в том и только в том случае, когда существует такой m -мерный вектор u, что выполнены следующие условия:

$$Ax = b \tag{5.6}$$

$$x \geqq 0 \tag{5.7}$$

$$2xC - uA \geqq -p \tag{5.8}$$

$$2(xC, x) + (p, x) - (u, b) \leq 0 \tag{5.9}$$

Условия $(5.6)-(5.8)$ - линейны. Каждое из них определяет некоторое полупространство в $(m+n)$ -мерном евклидовом пространстве. Условие (5.9) определяет некоторое выпуклое множество в $(m+n)$ - мерном пространстве. Обозначим это множество через M . Пусть Γ - граница множества M .

Таким образом решение системы $(5.6)-(5.9)$ можно получить находя релаксационным методом общую точку соответствующей системы выпуклых множеств.

Однако нахождение $\mathcal{D}$ -проекции на множество M также может представлять трудности.

Известно ([19] стр.781), что каждое замкнутое выпуклое множество есть пересечение своих опорных полупространств и что каждая граничная точка лежит на некоторой опорной гиперплоскости.

Пусть $\binom{y}{v} \in \Gamma$ (y – n - мерный вектор, v - m - мерный вектор; символом $\binom{y}{v}$ обозначается $(m+n)$ - мерный вектор, составленный из компонент y и v, т.е. y и v удовлетворяют соотношению

$$2(yC, y) + (p, y) - (v, b) = 0$$

Опорное полупространство, которое определяет опорная гиперплоскость, проходящая через точку $\binom{y}{v}$ обозначим через Π_{yv}

Очевидно, что $\Pi_{yv} = \left\{ \binom{x}{u} \in E^{m+n} \,\middle|\, (4yC+p, x-y) - (u-v, b) \leq 0 \right\}$

Введем обозначения:

$$B_{yv} = \binom{4yC+p}{-b} \;;\; B_{yv} = (4yC+p, y) - (v, b)$$

Тогда

$$\Pi_{yv} = \left\{ \binom{x}{u} \in E^{m+n} \,\middle|\, \left(B_{yv}, \binom{x}{u}\right) \leq B_{yv} \right\}$$

Таким образом и условие (5.9)

$$M = \bigcap_{\binom{y}{v} \in \Gamma} \Pi_{yv}$$

заменилось системой линейных неравенств

$$\left(B_{yv}, \binom{x}{u}\right) \leq B_{yv} \quad \text{для всех } \binom{y}{v} \in \Gamma$$

Покажем, что при любом $\binom{x}{u} \in E^{n+m}$ существует $\max\limits_{\binom{y}{v} \in \Gamma} \left(\left(B_{yv}, \binom{x}{u}\right) - B_{yv}\right)$ и этот максимум достигается при $y = x$,

$$(v, b) = 2(xC, x) + (p, x) \tag{5.11}$$

Пусть $\binom{y}{v} \in \Gamma$. Учитывая (5.10) имеем

$$(B_{yv}, \binom{x}{u}) - B_{yv} = (4yC + p, x - y) - (u - v, b) =$$

$$= 4(yC, x) - 4(yC, y) + (p, x) - (p, y) - (u, b) +$$

$$+ 2(yC, y) + (p, y) = 4(yC, x) - 2(yC, y) + (p, x) -$$

$$- (u, b) \leq 2(xC, x) + (p, x) - (u, b) = ((B_{x\bar{v}}, \binom{x}{u}) - B_{x\bar{v}})$$

где $\bar{v}$ удовлетворяет (5.11).

Таким образом, если известно приближение $\binom{x^n}{u^n}$ и приближение $\binom{x^{n+1}}{u^{n+1}}$ мы ищем, находя D -проекцию точки $\binom{x^n}{u^n}$ на одно из полупространств Π_{yv}, то мы можем проектировать точку на полупространстве $\Pi_{(yv)_n}$, для которого

$$B_{(yv)_n} = \begin{pmatrix} 4x^n C + p \\ -b \end{pmatrix}$$

$$B_{(yv)_n} = (4x^n C + p, x^n) - 2(x^n C, x^n) - (p, x^n) = 2(x^n C, x^n)$$

Т.к. по лемме 2 множество $\{x^n\}$ компактно, то $\sup \| B_{(yv)_n} \| < \infty$. Поэтому 3-е управление релаксацией является в этом случае подходящим, последовательность $\binom{x^n}{u^n}$ будет сходиться к $\binom{x^*}{u^*}$ - решению системы (5.6)-(5.9), а x^* будет решением задачи (5.1)-(5.2)

Отметим, что если функция релаксации

$D(x, y) = \sum_{j=1}^{q} (x_j - y_j)^2$, то D -проекция точки $\binom{x^n}{u^n}$

на $\Pi_{(yv)_n}$ находится, как легко видеть, по формулам (ср. с формулами (3.7) - (3.8)):

$$x^{n+1} = x^n + (4x^nC + p)\frac{(u^n, b) - (p, x^n) - 2(x^nC, x^n)}{\|4x^nC + p\|^2 + \|b\|^2}$$

$$u^{n+1} = u^n - b\,\frac{(u^n, b) - (p, x^n) - 2(x^nC, x^n)}{\|4x^nC + p\|^2 + \|b\|^2}.$$

§ 6. Быстрота сходимости

Оценим быстроту сходимости релаксационного метода.

На протяжении всего этого параграфа будем предполагать что все рассматриваемые множества заданы в p -мерном пространстве, функция релаксации $D(x,y)$ имеет вид

$$D(x, y) = f(x) - f(y) - (g(y), x - y)$$

где $f(x)$ - строго выпуклая функция, $g(x)$ - её градиен в точке x .

Будем рассматривать задачу нахождения общей точки замкнутых выпуклых множеств, имеющих непустое пересечение.

Будем рассматривать только подходящие управления релаксацией и будем считать, что релаксационная последователь ность сходится к некоторой точке x^*. Функцию $f(x)$ будем предполагать дважды непрерывно дифференцируемой в окрестности точки x^* , и через $M(x)$ будем обозначать матрицу вторых производных функции $f(x)$ в точке x .

Кроме этого будем считать, что выполнено условие теоремы 4, т.е., если некоторая точка $x \in int\, S$, то и

$\mathcal{D}$ -проекция точки x на любое рассматриваемое множество также содержится в $int\, S$, где S " множество, на котором задана и дифференцируемая функция $f(x)$.

Рассмотрим сначала задачу нахождения решения системы линейных уравнений

$$Ax = b \tag{6.1}$$

где $A = \|a_{ij}\|$ - матрица размеров $m \times p$,
$b = (b_1, b_2 \dots b_m)$ и $x = (x_1, x_2 \dots x_n)$ - векторы.

Обозначим через $A_{i\cdot}$ - вектор - i -тую строку матрицы A, через A_i - множество векторов x, удовлетворяющих i -тому уравнению системы (6.1): $(A_{i\cdot}, x) = b_i$

Будем искать решение системы (6.1) - общую точку множеств A_i - релаксационным методом.

Выберем 3-е управление релаксацией, т.е. в качестве i_n будем выбирать индекс, удовлетворяющий условию

$$|b_{i_n} - (A_{i_n}, x^n)| \geqslant \gamma \max_i (b_i - (A_{i\cdot}, x^n))$$

где $\gamma > 0$ и не зависит от n.

Тогда по теореме 3 релаксационная последовательность $\{x^n\}$ сходится к точке x^* - решению системы (6.1)

Лемма 3. Если матрица $M(x^*)$ неособенная, то
$\|x^n - x^*\| = O(\theta^n)$ где $0 \leq \theta < 1$.

Д-во. Т.к. выполнены условия теоремы 4, то точка x^{n+1} находится из следующих условий

$$g(x^{n+1}) = g(x^n) + \lambda_n A_{i_n\cdot} \tag{6.2}$$

$$(A_{i_n\cdot}, x^{n+1}) = b_{i_n} \tag{6.3}$$

Из формулы (6.2) следует, что при каждом n существует вектор $u^n=(u_1^n, u_2^n, \dots u_m^n)$, такой, что

$$g(x^n)=g(x^0)+A^T u^n \qquad (6.4)$$

В формуле (6.4) можно положить

$$u^n=\sum_{\nu=0}^{n-1} \lambda_{i_\nu} l_{i_\nu}$$

где l_{i_ν} — единичный орт с единицей на месте i_ν.

Покажем, что существует вектор u^*, такой что

$$g(x^*)=g(x^0)+A^T u^* \qquad (6.5)$$

Действительно, т.к. выполнено (6.4), то для всех v, для которых $Av=0$, имеет место $(g(x^n)-g(x^0), v)=0$. Так как $g(x^n)\to g(x^*)$, то $(g(x^*)-g(x^0), v)=0$ при всех v, удовлетворяющих условию $Av=0$. А это и означает, что система (6.5) имеет решение.

Разложим $f(x^n)$ и $g(x^n)$ по формуле Тейлора в окрестности точки x^*. Получим

$$f(x^n)=f(x^*)+(g(x^*), x^n-x^*)+\frac{1}{2}(x^n-x^*)M(x^*)(x^n-x^*)+ +\alpha^n. \qquad (6.6)$$

$$g(x^n)=g(x^*)+M(x^*)(x^n-x^*)+r^n. \qquad (6.7)$$

Здесь $\alpha^n=o(\|x^n-x^*\|^2)$ и $\|r^n\|=o(\|x^n-x^*\|)$

Подставим (6.7) в (6.2). Получим

$$M(x^*)(x^{n+1}-x^*)+r^{n+1}=M(x^*)(x^n-x^*)+r^n+\lambda_n A_{i_n} \qquad (6.8)$$

Умножим (6.8) слева на $A_{i_n}M^{-1}(x^*)$

Учитывая (6.3), получим

$$A_{i_n}M^{-1}(x^*)r^{n+1}=(A_{i_n}x^n)-b_{i_n}+A_{i_n}M^{-1}(x^*)r^n+ +\lambda_n A_{i_n}M^{-1}(x^*)A_{i_n}.$$

Отсюда

$$\lambda_n = \frac{b_{i_n} - (A_{i_n\cdot}, x^n) + A_{i_n} M^{-1}(x^*) r^{n+1} - A_{i_n\cdot} M^{-1}(x^*) r^n}{A_{i_n\cdot} M^{-1}(x^*) \cdot A_{i_n}} \qquad (6.9)$$

Умножим (6.8) на $M^{-1}(x^*)$; получим

$$x^{n+1} = x^n + \lambda_n M^{-1}(x^*) A_{i_n\cdot} + s^n \qquad (6.10)$$

Далее, используя формулы (6.6) и (6.7), получим

$$\mathcal{D}(x^*, x^n) = f(x^*) - f(x^n) - (g(x^n), x^* - x^n) =$$

$$= -(g(x^*), x^n - x^*) - \frac{1}{2}(x^n - x^*) M(x^*)(x^n - x^*) -$$

$$- \cancel{+}\, \alpha^n - (g(x^*), x^* - x^n) + (x^n - x^*) M(x^*)(x^n - x^*) -$$

$$- (r^n, x^* - x^n) = \frac{1}{2}(x^n - x^*) M(x^*)(x^n - x^*) + \beta^n, \qquad (6.11)$$

где $\beta^n = (r^n, x^n - x^*) - \alpha^n = o(\|x^n - x^*\|^2)$.

$$\mathcal{D}(x^{n+1}, x^n) = f(x^{n+1}) - f(x^n) - (g(x^n), x^{n+1} - x^n) =$$

$$= (g(x^*), x^{n+1} - x^*) + \frac{1}{2}(x^{n+1} - x^*) \cdot M(x^*)(x^{n+1} - x^*) +$$

$$+ \alpha^{n+1} - (g(x^*), x^n - x^*) - \frac{1}{2}(x^n - x^*) M(x^*)(x^n - x^*) -$$

$$- (g(x^*), x^{n+1} - x^n) - (x^n - x^*) M(x^*)(x^{n+1} - x^n) -$$

$$- (r^n, x^{n+1} - x^n) = \frac{1}{2}(x^{n+1} - x^n) M(x^*)(x^{n+1} - x^n) + \gamma^n, \qquad (6.12)$$

где

$$\gamma^n = \alpha^{n+1} - \alpha^n - (r^n, x^{n+1} - x^n)$$

Кроме этого, используя другую форму формулы Тейлора получим

$$\mathcal{D}(x^*, x^n) = \frac{1}{2}(x^n - x^*) M(x^n + \Theta_1 (x^* - x^n))(x^n - x^*)$$

$$\mathcal{D}(x^*, x^{n+1}) = \frac{1}{2}(x^{n+1} - x^*) M(x^{n+1} + \Theta_2 (x^* - x^{n+1}))(x^{n+1} - x^*)$$

где $0 \le \Theta_1, \Theta_2 \le 1$

Т.к. ввиду непрерывности $M(x)$ в окрестности точки x^* матрицы $M(x^n + \Theta_1 (x^* - x^n))$ и $M(x^{n+1} + \Theta_2 (x^* - x^{n+1}))$ неособенные, и согласно лемме 1 $\mathcal{D}(x^*, x^n) \geqslant \mathcal{D}(x^*, x^{n+1})$, то существует число $\sigma > 0$, такое что

$$\|x^n - x^*\| \geqslant \sigma \|x^{n+1} - x^*\| \qquad (6.13)$$

Таким образом, если некоторая величина $\delta_n = o(\|x^{n+1} - x^*\|)$, то $\delta_n = o(\|x^n - x^*\|)$

Поэтому $\gamma^n = o(\|x^n - x^*\|^2)$, $\delta^n = A_{i_n \cdot} M^{-1}(x^*)(\tau^{n+1} - \tau^n) = o(\|x^n - x^*\|)$ и $\|s^n\| = o(\|x^n - x^*\|)$.

Вычислим Δ_n^2

$$\Delta_n^2 = \frac{(b_{i_n} - (A_{i_n \cdot}, x^n))^2 + 2\delta^n (b_{i_n} - (A_{i_n \cdot}, x^n)) + (\delta^n)^2}{(A_{i_n \cdot} M^{-1}(x^*) A_{i_n \cdot})^2} =$$

$$= \frac{(b_{i_n} - (A_{i_n \cdot}, x^n))^2 + \varepsilon^n}{(A_{i_n \cdot} M^{-1}(x^*) A_{i_n \cdot})^2} \qquad (6.14)$$

где $\varepsilon^n = 2\delta^n(b_{i_n} - (A_{i_n}, x^n)) + (\delta^n)^2 = o(\|x^n - x^*\|)^2$, т.к.
$|b_{i_n} - (A_{i_n}, x^n)| \le \|A_{i_n}\| \|x^* - x^n\| = O(\|x^n - x^*\|)$.

Рассмотрим систему уравнений

$$g(x^*) - g(x^n) = A^T v$$

Эта система имеет решение $v = u^* - u^n$ (u^n и u^* из условий (6.4) и (6.5)).

Пусть $\tilde{A}$ - матрица, составленная из максимального набора линейно независимых строк матрицы A. $\tilde{b}$ - векто из соответствующих компонент вектора b.

Тогда система уравнений

$$g(x^*) - g(x^n) = \tilde{A}^T v \qquad (6.15)$$

также имеет решение.

Учитывая (6.7), преобразуем систему (6.15) к виду

$$M(x^*)(x^* - x^n) - \tau^n = \tilde{A}^T v \qquad (6.16)$$

Умножим (6.16) слева на $\tilde{A} M^{-1}(x^*)$. Т.к. $\tilde{A} x^* = \tilde{b}$, то получим $\tilde{b} - \tilde{A}x^n - \tilde{A}M^{-1}(x^*)\tau^n = \tilde{A}M^{-1}(x^*)\tilde{A}^T v$ (6.1

Матрица $C = \tilde{A}M^{-1}(x^*)\tilde{A}^T$ - неособенная, т.к. строки матрицы $\tilde{A}$ линейно независимые. Поэтому из (6.17) получим:

$$\|v\| \le \|C^{-1}\| \|\tilde{b} - \tilde{A}x^n\| + \|C^{-1}\tilde{A}M^{-1}(x^*)\| \|\tau^n\| \quad (6.1$$

Из (6.16) и (6.18) имеем

$$\|x^* - x^n\| = \|M^{-1}(x^*)\tilde{A}^T v + M^{-1}(x^*)\tau^n\| \le$$

$$\le \|M^{-1}(x^*)\tilde{A}^T\| \|C^{-1}\| (\|\tilde{b} - \tilde{A}x^n\| + \|\tilde{A}M^{-1}(x^*)\| \|\tau^n\|) +$$

$$+ \|M^{-1}(x^*)\| \cdot \|\tau^n\| = K_1 \|\tilde{b} - \tilde{A} x^n\| + \tau_n$$

где $\tau_n = o\|x^n - x^*\|$

Поэтому существует число ρ, такое что

$$\|\tilde{b} - \tilde{A} x^n\| \geqslant \rho \|x^n - x^*\|. \qquad (6.19)$$

Т.к. $|b_{i_n} - (A_{i_n \cdot}, x^n)| \geqslant \gamma \max_i |b_i - (A_{i_n \cdot}, x^n)|$, то

имеем:

$$\|\tilde{b} - \tilde{A} x^n\| \leq \|b - Ax^n\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |b_i - (A_{i\cdot}, x^n)|^2} \leq$$

$$\leq |b_{i_n} - (A_{i_n \cdot}, x^n)| \sqrt{\frac{m}{\gamma}}. \qquad (6.20)$$

Из (6.19) и (6.20) получим

$$|b_{i_n} - (A_{i_n \cdot}, x^n)| \geqslant \rho_1 \|x^n - x^*\| \qquad (6.21)$$

где

$$\rho_1 = \frac{\rho\sqrt{\gamma}}{\sqrt{m}}$$

Покажем, что $\mathcal{D}(x^{n+1}, x^n) = \mathcal{D}(x^*, x^n) - \mathcal{D}(x^*, x^{n+1})$

Действительно, $\mathcal{D}(x^*, x^n) - \mathcal{D}(x^*, x^{n+1}) =$

$$= -f(x^n) - (g(x^n), x^* - x^n) + f(x^{n+1}) + (g(x^{n+1}), x^* -$$

$$- x^{n+1}) = f(x^{n+1}) - f(x^n) - (g(x^n), x^* - x^n) +$$

$$+ (g(x^n), x^* - x^{n+1}) + \lambda_n (A_{i_n \cdot}, x^* - x^{n+1}) =$$

$$= f(x^{n+1}) - f(x^n) - (g(x^n), x^{n+1} - x^n) = \mathcal{D}(x^{n+1}, x^n).$$

Отсюда получим

$$\frac{\mathcal{D}(x^*, x^{n+1})}{\mathcal{D}(x^*, x^n)} = 1 - \frac{\mathcal{D}(x^{n+1}, x^n)}{\mathcal{D}(x^*, x^n)} \qquad (6.22)$$

Подставляя вместо $\mathcal{D}(x^{n+1}, x^n)$ и $\mathcal{D}(x^*, x^n)$ их выражения из (6.12) и (6.11) будем иметь

$$\frac{\mathcal{D}(x^{n+1}, x^n)}{\mathcal{D}(x^*, x^n)} = \frac{(x^{n+1} - x^n) M(x^*) (x^{n+1} - x^n) + \frac{1}{2}\gamma^n}{(x^* - x^n) M(x^*) (x^* - x^n) + \frac{1}{2}\beta^n}$$

Подставим сюда выражение для x^{n+1} из формулы (6.16)

Тогда получим:

$$\frac{\mathcal{D}(x^{n+1}, x^n)}{\mathcal{D}(x^*, x^n)} = \frac{(b_{i_n} - (A_{i_n \cdot}, x^n))^2 + \eta^n}{(A_{i_n \cdot} M^{-1}(x^*) A_{i_n}) (x^n - x^*) M(x^*) (x^n - x^*) + \xi^n}$$

где η^n и $\xi^n = o(\|x^n - x^*\|^2)$ (6.23)

Разделим в последней формуле числитель и знаменатель на $\|x^* - x^n\|^2$ и воспользуемся неравенством (6.21)

Для достаточно больших n получим

$$\frac{\mathcal{D}(x^{n+1}, x^n)}{\mathcal{D}(x^*, x^n)} \geq \frac{\rho_1^2 + \frac{\eta^n}{\|x^* - x^n\|^2}}{\max\limits_i (A_{i\cdot} M^{-1}(x^*) A_{i\cdot}) \lambda_{max} + \frac{\xi^n}{\|x^n - x^*\|^2}} \geq \tilde{\Theta} > 0 \qquad (6.24)$$

Здесь λ_{max} наибольшее ~~наименьшее~~ собственное число матрицы $M(x^*)$.

Из (6.22) и (6.24) имеем

$$\mathcal{D}(x^*, x^{n+1}) \leq (1 - \tilde{\Theta}) \mathcal{D}(x^*, x^n)$$

Поэтому $\mathcal{D}(x^*, x^n) \leq (1 - \tilde{\Theta})^n \mathcal{D}(x^*, x^0)$

Из (6.11) получим

$$\mathcal{D}(x^*, x^n) = \frac{1}{2}(x^* - x^n) M(x^*) (x^* - x^n) + \beta^n \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \lambda_{min} \|x^* - x^n\|^2 + \beta^n$$

Поэтому при достаточно больших n

$$\mathcal{D}(x^*, x^n) \geq \omega \|x^n - x^*\|^2$$

Отсюда $\|x^* - x^n\| = O(\Theta^n)$, где $\Theta = (1-\tilde{\theta})^{1/2}$

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь совместную систему линейных неравенств: $(A_{i\cdot}, x) \geq b_i \quad (i=1,2,\dots m)$ (6.25)

Будем решать эту систему неравенств релаксационным методом с 3-им управлением релаксацией, т.е. в качестве i_n будем выбирать индекс, для которого $(b_{i_n} - (A_{i_n\cdot}, x^n)) \geq$ $\geq \gamma \max (b_i - (A_{i\cdot}, x^n))$ Согласно теореме 3 x^n сходится к x^* - решению системы .

Теорема 7. Если матрица $M(x^*)$ неособенная, то $\|x^n - x^*\| = O(\Theta^n)$, где $0 \leq \Theta < 1$

Доказательство. Пусть $\mathcal{J}_1 = \{ i = \{1,2,\dots m\} | (A_{i\cdot}, x^*) = b_i \}$ Если начальное приближение x^0 не удовлетворяет системе (6.25), то множество $\mathcal{J}_1$ непусто. Существует такое N, что при $n > N$ для $i \notin \mathcal{J}_1$, имеет место $(A_{i\cdot}, x^n) > b_i$ При $n \geq N$ имеет место $i_n \in \mathcal{J}_1$

Обозначим через $\tilde{A}$ матрицу, составленную из тех строк $A_{i\cdot}$, для которых $i \in \mathcal{J}_1$, $\tilde{b}$ - вектор, составленный из соответствующих компонент вектора b .

Покажем, что при $n \geq N$ $(b_{i_n} - (A_{i_n\cdot}, x^n)) \geq$ $\geq \gamma_1 \max_{i \in \mathcal{J}_1} |b_i - (A_{i\cdot}, x^n)|$, где $\gamma_1 > 0$ и не зависит от n .

Возьмем $n > N$. Точка x^{n+1} находится по-прежнему из условий $g(x^{n+1}) = g(x^n) + \rho_n A_{i_n\cdot}$ (6.26)

$$(A_{i_n\cdot}, x^{n+1}) = b_{i_n}$$

причем $\lambda_n > 0$ (это следует, например, из формулы (3.21)).

Из (6.26) следует, что система $g(x^n) = g(x^N) + \tilde{A}^T u$

$u \geqq \mathbb{O}$ совместна

Легко показать, что при всех $n \geqslant N$ совместна система

$$g(x^*) = g(x^n) + \tilde{A}^T u \tag{6.27}$$

$$u \geqq \mathbb{O} \tag{6.28}$$

Рассмотрим задачу линейного программирования

минимизировать $$\sum_{i=1}^{m} u_i \tag{6.29}$$

при условиях $$\tilde{A}^T u = g(x^*) - g(x^n) \tag{6.30}$$

$$u \geqq \mathbb{O} \tag{6.31}$$

Т.к. система (6.27)-(6.28) совместна, то задача (6.29)-(6.31) при всех $n \geqslant N$ имеет решение. Пусть $u^n = (u_1^n, u_2^n, \dots u_m^n)$ решение задачи (6.29)-(6.31).

Двойственная к (6.29)-(6.31) задача имеет вид

максимизировать $$(g(x^*) - g(x^n), v) \tag{6.32}$$

при условиях $$\tilde{A} v \leqq \mathbb{1} \tag{6.33}$$

где $\mathbb{1}$ – m - мерный вектор, все компоненты которого равны единице.

Т.к. задача (6.29)-(6.31) имеет решение, то задача (6.32)-(6.33) также имеет решение при всех $n \geqslant N$. Обозначим через v^n решение задачи (6.32)-(6.33). Тогда имеет место

$$\sum_{i=1}^{m} u_i^n = (g(x^*) - g(x^n), v^n).$$

Т.к. $(g(x^*) - g(x^n), v^n) = \max\limits_{j=1,2..q}(g(x^*) - g(x^n), v_j)$,

где $v_1, v_2, \dots v_q$

– крайние точки множества

$V = \{v \mid \tilde{A} v \leqq \mathbb{1}\}$, то $\sum\limits_{i=1}^{m} u_i^n \leq$

$\leq \| g(x^*) - g(x^n) \| \max\limits_{j=1,2\dots q} \| v_j \|$

Отсюда, учитывая, что $g(x^n) \to g(x^*)$ и формулу (6.7) получим, что существует число K, такое, что

$\|u^n\| \leq K \|x^n - x^*\| + o(\|x^n - x^*\|)$

Т.к. u^n – решение задачи (6.29)-(6.31), то справедливы соотношения

$$g(x^*) - g(x^n) = \tilde{A}^T u^n \qquad (6.34)$$

$$u^n \geqq \mathbb{0}$$

Умножим равенство (6.34) скалярно на $x^* - x^n$

Получим $(g(x^*) - g(x^n), x^* - x^n) = (u^n, \tilde{b} - \tilde{A} x^n)$

Подставляя сюда выражение для $g(x^n)$ из (6.7), получим

$$(x^n - x^*) M(x^*) (x^n - x^*) + o(\|x^n - x^*\|^2) = (u^n, \tilde{b} - \tilde{A} x^n)$$

Т.к. $u^n \geqq \mathbb{0}$, то $(u^n, \tilde{b} - \tilde{A} x^n) \leq (u^n, (\tilde{b} - \tilde{A} x^n)^+)$

$(\tilde{b} - \tilde{A} x^n)^+ = (z_1, z_2, \dots z_{m_1})$,

где $z_i = \max(0, b_i - (A_{i\cdot}, x^n))$

Поэтому

$$(x^n - x^*) M(x^*) (x^n - x^*) \leq (u^n, (\tilde{b} - \tilde{A} x^n)^+) + o(\|x^n - x^*\|^2)$$

$$\leq \|u^n\| \, \|(\tilde{b} - \tilde{A} x^n)^+\| + o(\|x^n - x^*\|^2) \leq K \|x^n - x^*\| \times$$

$$\times \|(b - A x^n)^+\| + o(\|x^n - x^*\|^2).$$

Отсюда получим

$$\delta_{min} \| x^n - x^* \|^2 \le k \| x^n - x^* \| \| (\tilde{b} - \tilde{A} x^n)^+ \| + o(\| x^n - x^* \|^2)$$

где δ_{min} - наименьшее собственное число матрицы

Из (6.35) получается, что существует число δ, такое что $\| (\tilde{b} - \tilde{A} x^n)^+ \| \geqslant \delta \| x^n - x^* \|$

Легко показать, что существует число δ_1 такое что

$$b_{i_n} - (A_{i_n \cdot}, x^n) \geqslant \delta_1 \| (\tilde{b} - \tilde{A} x^n)^+ \|$$

Пусть $i \in \mathcal{I}_1$. Тогда учитывая (6.36) и (6.37) получим

$$|b_i - (A_{i \cdot}, x^n)| \le \| A_{i \cdot} \| \| x^n - x^* \| \le \frac{\| A_{i \cdot} \|}{\delta} \| (\tilde{b} - \tilde{A} x^n)^+ \| \le$$

$$\le \frac{\| A_{i \cdot} \|}{\delta \delta_1} (b_{i_n} - (A_{i_n \cdot}, x^n))$$

Отсюда для всех $i \in \mathcal{I}_1$ и $n \geqslant N$ получим

$$(b_{i_n} - (A_{i_n \cdot}, x^n)) \geqslant \gamma_1 |b_i - (A_{i \cdot}, x^n)|$$

где

$$\gamma_1 = \frac{\delta_1 \delta}{\max\limits_i \| A_{i \cdot} \|}$$

Следовательно, управление релаксацией $(i_N, i_{N+1} \ldots)$ такое, как было рассмотрено в лемме 3 и следовательно $\| x^n - x^* \| = O(\theta^n)$, где $0 \le \theta < 1$.

Следствие I. При циклическом управлении релаксацией также имеет место $\| x^n - x^* \| = O(\theta^n)$ $(0 \le \theta < 1)$, если матрица $M(x^*)$ неособенная.

Док-во. Покажем, что существует число $\gamma > 0$, такое что хотя бы для одного n в каждом цикле (т.е. при каждом $k = 1, 2, \ldots$, хотя бы для одного n, удовлетворяющего условию $k \le n \le k + m - 1$) имеет место

$$b_{i_h} - (A_{i_h \cdot}, x^h) \geq \gamma \max_i (b_i - (A_{i\cdot}, x^h)) \quad (6.38)$$

~~где (— целое)~~.

Предположим, что это не имеет места. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер k, что при $k \leq h \leq k+m-1$ имеет место

$$b_{i_h} - (A_{i_h \cdot}, x^h) \leq \varepsilon \max_i (b_i - (A_{i\cdot}, x^h)) \quad (6.39)$$

Положим
$$K = \max_{r,s=1,2\ldots m} \left| \frac{A_{s\cdot} M^{-1}(x^*) A_{r\cdot}}{A_{s\cdot} M^{-1}(x^*) A_{s\cdot}} \right|$$

и возьмем $\varepsilon < \dfrac{1}{K^m 2^{m+1}}$ и такой номер K, что при этом ε выполнено .

Пусть $\max_i (b_i - (A_{i\cdot}, x^k)) = b_j - (A_{j\cdot}, x^k)$

и $j = i_{k+\nu}$

Не умаляя общности можно считать, что

$\lambda_k, \lambda_{k+1}, \ldots \lambda_{k+\nu-1} > 0$.

Учитывая (6.9) и (6.10) имеем

$$(b_j - (A_{j\cdot}, x^{k+\nu})) = (b_j - (A_{j\cdot}, x^{k+\nu-1})) -$$
$$- (b_{i_{k+\nu-1}} - (A_{i_{k+\nu-1}\cdot}, x^{k+\nu-1})) \frac{A_{j\cdot} M^{-1}(x^*) A_{i_{k+\nu-1}\cdot}}{A_{i_{k+\nu-1}\cdot} M^{-1}(x^*) A_{i_{k+\nu-1}\cdot}} +$$
$$+ o(\|x^k - x^*\|) \geq (b_j - (A_{j\cdot}, x^{k+\nu-1})) - K(b_{i_{k+\nu-1}} -$$
$$- (A_{i_{k+\nu-1}\cdot}, x^{k+\nu-1})) + o(\|x^k - x^*\|).$$

Продолжая это неравенство можно получить

$$(b_j - (A_{j\cdot}, x^{k+\nu})) \geq (b_j - (A_{j\cdot}, x^k)) - K \sum_{i \in J_1} (b_i - (A_{i\cdot}, x^k)) -$$

$$-k^2 \sum_{i\in \mathcal{I}_2} (b_i - (A_{i\cdot}, x^k)) - \ldots - K^\nu \sum_{i\in \mathcal{I}_\nu} (b_i - (A_{i\cdot}, x^k)) +$$

$$+ o(\|x^k - x^*\|) \qquad (6.40)$$

где $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots \mathcal{I}_\nu$ некоторые подмножества индексов. Легко видеть, что в формуле (6.40) не более 2^ν слагаемых. Учитывая, что $K \geqslant 1$ и формулу (6.39) получим

$$(b_j - (A_{j\cdot}, x^{k+\nu})) \geqslant (b_j - (A_{j\cdot}, x^k)) - \varepsilon K^\nu 2^\nu (b_j - (A_{j\cdot}, x^k)) +$$
$$+ o(\|x^k - x^*\|) \geqslant (b_j - (A_{j\cdot}, x^k)) \gamma_1 + o(\|x^k - x^*\|), \text{ где } \gamma_1 = (1 - \varepsilon k^m 2^m) \geqslant \frac{1}{2}$$

Т.к. существует γ_2, такое что $(b_j - (A_{j\cdot}, x^k)) \geqslant \gamma_2 \|x^k - x^*\|$ (см.формулу (6.36)), то

$$\frac{b_j - (A_{j\cdot}, x^{k+\nu})}{\|x^k - x^*\|} \geqslant \gamma_3 > 0$$

Далее, применяя ν раз формулу (6.13) получим

$$\|x^k - x^*\| \geqslant \gamma_4 \|x^{k+\nu} - x^*\|$$

Поэтому

$$\frac{b_j - (A_{j\cdot}, x^{k+\nu})}{\|x^{k+\nu} - x^*\|} \geqslant \gamma_3 \gamma_4 > 0$$

А. т.к. $b_i - (A_{i\cdot}, x^{k+\nu}) \leq (A_{i\cdot}, x^* - x^{k+\nu}) \leq$

$\leq \|A_{i\cdot}\| \cdot \|x^* - x^{k+\nu}\|$, то

$$b_j - (A_{j\cdot}, x^{k+\nu}) \geqslant \frac{\gamma_3 \gamma_4}{\max_i \|A_{i\cdot}\|} (b_i - (A_{i\cdot}, x^{k+\nu})) \qquad (6.41)$$

Заметим, что γ_3 и γ_4 не зависят при достаточно больших K от ε и от K. Поэтому неравенство (6.41) противоречит (6.39).

Следовательно, имеет место (6.38), что вместе с теоремой даёт $\|x^n - x^*\| = O(\theta^n)$.

Следствие 2. Последовательность $u^n = \sum_\nu \rho_\nu e_{i_\nu}$ сходится.

Действительно, согласно формуле (6.9)

$$|\rho_n| = \frac{|b_{i_n} - (A_{i_n\cdot}, x^n)|}{A_{i_n\cdot} M^{-1}(x^*) A_{i_n\cdot}} + o(\|x^n - x^*\|) \le$$

$$\le \frac{\|A_{i_n\cdot}\| \, \|x^n - x^*\|}{A_{i_n\cdot} M^{-1}(x^*) A_{i_n\cdot}} + o(\|x^n - x^*\|).$$

Следовательно, $\frac{|\rho_n|}{\|x^n - x^*\|} \le K$ и значит ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |\rho_n|$ сходится. Значит сходится и последовательность u^n. При этом

$$\|u^n - u^*\| = \|\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \rho_\nu e_{i_\nu}\| \le \sum_{\nu=n+1}^{\infty} |\rho_\nu| = O(\theta^n)$$

Пусть задано счётное семейство линейных неравенств

$$(A_{i\cdot}, x) \geqslant b_i \qquad (6.42)$$

$i = 1, 2, 3 \ldots$

Предположим, что система (6.42) совместна,

$\sup_i \|A_i\| < \infty$ и $\sup_i |b_i| < \infty$

Будем решать систему (6.42) релаксационным методом с функцией релаксации $D(x,y) = f(x) - f(y) - (g(y), x-y)$. Выберем 3-е управление релаксацией, т.е. в качестве i_n будем выбирать индекс, удовлетворяющий условию

$$b_{i_n} - (A_{i_n\cdot}, x^n) \geqslant \gamma \sup_{i=1,2\ldots} (b_i - (A_{i\cdot}, x^n)),$$

где $\gamma > 0$.

Тогда согласно теореме 3, релаксационная последовательность $\{x^n\}$ сходится к точке x^* – решению системы (6.42).

По-прежнему считаем, что выполнено условие теоремы 4.

Лемма 5. Пусть выполнены следующие условия:

1) Матрица $M(x^*)$ – неособенная.

2) Существует вектор $\bar{x}$, такой что

$$\inf_i (A_{i\cdot}, \bar{x}) - b_i) = \varepsilon > 0 \qquad (6.43)$$

Тогда $\|x^n - x^*\| = O(\theta^n)$, где $0 \le \theta < 1$

Доказательство. Как и раньше точка x^{n+1} находится из условий:

$$g(x^{n+1}) = g(x^n) + \rho_n A_{i_n\cdot}$$

$$(A_{i_n\cdot}, x^{n+1}) = b_{i_n}$$

Как следует из формулы (3.21) $\rho_n > 0$. Пусть $m > n$

Рассмотрим задачу линейного программирования:

максимизировать $\sum_{\nu=n}^{m-1} b_{i_\nu} u_{i_\nu}$ $\qquad (6.44)$

при условиях

$$\sum_{\nu=n}^{m-1} u_{i_\nu} A_{i_\nu\cdot} = g(x^m) - g(x^n) \qquad (6.45)$$

$$u_{i_\nu} \geqslant 0 \qquad (6.46)$$

Эта задача имеет допустимый план, например $u_{i_\nu} = \rho_\nu$

Напишем двойственную задачу для задачи $(6.44)-(6.46)$.

Минимизировать $(g(x^m) - g(x^n)), x)$ $\qquad (6.47)$

При условиях $(A_{i_\nu\cdot}, x) \geqslant b_{i_\nu}$ $(\nu = n, \dots m-1)$ (6.48)

Эта задача также имеет допустимый план, т.к. система (6.42) совместна.

Поэтому обе задачи имеют оптимальные планы, причем

$$\max \sum_{\nu=h}^{m-1} b_{i_\nu} u_{i_\nu} = \min (g(x^m) - g(x^h), x) \quad (6.49)$$

где максимум берётся по u_{i_ν}, удовлетворяющим услoвиям (6.45) и (6.46), а минимум по x, удовлетворяющему условиям (6.47). ([7]).

Пусть $\mathfrak{M}$ - пространство ограниченных последовательностей. Если $z = (z_1, z_2, \ldots) \in \mathfrak{M}$, то, как обычно, полагаем $\|z\| = \sup_i |z_i|$ Т.к. $\sup_i |b_i| < \infty$ то последовательность $b = (b_1, b_2, \ldots) \in \mathfrak{M}$.

Пусть ℓ - нормированное пространство последовательностей, такое, что $y \in \ell$ тогда и только тогда, когда $\|y\| = \sum_{i=1}^{\infty} |y_i| < \infty$. Как известно ([18] стр.185) пространство $\mathfrak{M}$ является сопряжённым к пространству ℓ.

Пусть A^* - линейный оператор, действующий из ℓ в E^p следующим образом:

для $y = (y_1, y_2, \ldots) \in \ell$ $\quad A^* y = x = (x_1, x_2, \ldots x_p)$

где $x_j = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} y_i$. Т.к. $\|A_{i\cdot}\| \le M$ для всех i то существует число M_1 такое, что $|a_{ij}| < M_1$ при всех i и j. Поэтому $|x_j| \le M_1 \|y\|$, следовательно, оператор A^* - ограниченный.

Пусть A - сопряженный к A^* оператор. Оператор A отображает пространство E^p в пространство $\mathfrak{M}$ следующим образом:

для $x = (x_1, x_2, \ldots x_p) \in E^p$ $\quad Ax = z = (z_1, z_2, \ldots)$ где

$z_i = (A_{i\cdot}, x)$. Т.к. $\sup_i \|A_{i\cdot}\| \le \infty$ то $z \in \mathfrak{M}$.

Если $y \in \ell$, а $z \in \mathfrak{M}$, то символом (y, z) будем обозначать $\sum_{i=1}^{\infty} y_i z_i$. Очевидно, что при каждом $y \in \ell$ и $z \in \mathfrak{M}$ имеет место $|(y,z)| < \infty$.
Т.к. A – сопряжённый к A^* оператор, то при каждом $y \in \ell$ и $x \in E^P$ имеет место $(y, Ax) = (A^* y, x)$

Пусть $y = (y_1, y_2 \dots)$ и $z = (z_1, z_2 \dots)$ две последовательности. Будем писать $y \geqslant z$, если при всех i $y_i \geqslant z_i$, $y > z$ если при всех i $y_i > z_i$

В приведенных обозначениях систему (6.42) можно переписать в виде

$$A x \geqq b.$$

Пусть $u^m = \sum_{\nu=n}^{m-1} \lambda_n e_{i_\nu}$, если $m > n$; $u^n = 0$,

где e_{i_ν} – последовательность, все члены которой равны нулю, кроме члена i_ν, который равен единице. Очевидно, что $u^m \in \ell$ и $A^* u^m = g(x^m) - g(x^n)$

Для $x \in E^P$ и $u \in \ell$ положим

$$\varphi_n(x, u) = f(x) + (u, b - Ax) - (g(x^n), x)$$

Покажем, что $\varphi_n(x^{m+1}, u^{m+1}) - \varphi_n(x^m, u^m) = \mathcal{D}(x^{m+1}, x^m)$ (6.50)

Действительно, $\varphi_n(x^{m+1}, u^{m+1}) - \varphi_n(x^m, u^m) =$

$$= f(x^{m+1}) + (u^{m+1}, b - Ax^{m+1}) - (g(x^n), x^{m+1}) -$$

$$- f(x^m) - (u^m, b - Ax^m) + (g(x^n), x^m) =$$

$$= f(x^{m+1}) - f(x^m) + (u^{m+1} - u^m, b) - (g(x^{m+1}) - g(x^n), x^{m+1}) +$$

$$+ (g(x^m) - g(x^n), x^m) - (g(x^n), x^{m+1} - x^m) =$$

$$= f(x^{m+1}) - f(x^m) + \lambda_m b_{i_m} - (g(x^m), x^{m+1} - x^m) -$$

$$- \lambda_m (A_{i_m}, x^{m+1}) = \mathcal{D}(x^{m+1}, x^m).$$

Следовательно, формула (6.50) верна.

Из формулы (6.50) получим:

$$\varphi_h(x^m, u^m) = \varphi_h(x^h, u^h) + \sum_{\nu=h}^{m-1} D(x^{\nu+1}, x^\nu)$$

Т.к. ряд $\sum_{\nu=h}^{\infty} D(x^{\nu+1}, x^\nu)$ сходится (ввиду того, что $D(x^{\nu+1}, x^\nu) \le D(x^*, x^\nu) - D(x^*, x^{\nu+1})$), то существует $\lim_{m\to\infty} \varphi_h(x^m, u^m)$, т.е. существует

$$\lim (f(x^h) + (u^m, b - Ax^m) - (g(x^h), x^m)).$$

Т.к. $f(x^m) - (g(x^h), x^m) \to f(x^*) - (g(x^h), x^*)$ при $m \to \infty$ то существует $\lim_{m\to\infty} (u^m, b - Ax^m)$, а т.к. существует

$$\lim_{m\to\infty} (u^m, Ax^m) = \lim_{m\to\infty} (A^* u^m, x^m) =$$

$$= \lim_{m\to\infty} (g(x^m) - g(x^h), x^m) = (g(x^*) - g(x^h), x^*),$$ то

существует и $\lim_{m\to\infty} (u^m, b)$. Поэтому существует такое число τ, что при всех m имеет место

$$(u^m, b) \geqslant \tau \qquad (6.51)$$

Т.к. u^m является допустимым планом задачи (6.44) – (6.46), то из условий (6.49) и (6.51) можно получить:

$$\min (g(x^m) - g(x^h), x) \geqslant \tau$$

где минимум берется по множеству векторов x, удовлетворяющих условию (6.48).

Тем более имеет место неравенство

$$\inf_R (g(x^*) - g(x^h), x) \geqslant \tau$$

где R - множество векторов x, удовлетворяющих системе (6.42).

Т.к. $g(x^m) \to g(x^*)$, то

$$\inf_R (g(x^*) - g(x^n), x) \geq r$$

Т.к. система (6.42) совместна, выполнено условие (6.43) и $\inf_R (g(x^*) - g(x^n), x) > -\infty$, то выполнены условия теоремы двойственности для бесконечных задач линейного программирования ([11]) и ([31]), следовательно, имеет решение двойственная задача:

$$\text{максимизировать } (v, b) \tag{6.52}$$

$$\text{при условиях} \quad A^* v = g(x^*) - g(x^n) \tag{6.53}$$

$$v \geq 0 \tag{6.54}$$

причём, если обозначить через v^n решение задачи (6.52) - (6.54), то имеет место

$$(v^n, b) = \inf (g(x^*) - g(x^n), x)$$

Легко видеть, что $\inf_R (g(x^m) - g(x^n), x) \xrightarrow[m \to \infty]{}$

$$\to \inf_R (g(x^*) - g(x^n), x)$$

Поэтому $\lim\limits_{m \to \infty} (u^m, b) \leq \lim\limits_{m \to \infty} \inf_R ((g(x^m) - g(x^n), x) =$

$$= \inf_R (g(x^*) - g(x^n), x) = (v^n, b) \tag{6.55}$$

Далее $\lim\limits_{m \to \infty} (u^m, Ax^*) = \lim\limits_{m \to \infty} (g(x^m) - g(x^n), x^*) =$

$$= (g(x^*) - g(x^n), x^*) = (v^n, Ax^*). \tag{6.56}$$

Из (6.55) и (6.56) следует, что

$$(v^n, b - Ax^*) \geq \lim_{m \to \infty} (u^m, b - Ax^*) \tag{6.57}$$

Далее, учитывая, что $\varphi_n(x^m, u^m) \geq \varphi_n(x^n, u^n)$

при $m > n$, имеем:

$$\mathcal{D}(x^*,x^m) = f(x^*) - f(x^m) - (g(x^m), x^* - x^m) =$$
$$= f(x^*) - f(x^m) - (g(x^n), x^* - x^m) - (u^m, Ax^* - Ax^m) =$$
$$= f(x^*) - f(x^m) - (g(x^n), x^* - x^m) - (u^m, b - Ax^m) +$$
$$+ (u^m, b - Ax^*) = f(x^*) - (g(x^n), x^*) + (u^m, b - Ax^*) -$$
$$- \varphi_h(x^m, u^m) \leq f(x^*) - (g(x^n), x^*) + (u^m, b - Ax^*) -$$
$$- \varphi_h(x^n, u^n) = (u^m, b - Ax^*) + f(x^*) - (g(x^n), x^*) -$$
$$- f(x^n) + (g(x^n), x^n) = (u^m, b - Ax^*) + \mathcal{D}(x^*, x^n).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $m \to \infty$ и учитывая, что $\lim\limits_{m\to\infty} \mathcal{D}(x^*,x^m) = 0$, получим, что

$$\lim_{m\to\infty} (u^m, b - Ax^*) \geqslant -\mathcal{D}(x^*, x^n)$$

Сопоставляя это с (6.57) получим

$$(v^n, b - Ax^*) \geqslant -\mathcal{D}(x^*, x^n) \qquad (6.58)$$

Из (6.58) получается неравенство

$$(v^n, b) \geqslant (g(x^*) - g(x^n), x^*) - \mathcal{D}(x^*, x^n)$$

Согласно условию (6.43) существует $\bar{x}$, такой что $A\bar{x} \geqq b + \bar{\varepsilon}$, где $\bar{\varepsilon}$ – последовательность, все члены которой равны ε.

Учитывая, что $v^n \geqq \mathbb{O}$, получим

$$(A^* v^n, \bar{x}) \geqslant (v^n, b) + \varepsilon \|v^n\| \geqslant (g(x^*) - g(x^n), x^*) - \mathcal{D}(x^*, x^n) + \varepsilon \|v^n\|$$

Отсюда имеем:

$$\|v^n\| \leq \frac{1}{\varepsilon}\left((g(x^*) - g(x^n), \bar{x} - x^*) + \mathcal{D}(x^*, x^n)\right) \qquad (6.59)$$

Обозначим через $(b - Ax^n)^+$ последовательность, которая получается из последовательности $(b - Ax^n)$ заменой всех её отрицательных членов нулями.

Тогда имеем:

$$(v^n, (b - Ax^n)^+) \geq (v^n, b - Ax^n) = (v^n, b - Ax^*) +$$

$$+ (v^n, Ax^* - Ax^n) \geq (g(x^*) - g(x^n), x^* - x^n) - \mathcal{D}(x^*, x^n) =$$

$$= (g(x^*) - g(x^n), x^* - x^n) - f(x^*) + f(x^n) + (g(x^n), x^* - x^n) =$$

$$= (g(x^*), x^* - x^n) - f(x^*) + f(x^n)$$

Учитывая выражение для $f(x^n)$ (6.6) получим

$$(v^n, (b - Ax^n)^+) \geq \frac{1}{2}(x^n - x^*) M(x^*)(x^n - x^*) + o(\|x^n - x^*\|^2) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \lambda_{min} \|x^n - x^*\|^2 + o(\|x^n - x^*\|^2) \qquad (6.60)$$

С другой стороны

$$(v^n, (b - Ax^n)^+) \leq \|v^n\| \|(b - Ax^n)^+\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\gamma} \|v^n\| (b_{i_n} - (A_{i_n \cdot}, x^n))$$

Учитывая (6.59) и то, что $\|g(x^*) - g(x^n)\| \leq K\|x^* - x^n\|$, получим

$$(v^n, (b - Ax^n)^+) \leq \frac{K_1}{\gamma}(b_{i_n} - (A_{i_n \cdot}, x^n))\|x^n - x^*\| +$$

$$+ K_2 (b_{i_n} - (A_{i_n \cdot}, x^n)) \cdot \mathcal{D}(x^*, x^n) \qquad (6.61)$$

Т.к. $(b_{i_n} - (A_{i_n \cdot}, x^n)) \cdot \mathcal{D}(x^*, x^n) = o(\|x^n - x^*\|^2)$, то

из (6.60) и (6.61) получим:

$$b_{i_n} - (A_{i_n \cdot}, x^n) \geq \alpha \|x^n - x^*\|$$

для некоторого $\alpha > 0$.

Перепишем (6.23)

$$\frac{\mathcal{D}(x^{n+1},x^n)}{\mathcal{D}(x^*,x^n)} = \frac{(b_{i_n}-(A_{i_n\cdot},x^n))^2+o(\|x^n-x^*\|^2)}{(A_{i_n\cdot}M^{-1}(x^*)A_{i_n\cdot})((x^*-x^n)M(x^*)(x^*-x^n)+o(\|x^n-x^*\|^2))};$$

$$\geqslant \frac{(b_{i_n}-(A_{i_n\cdot},x^n))^2+o(\|x^n-x^*\|)^2}{\sup\limits_i \|A_i\|\cdot\|M^{-1}(x^*)\|\cdot\|M(x^*)\|\cdot\|x^n-x^*\|^2+o(\|x^n-x^*\|^2)} \qquad (6.62)$$

Разделим числитель и знаменатель в (6.62) на $\|x^n-x^*\|^2$

Тогда при больших n

$$\frac{\mathcal{D}(x^{n+1},x^n)}{\mathcal{D}(x^*,x^n)} \geqslant \tilde{\Theta} > 0$$

Поэтому $\dfrac{\mathcal{D}(x^*,x^{n+1})}{\mathcal{D}(x^*,x^n)} \leq 1-\tilde{\Theta}$ и

$$\mathcal{D}(x^*,x^n) = O((1-\tilde{\Theta})^n)$$

Из выражения (6.11) легко получить

$$\|x^n-x^*\| = O(\Theta^n), \text{ где } \Theta = (1-\tilde{\Theta})^{1/2} < 1$$

Лемма доказана.

Следствие. Рассмотрим произвольную систему линейных неравенств:

$$(A_{i\cdot},x) \geqslant b_i \quad i \in \mathcal{I} \qquad (6.63)$$

Будем считать, что система (6.63) совместна. Для её решения релаксационным методом выберем 3-е управление релаксацией.

Если $\sup\limits_{i_n}\|A_{i_n}\| < \infty$ и $\sup\limits_{i_n}|b_{i_n}| < \infty$, то релаксационная последовательность сходится к x^* - решению системы (6.63).

Если существует $\bar{x}$, такой что $\inf\limits_i((A_{i\cdot},\bar{x})-b_i) = \varepsilon > 0$ и матрица $M(x^*)$ неособенная, то $\|x^n-x^*\| = O(\Theta^n)$

где $0 \leq \Theta < 1$

Действительно, рассмотрим подсистему системы (6.63):

$$(A_{i_n \cdot}, x^n) \geq b_{i_n} \quad (n=1,2,\dots) \qquad (6.64)$$

Релаксационный метод для систем (6.63) и (6.64) совпадает и управление релаксацией $\{i_0, i_1, \dots\}$ является подходящим для системы (6.64), т.к. $(b_{i_n} - (A_{i_n \cdot}, x^n)) \geq$

$$\geq \gamma \sup_{i \in J} (b_i - (A_{i \cdot}, x^n)) \geq \gamma \sup_{i_0, i_1, i_2, \dots} (b_i - (A_{i \cdot}, x^n))$$

Следовательно, все условия леммы выполнены и

$$\|x^n - x^*\| = O(\theta^n)$$

Будем рассматривать теперь задачу нахождения общей точки произвольной системы выпуклых множеств.

Докажем сначала следующую лемму.

Лемма 6. Пусть A - замкнутое выпуклое множество, $y \in A$, z - $\mathcal{D}$ -проекция точки y на множество A. Тогда существует такое опорное к множеству A полупространство Π, что $\mathcal{D}$ -проекция точки y на Π есть z.

Доказательство. Т.к. z является $\mathcal{D}$ -проекцией точки y на множество A, то z минимизирует функцию $\mathcal{D}(x,y) = f(x) - f(y) - (g(y), x-y)$ по всем $x \in A$. Обозначим через $\nabla \mathcal{D}(x,y)$ градиент функции $\mathcal{D}(x,y)$, т.е.

$$\nabla \mathcal{D}(x,y) = \left(\frac{\partial \mathcal{D}(x,y)}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial \mathcal{D}(x,y)}{\partial x_p} \right)$$

Очевидно, что $\nabla \mathcal{D}(x,y) = g(x) - g(y)$

Имеет место следующее условие (см. [12])

$$\min_{x \in A} (x - z, \nabla \mathcal{D}(z,y)) = 0$$

Отсюда получается, что при всех $x \in A$

$$(g(z)-g(y), x) \geqslant (g(z)-g(y), z)$$

Поэтому полупространство

$$\Pi = \{x \in E^p \mid (g(z)-g(y), x) \geqslant (g(z)-g(y), z)\}$$

является опорным к множеству A.

Покажем, что $\mathcal{D}$ -проекция точки y на Π есть z.

Прежде всего заметим, что $y \notin \Pi$. Действительно, как легко видеть $(g(z)-g(y), y-z) < 0$ т.к.

$$(g(z)-g(y), z-y) = \mathcal{D}(y,z) + \mathcal{D}(z,y) > 0$$

Поэтому $\mathcal{D}$ -проекция точки y на Π находится с помощью формул (3.7) и (3.8).

Обозначим через P_y - $\mathcal{D}$ -проекцию точку y на Π. Тогда имеет место

$$g(P_y) = g(y) + \lambda(g(z)-g(y)) \qquad (6.65)$$

$$(g(z)-g(y), P_y) = (g(z)-g(y), z) \qquad (6.66)$$

Условия (6.65) и (6.66) удовлетворяются, если положить $P_y = z$, $\lambda = 1$. Следовательно, z является $\mathcal{D}$ -проекцией точки y на Π.

Пусть дана произвольная система замкнутых выпуклых множеств A_i $(i \in J)$

Будем считать, что $R = \bigcap_{i \in J} A_i$ не пусто.

Будем решать задачу нахождения общей точки множеств A_i релаксационным методом со 2-м управлением релаксацией, т.е. в качестве i_n берется тот индекс, который реализует $\max_{i \in J} \min_{x \in A_i} \mathcal{D}(x, x^n)$. (Предполагается, что этот максимум всегда существует). Тогда релаксационная последовательность $\{x^n\}$ сходится к x^* - общей точке множеств A_i. (Теорема 2).

Теорема 8. Пусть выполнены следующие условия:

1) Множество R имеет внутреннюю точку.

2) Матрица $M(x^*)$ неособенная.

Тогда $\|x^n - x^*\| = O(\theta^n)$, где $0 \le \theta < 1$

Доказательство. Как известно ([19]) стр.781) всякое замкнутое выпуклое множество есть пересечение всех его опорных полупространств. Поэтому множество R - есть пересечение всех опорных полупространств ко всем множествам A_i. Пусть $B_j \; (j \in J)$ - все эти полупространства.

$$B_j = \{x \mid (B_{j\cdot}, x) \geqslant b_j\}$$

Можно считать, что все векторы $B_{j\cdot}$ нормированы, так что при всех $j \in J$ $\|B_{j\cdot}\| = 1$

Согласно лемме 6 $\mathcal{D}$-проекция на множество A_i есть $\mathcal{D}$-проекция на некоторую опорную гиперплоскость. Поэтому рассматриваемый метод можно считать релаксационным методом для нахождения общей точки множеств B_j. В качестве j_n берётся тот индекс, для которого B_{j_n} является опорной гиперплоскостью множества A_{i_n}, именно той, $\mathcal{D}$-проекция точки x^n, на которую есть x^{n+1}.

Как видно из леммы 6

$$B_{j_n} = \left\{x \,\middle|\, \left(\frac{g(x^{n+1}) - g(x^n)}{\|g(x^{n+1}) - g(x^n)\|}, x\right) \geqslant \left(\frac{g(x^{n+1}) - g(x^n)}{\|g(x^{n+1}) - g(x^n)\|}, x^{n+1}\right)\right\}$$

Таким образом $$B_{j_n\cdot} = \frac{g(x^{n+1}) - g(x^n)}{\|g(x^{n+1}) - g(x^n)\|}$$

а $$b_{j_n} = \left(\frac{g(x^{n+1}) - g(x^n)}{\|g(x^{n+1}) - g(x^n)\|},\ x^{n+1} \right)$$

Покажем, что существует $\gamma > 0$, такое что

$$b_{j_n} - (B_{j_n^\circ}, x^n) \geqslant \gamma \sup_{j \ni \mathcal{J}} (b_j - (B_{j^\circ}, x^n)) \tag{6.67}$$

т.е. что $\{j_0, j_1, \dots\}$ является 3-им управлением релаксаций.

Имеем $g(x^{n+1}) - g(x^n) = M(x^n + \alpha(x^{n+1} - x^n))(x^{n+1} - x^n)$,

где $0 \leq \alpha < 1$. Т.к. матрица $M(x^*)$ неособенная, то при достаточно больших n матрица $M(x^n + \alpha(x^{n+1} - x^n))$ тоже неособенная. Поэтому существует $\beta > 0$, такое что $(x^{n+1} - x^n) M(x^n + \alpha(x^{n+1} - x^n))(x^{n+1} - x^n) \geqslant \beta \|x^{n+1} - x^n\|^2$

Далее имеем:

$$b_{j_n} - (B_{j_n^\circ}, x^n) = \frac{(g(x^{n+1}) - g(x^n),\ x^{n+1} - x^n)}{\|g(x^{n+1}) - g(x^n)\|} =$$

$$= \frac{(x^{n+1} - x^n) M(x^n + \alpha(x^{n+1} - x^n))(x^{n+1} - x^n)}{\|M(x^n + \alpha(x^{n+1} - x^n))(x^{n+1} - x^n)\|} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\beta \|x^{n+1} - x^n\|^2}{K \|x^{n+1} - x^n\|} = \beta_1 \|x^{n+1} - x^n\| \tag{6.68}$$

где $\beta_1 > 0$

Пусть y_i^n $\mathcal{D}$-проекция точки x^n на множество A_i. Т.к. $\mathcal{D}(y_i^n, x^n) \leq \mathcal{D}(x^{n+1}, x^n)$, то легко показать (это уже делалось в лемме 4), что существует $\beta_2 > 0$ такое что $\|x^{n+1} - x^n\| \geqslant \beta_2 \|y_i^n - x^n\|$ (6.69)

Возьмем некоторый индекс $j \in \mathcal{J}$. Пусть B_j есть опорная полупространство множества A_i.

Т.к. $y_i^n \in A_i$, то $(B_{j\cdot}, y_i^n) \geqslant b_j$ (6.70)

Учитывая (6.68), (6.69) и (6.70) получим

$$b_j - (B_{j\cdot}, x^n) \leq (B_{j\cdot}, y_i^n - x^n) \leq \|y_i^n - x^n\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\beta_2}\|x^{n+1} - x^n\| \leq \frac{1}{\beta_1\beta_2}(b_{j_n} - (B_{j_n\cdot}, x^n))$$

что эквивалентно (6.67)

Далее, $\sup\limits_n \|B_{j_n\cdot}\| = 1$; $\sup\limits_n b_{j_n} < \infty$ т.к. $b_{j_n} \leq \|B_{j_n}\|\|x^*\| = \|x^*\|$; $\inf\limits_n b_{j_n} > -\infty$ т.к., как видно из

$$b_{j_n} \geqslant (B_{j_n}, x^n) \geqslant -\|x^n\| \geqslant -M$$

(т.к. множество элементов последовательности $\{x^n\}$ компактно). Следовательно, $\sup |b_{j_n}| < \infty$

Пусть $\overline{x}$ - внутренняя точка множества R. Легко видеть, что $\inf\limits_{j \in J}((B_{j\cdot}, \overline{x}) - b_j) > 0$

Таким образом выполнены все условия следствия к лемме 5

Поэтому $\|x^n - x^*\| = O(\theta^n)$, где $0 \leq \theta < 1$

Замечание 6. Хотя условие I) теоремы и не является необходимым, но опустить его нельзя.

Пример. Пусть в E^2 заданы выпуклые замкнутые множества:

$$A_1 = \{x = (x_1, x_2) \mid x_2 \leqq 0\}$$

$$A_2 = \{x = (x_1, x_2) \mid x_2 - x_1^2 \geqslant 0\}$$

Эти множества имеют единственную общую точку $x^* = (0,0)$

Будем находить общую точку этих множеств релаксационным методом с функцией релаксации

$$\mathcal{D}(x, y) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$$

Пусть точка $x^n \in A_1$, т.е. $x^n = (x_1^n, x_2^n)$, где $x_2^n \leq 0$. Будем считать, что $x_2^n = 0$, $x_1^n > 0$. Обозначим через x^{n+1} проекцию точки x^n на A_2. Нетрудно видеть, что x^{n+1} находится из следующего соотношения

$$x_1^{n+1} - x_1^n + 2(x_1^{n+1})^3 = 0 \qquad x_2^{n+1} = (x_1^{n+1})^2$$

Проектируя точку x^{n+1} на A получим точку $x^{n+2} = (x_1^{n+2}, x_2^{n+2})$, где $x_1^{n+2} = x_1^{n+1}$, а $x_2^{n+2} = 0$.

Положим $y_n = x_1^{2n}$

Тогда имеем

$$y_{n+1} - y_n + 2y_{n+1}^3 = 0 \qquad (6.71)$$

Т.к. $y_{n+1} < y_n$, то из (6.71) получим

$$y_{n+1} \geqslant y_n - 2y_n^3 \qquad (6.72)$$

Покажем, что y_n стремится к нулю медленнее, чем любая геометрическая прогрессия.

Предположим, что существует число $\theta \in [0,1]$, такое что $y_n = O(\theta^n)$, т.е. последовательность $z_n = \frac{y_n}{\theta^n}$ является ограниченной. Из (6.72) получим

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} \geqslant \frac{1}{\theta}(1 - 2z_n\theta^{2n})$$

Т.к. $\theta < 1$, то $1 - 2z_n\theta^{2n} \to 1$ и, следовательно, при достаточно больших n

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} \geqslant \frac{1}{\theta} - \varepsilon > 1$$

что противоречит тому, что последовательность z_n ограничена

Следовательно и x_1^n стремятся к нулю медленнее, чем любая геометрическая прогрессия.

Замечание 7. Как видно из доказательств теорем 7 и 8 существует числа $\theta \in [0,1]$, $\gamma > 0$, такие что $\mathcal{D}(x^{n+1}, x^*) \leq$ $\leq \theta \mathcal{D}(x^n, x^*)$ и $\mathcal{D}(x^{n+1}, x^n) \geq \gamma \mathcal{D}(x^*, x^n)$

§ 7. Неполная релаксация

Во многих случаях релаксационный метод бывает трудно реализовать, т.к. задача нахождения $\mathcal{D}$ -проекции заданной точки на некоторое выпуклое множество A_i может быть довольно трудной с вычислительной точки зрения. Поэтому часто желательно иметь какой-либо более простой спосооб нахождения приближения x^{n+1} по приближению x^n. В этом параграфе будет рассмотрен один из таких способов.

По-прежнему будем рассматривать задачу нахождения общей точки выпуклых множеств A_i. Выберем некоторое управление релаксацией $\{i_0, i_1, \dots\}$ и функцию релаксации $\mathcal{D}(x,y)$

Пусть известно приближение x^n. Будем выбирать точку x^{n+1} так, чтобы выполнялись следующие условия:

I. При всех $z \in A_{i_n}$ имеет место

$$\mathcal{D}(x^{n+1}, x^n) \leq M(\mathcal{D}(z, x^n) - \mathcal{D}(z, x^{n+1})),$$

где $M > 0$ не зависит от n

2. $\mathcal{D}(P_{i_n} x^n, x^n) \to 0$ при $n \to \infty$

Такой метод будем называть методом неполной релаксации

В отличие от него метод, рассмотренный в § I будем называть иногда методом полной релаксации.

Ясно, что метод полной релаксации является частным случаем метода неполной релаксации, т.к. $x^{n+1} = P_{i_n} x^n$ удовлетворяет условиям I и 2.

Так же, как в теоремах I,2 и 3 можно доказать, что каждая предельная точка последовательности $\{x^n\}$ является общей точкой множеств A_i, если выбрано I-ое, 2-ое или 3-е управление релаксацией. Для примера докажем это для циклического управления релаксацией.

Теорема 9. Пусть имеется конечное число выпуклых множеств A_i $(i=1,2,\dots m)$ и выбрано циклическое управление релаксацией. Тогда любая предельная точка последовательности $\{x^n\}$, полученной в результате метода неполной релаксации, является общей точкой множеств A_i.

Доказательство. Возьмем $z \in R = \bigcap_{i=1}^{m} A_i$

Тогда из условия I будет следовать, что

$$\mathcal{D}(z, x^{n+1}) \leq \mathcal{D}(z, x^n)$$

Отсюда, согласно условию $\overline{\underline{V}}$, следует, что множество элементов последовательности $\{x^n\}$ компактно. Пусть последовательность $\{x^{mn+1}\}$, сходящаяся (в противном случае выделим из неё сходящуюся подпоследовательность). Согласно условию 2, $\mathcal{D}(P_1 x^{nm}, x^{nm}) \to 0$. Т.к. $\mathcal{D}(z, P_1 x^{nm}) \leq$

$$\leq \mathcal{D}(z, x^{nm}) \leq \mathcal{D}(z, x^0),$$

то множество элементов последовательности $\{P_1 x^{nm}\}$ компактно и, следовательно,

$$\lim P_1 x^{nm} = \lim x^{nm} = x_1^*$$

т.к. $P_1 x^{nm} \in A_1$, то $x_1^* \in A_1$

Аналогично можно показать, что

$$\lim x^{nm+i-1} = x_i^* \in A_i \quad (i=2,3,\dots m)$$

Из условия I следует, что $\mathcal{D}(x^{mn+i+1}, x^{mn+i}) \to 0$

Следовательно, $\lim x^{mn+i+1} = \lim x^{mn+i}$,

и $x^*_{i+1} = x^*_i \quad (i=1,2,\dots m-1)$ Следовательно,

$$x^* = x^*_1 = \dots = x^*_m \in \bigcap_{i=1}^{m} A_i$$

Теорема доказана.

Проиллюстрируем на некоторых примерах применение метода неполной релаксации.

I. Пусть задана конечная система линейных неравенств:

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i=1,2,\dots m) \qquad (7.1)$$

Требуется найти какое-либо решение системы (7.1).

Положим

$$A_i = \{x \mid \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j \le b_i\}, \quad A_{i\cdot} = (a_{i1}, \dots a_{ip})$$

Возьмём в качестве $\mathcal{D}(x,y)$ функцию

$$\sum_{j=1}^{p} (x_j - y_j)^2$$

Рассмотрим следующий метод решения системы неравенств (7.1):

I) Выберем некоторое управление релаксацией $\{i_0, i_1 \dots\}$ и произвольное начальное приближение x^0.

2) Если x^n известно, то находим x^{n+1} следующим образом:

а) Если $x^n \in A_{i_n}$, то $x^{n+1} = x^n$

б) Если $x^n \notin A_{i_n}$, то

$$x^{n+1} = x^n + q_n A_{i_n \cdot} \frac{b_{i_n} - \sum_{j=1}^{p} a_{i_n j} x_j^n}{\sum_{j=1}^{p} a_{i_n j}^2}$$

где

$$q_n \in [\alpha, \beta] \subset (0,2)$$

Покажем, что рассматриваемый метод есть метод неполной релаксации.

Отметим прежде всего, что если при всех n $q_n = 1$, то рассматриваемый метод есть метод полной релаксации, т.к. x^{n+1} в этом случае является проекцией точки x^n на множество A_{i_n}.

Проверим, что выполнено условие I.

$$D(x^{n+1}, x^n) = \sum_{j=1}^{p} (x_j^{n+1} - x_j^n)^2 = q_n^2 \frac{\left(b_{i_n} - \sum_{j=1}^{p} a_{i_n j} x_j^n\right)^2}{\sum_{j=1}^{p} a_{i_n j}^2}$$

Пусть $z \in A_{i_n}$. Тогда

$$D(z, x^n) - D(z, x^{n+1}) = \sum_{j=1}^{p} (x_j^n - z_j)^2 - \sum_{j=1}^{p} (x_j^{n+1} - z_j)^2 =$$

$$= \sum \left((x_j^n)^2 - (x_j^{n+1})^2 - 2 z_j (x_j^n - x_j^{n+1}) \right) =$$

$$= -q_n^2 \frac{(b_{i_n} - \sum_j a_{i_n j} x_j^n)^2}{\sum_j a_{i_n j}^2} - 2 q_n \left(\sum_j a_{i_n j} x_j^n\right) \frac{b_{i_n} - \sum_{j=1}^{p} a_{i_n j} x_j^n}{\sum_j a_{i_n j}^2}$$

$$+ 2 q_n \sum_{j=1}^{p} a_{i_n j} z_j \frac{b_{i_n} - \sum_j a_{i_n j} x_j^n}{\sum_j a_{i_n j}^2} \geqslant$$

$$\geqslant -q_n^2 \frac{(b_{i_n} - \sum a_{i_n j} x_j^n)^2}{\sum_j a_{i_n j}^2} + 2 q_n \frac{(b_{i_n} - \sum_{j=1}^{p} a_{i_n j} x_j^n)^2}{\sum_{j=1}^{p} a_{i_n j}^2} =$$

$$= q_n^2 \frac{(b_{i_n} - \sum a_{i_n j} x_j^n)^2}{\sum_j a_{i_n j}^2} \left(\frac{2}{q_n} - 1\right) \geqslant D(x^{n+1}, x^n) \left(\frac{2}{\beta} - 1\right).$$

Таким образом условие I выполнено при $M = \dfrac{\beta}{2-\beta}$

Проверим условие 2.

$$\mathcal{D}(P_{i_n}, x^n) = \sum_{j=1}^{p} \left((P_{i_n} x^n)_j - x_j^n \right)^2 = \frac{\left(b_{i_n} - \sum_j a_{i_n j} x_j^n\right)^2}{\sum_j a_{i_n j}^2} =$$

$$= \frac{1}{q_n^2} \mathcal{D}(x^{n+1}, x^n) \le \frac{1}{\alpha^2} \mathcal{D}(x^{n+1}, x^n) .$$

Т.к. $\mathcal{D}(x^{n+1}, x^n) \to 0$, то и $\mathcal{D}(P_{i_n} x^n, x^n) \to 0$

Таким образом условие 2 также выполняется и рассматриваемый метод есть метод неполной релаксации.

Этот метод решения систем неравенств был предложен Эгмоном [27] и Моцкиным и Шёнбергом [39].

2. Рассмотрим систему неравенств

$$f_i(x) \le 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots m) \qquad (7.3)$$

где $f_i(x)$ – выпуклые непрерывно дифференцируемые функции. Требуется найти какое-либо решение системы неравенств (7.3).

Пусть $A_i = \{ x \mid f_i(x) \le 0 \}$

Обозначим через $g_i(x)$ градиент функции $f_i(x)$ в точке x.

Возьмём снова в качестве $\mathcal{D}(x, y)$ функцию $\sum_{j=1}^{p} (x_j - y_j)^2$

Метод полной релаксации для решения системы (7.3) состоит в последовательном нахождении проекций заданных точек на множества A_i.

В общем случае нахождение проекции на множество A_i сводится к решению системы нелинейных уравнений, решение которы может представлять определённые трудности.

Можно рассматривать следующий метод неполной релаксации (см. [15]):

Если точка x^n известна, то x^{n+1} находится по формуле

$$x^{n+1} = x^n + q_n (P_{i_n} x^n - x^n) \qquad (7.4)$$

где $q_n \in [\alpha, \beta] \subset (0,2)$

Нетрудно видеть, что полученный метод является методом неполной релаксации. Это следует хотя бы из того, что проекция на выпуклое множество совпадает с проекцией на одну из его опорных гиперплоскостей (см.лемму 6), и поэтому условия I и 2 можно проверить так же, как и в линейном случае. Однако и этот метод не снимает трудности нахождения проекций на выпуклое множество.

Рассмотрим метод решения системы (7.3), предложенный (для случая 2-го управления релаксацией) И.И.Ереминым [I6] :

I. Возьмем некоторое управление релаксацией $\{i_0, i_1, \ldots\}$ и начальное приближение x^0 .

2. Если x^n известно, то находим x^{n+1} следующим образом:

а) Если $x^n \in A_{i_n}$, то $x^{n+1} = x^n$

б) Если $x^n \notin A_{i_n}$ то $x^{n+1} = x^n - q_n \cdot q_{i_n}(x^n)$.
где $q_n > 0$

Заметим, что в случае б) $\| q_{i_n}(x^n) \| \neq 0$, т.к. иначе $\min\limits_x f_{i_n}(x) > 0$ и задача не имеет решения.

Покажем, что можно таким образом выбирать числа q_n , что рассматриваемый метод становится методом неполной релаксации.

Вычислим $\mathcal{D}(x^{n+1}, x^n)$ и $\mathcal{D}(z, x^n) - \mathcal{D}(z, x^{n+1})$ для $z \in A_{i_n}$ (В случае 2б).

$$\mathcal{D}(x^{n+1},x^n) = \|x^{n+1}-x^n\|^2 = q_n^2\,\|g_{i_n}(x^n)\|^2 \;;$$

$$\mathcal{D}(z,x^n) - \mathcal{D}(z,x^{n+1}) = \|x^n\|^2 - \|x^{n+1}\|^2 + 2(z,x^{n+1}-x^n) =$$

$$= -q_n^2\,\|g_{i_n}(x^n)\|^2 + 2q_n(x^n, g_{i_n}(x^n)) -$$

$$-2(z,g_{i_n}(x^n))\,q_n = -q_n^2\,\|g_{i_n}(x^n)\|^2 - 2q_n(g_{i_n}(x^n), z-x^n)$$

Т.к. $f_{i_n}(x)$ выпуклая функция и $f_{i_n}(x^n)>0$, а $f_{i_n}(z)\le 0$, то $0 > f_{i_n}(z) - f_{i_n}(x^n) \geqslant (g_{i_n}(x^n), z-x^n)$

Отсюда

$$\mathcal{D}(z,x^n) - \mathcal{D}(z,x^{n+1}) \geqslant 2q_n f(x^n) - q_n^2\,\|g_{i_n}(x^n)\|^2 =$$

$$= \mathcal{D}(x^{n+1},x^n)\left(\frac{2f_{i_n}(x^n)}{q_n\,\|g_{i_n}(x^n)\|^2} - 1\right)$$

Таким образом условие I выполняется, если выбирать q_n из условия

$$q_n \le \frac{\beta f_{i_n}(x^n)}{\|g_{i_n}(x^n)\|^2}$$, где $\beta<2$

Покажем теперь, что если $q_n \geqslant \dfrac{\alpha f_{i_n}(x^n)}{\|g_{i_n}(x^n)\|^2}$ $(\alpha>0)$, то условие 2 выполняется.

~~Далее~~ Имеем:

$$\mathcal{D}(x^{n+1},x^n) = q_n^2\,\|g_{i_n}(x^n)\|^2 \geqslant \alpha^2\,\frac{f_{i_n}(x^n)}{\|g_{i_n}(x^n)\|^2}\,.$$

Т.к. $\mathcal{D}(x^{n+1},x^n)\to 0$ и $\|g_{i_n}(x^n)\|$ ограничена ввиду компактности $\{x^n\}$, то $f_{i_n}(x^n)\to 0$ (7.5)

Предположим, что $\mathcal{D}(P_{i_n}x^n, x^n)$ не стремится к 0. Тогда существует сходящаяся подпоследовательность $\{x^{n_k}\}$, такая что $\mathcal{D}(P_{i_{n_k}}x^{n_k}, x^{n_k}) \geqslant \gamma > 0$ (7.6)

Пусть в последовательности $\{i_{n_k}\}$ индекс I встречается бесконечное число раз. Будем считать, что $\{x^{n_k}\}$ такая подпоследовательность, что $i_{n_k}=1$. Пусть $x^{n_k}\to x^*$. Так как проектор является непрерывным оператором ([28]), то $P_1 x^{n_k}\to P_1 x^*$.

Поэтому, переходя в (7.6) к пределу, имеем

$$\mathcal{D}(P_1 x^*, x^*) \geqslant \gamma > 0$$

Но это означает, что $f_1(x^*)>0$, что противоречи (7.5).

Поэтому $\mathcal{D}(P_{i_n} x^n, x^n)\to 0$.

Таким образом условие 2 выполнено, и рассматриваемый метод есть метод неполной релаксации.

Отметим, что если выполнено условие:

Существует число $\gamma>0$, такое что

$$\mathcal{D}(x^{n+1}, x^n) \geqslant \gamma\,\mathcal{D}(P_{i_n} x^n, x^n),$$ то $\|x^n - x^*\| = O(\Theta^n)$,

где $0\leq\Theta<1$ (при выполнении условий теорем 7 или 8).

Действительно, согласно замечанию 7,

$$\mathcal{D}(P_{i_n} x^n, x^n) \geqslant \gamma_1 \mathcal{D}(x^*, x^n)$$

Из условия I следует, что

$$\mathcal{D}(x^*, x^{n+1}) \leqslant \mathcal{D}(x^*, x^n) - \frac{1}{M}\mathcal{D}(x^{n+1}, x^n)$$

Отсюда

$$\frac{\mathcal{D}(x^*, x^{n+1})}{\mathcal{D}(x^*, x^n)} \leqslant 1 - \frac{1}{M}\,\frac{\mathcal{D}(x^{n+1}, x^n)}{\mathcal{D}(x^*, x^n)}$$

Но

$$\mathcal{D}(x^{n+1}, x^n) \geqslant \gamma\gamma_1 \mathcal{D}(x^*, x^n)$$

Поэтому существует число Θ_1 ,что

$$\mathcal{D}(x^*, x^{n+1}) \le \Theta_1 \mathcal{D}(x^*, x^n)$$

Отсюда уже легко вывезти, что

$$\|x^* - x^n\| = O(\Theta^n)$$

Из этого следует, что метод Эгмона-Моцкина сходится не медленнее, чем геометрическая прогрессия и метод Ерамина сходится не медленнее, чем геометрическая прогрессия, если существует x , такой что $\max\limits_{j=1,2\ldots m} f_j(x) < 0$

§ 8. Бесконечномерные задачи

Пусть H_1 и H_2 вещественные гильбертовы пространства Скалярные произведения и в том и в другом пространстве будем обозначать символом (x, y) . Это не должно вызвать двусмысленности, т.к. всегда будет видно, какому именно пространству принадлежат x и y .

Пусть P - замкнутый выпуклый конус в H_2 ,совпадающий со своим сопряжённым, т.е.

$$P = \{x \in H_2 \mid (x, y) \geqslant 0 \quad \text{при всех } y \in P\}$$

Назовем P положительным конусом и будем писать

$x \geqq y$, если $x - y \in P$

Возьмем произвольный элемент $x \in H_2$

Обозначим через x^+ проекцию элемента x на конус P .

Пусть $x^- = x^+ - x$.

Тогда имеют место соотношения (см. [23])

Пусть A -линейный непрерывный оператор, действующий из H_1 в H_2, $b \in H_2$

Рассмотрим задачу:

Найти $x \in H_1$, ж удовлетворяющий соотношению:

$$Ax \geqq b \qquad (8.1)$$

Будем считать, что неравенство (I) имеет решение.

Легко видеть, что соотношение (I) выполнено тогда и только тогда, когда для всех $\tau \geqq 0$, $\|\tau\| = 1$ имеет место $(\tau, Ax) \geqslant (\tau, b)$

Пусть $A_\tau = \{x \in H_1 \mid (\tau, Ax) > (\tau, b)\}$

Таким образом любое решение системы(81) является общей точкой замкнутых выпуклых множеств A_τ $(\tau \in R = \{\tau \in H_2 \mid \tau \geqq 0, \|\tau\|=1\})$

Будем решать неравенство (81) релаксационным методом с функцией релаксации $D(x-y) = (x-y, x-y)$. Как было показано в § I, эта функция удовлетворяет условиям (I)-(УI) и (A) (если в H_1 введена слабая топология).

Таким образом точка x^{n+1} будет проекцией точки x^n на множество A_{τ_n}.

Т.к. множество A_{τ_n} полупространство ($A_{\tau_n} = \{x \in H_1 \mid (A^*\tau, x) > (\tau, b)\}$ где A^* - оператор, сопряжённый с A), то если $x^n \notin A_{\tau_n}$ проекция точки x^n на множество A_{τ_n} находится следующим образом:

$$x^{n+1} = x^n + A^*\tau_n \frac{(\tau_n, b) - (\tau_n, Ax^n)}{\|A^*\tau_n\|^2} \qquad (8.2)$$

Выберем 3-е управление релаксацией, в качестве τ_n будем выбирать тот элемент из R, на котором достигается $\max\limits_{\tau \in R} \left((\tau, b) - (\tau, Ax)\right)$, т.е.

$$\tau_n = \frac{(b - Ax^n)^+}{\|(b - Ax^n)^+\|}$$

Таким образом

$$x^{n+1} = x^n + A^*(b - Ax^n)^+ \frac{\|(b - Ax^n)^+\|^2}{\|A^*(b - Ax^n)^+\|^2} \qquad (8.3)$$

Т.к. $\sup\limits_{r_n \in R} \|A^* r_n\| \leq \|A\| < \infty$, то последовательность $\{x^n\}$ слабо сходится к x^* – решению неравенства (8.1) $(x^n \dashrightarrow x^*)$

~~Внешние~~ Решение неравенства (I) можно получить также методом неполной релаксации, т.е. x^{n+1} находить следующим образом:

$$x^{n+1} = x^n + q_n A^*(b - Ax^n)^+ \frac{\|(b - Ax^n)^+\|^2}{\|A^*(b - Ax^n)^+\|^2}, \qquad (8.4)$$

где $q_n \in [\alpha, \beta] \subset (0,2)$.

Полученная в результате этого метода последовательность $\{x^n\}$ также слабо сходится к некоторому решению неравенства (8.1).

Далее имеем из формулы (8.4)

$$D(x^{n+1}, x^n) = \|x^{n+1} - x^n\|^2 = q_n^2 \frac{\|(b - Ax^n)^+\|^4}{\|A^*(b - Ax^n)^+\|^2} \geqslant$$

$$\geqslant \alpha^2 \frac{\|(b - Ax^n)^+\|^2}{\|A\|^2}$$

Т.к. $D(x^{n+1}, x^n) \to 0$ то и $\|(b - Ax^n)^+\| \to 0$

Заметим, что метод, полученный для решения неравенства)I) совпадает с градиентным методом Б.Т.Поляка 23 .

§ 9. Случай пустого пересечения

До сих пор всюду предполагалось, что рассматриваемые множества A_i имеют непустое пересечение. Однако заранее часто неизвестно, выполнено ли это условие. Поэтому было бы полезно при нахождении общей точки выпуклых множеств релаксационным методом устанавливать в ходе счёта, есть ли у данных множеств общая точка или нет. В этом параграфе будет дан некоторый признак отсутствия общей точки у данных выпуклых множеств.

Будем искать общую точку множеств $A_1, A_2, \dots A_m$ релаксационным методом с функцией релаксации $\mathcal{D}(x,y)$. Выберем циклическое управление релаксацией.

Теорема I0. Для того, чтобы $R = \bigcap_{i=1}^{m} A_i$ было непустым необходимо, а если множество элементов последовательности $\{x^n\}$ компактно, то и достаточно, чтобы было выполнено

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}(x^{n+1}, x^n) < \infty$$

Доказательство. Если R непусто, то условие

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}(x^{n+1}, x^n) < \infty$$ следует из леммы I.

Пусть $\sum \mathcal{D}(x^{n+1}, x^n) < \infty$. Тогда

$$\mathcal{D}(x^{n+1}, x^n) \to 0$$

Пусть $x^{n_k} \to x^*$. В последовательности $\{x^{n_k}\}$ содержится бесконечное число членов, содержащихся в каком-либо из множеств A_i.

Поэтому можно считать, что $\{x^{n_k}\} \subset A_1$

Тогда

$$x^* \in A_1$$

Т.к. $\mathcal{D}(x^{n_k+1}, x^{n_k}) \to 0$, то по свойству УI ~~$x^{n_k+1} \in A_2$~~ $x^{n_k+1} \to x^*$. Следовательно, $x^* \in A_2$

Аналогично можно показать, что $x^* \in A_3$, $x^* \in A_4$ и т.д.

Значит $x^* \in R$, и R - непустое множество.

Аналогичные теоремы можно доказать для 2-го и 3-го управления релаксацией.

С помощью этой теоремы можно устанавливать, является пересечение множеств A_i пустым или нет. Действительно, если предположить, что $R = \bigcap_{i=1}^{m} A_i$ не пусто, то, как следует из леммы I $\sum_{\nu=0}^{\infty} \mathcal{D}(x^{\nu+1}, x^{\nu}) \leq \mathcal{D}(x^*, x^0)$ где $x^* \in R$.

Из смысла задачи может быть известна априорная оценка $\mathcal{D}(x^*, x^0) \leq M$. Если для некоторого n $\sum_{\nu=0}^{n} \mathcal{D}(x^{\nu+1}, x^{\nu}) > M$, то это означает, что R - пустое множество.

Точно так же из условия $\mathcal{D}(x^*, x^n) \leq \mathcal{D}(x^*, x^0)$ можно установить верхнюю границу для $\|x^n\|$ (в конечномерном случае), и, если при некотором n $\|x^n\|$ превзойдёт эту границу, то это значит, что R - пустое множество.

Заметим, что если множество элементов последовательности $\{x^n\}$ не является компактным, то $\sum_{\nu=0}^{\infty} \mathcal{D}(x^{\nu+1}, x^{\nu})$ может быть меньше бесконечности, даже если пересечение этих множеств пусто.

Пример. Пусть в E^2 даны два множества

$$A_1 = \{x = (x_1, x_2) \mid x_2 = 0\}$$

$$A_2 = \{x = (x_1, x_2) \mid x_2 \geqslant x_1^{-1/4}\}$$

Рассмотрим функцию

$$\mathcal{D}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x_1}} - \frac{3}{2\sqrt{y_1}} + \frac{x_1}{2y_1\sqrt{y_1}} + (x_2 - y_2)^2$$

заданную на множестве $S \times S$, где

$$S = \{x = (x_1, x_2) \mid x_1 > 0\}$$

Пусть $x^n = (x_1^n, x_2^n) \in A_1 \cap S$, т.е. $x_1^n > 0$, $x_2^n = 0$

Вычислим x^{n+1} – $\mathcal{D}$ -проекцию точки x^n на множество A_2. Нетрудно сосчитать, что

$$x_1^{n+1} = \sqrt[3]{4}\, x_1^n \ ; \quad x_2^{n+1} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}} (x_1^n)^{-1/4} ; \qquad (9.1)$$

$$\mathcal{D}(x^{n+1}, x^n) = \frac{1}{\sqrt[6]{4}\sqrt{x_1^n}} - \frac{3}{2\sqrt{x_1^n}} + \frac{\sqrt[3]{4}\, x_1^n}{2x_1^n\sqrt{x_1^n}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}\sqrt{x_1^n}} =$$

$$= \frac{2\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} + 2 + 2}{2\sqrt[3]{2}\sqrt{x_1^n}} = \frac{4 - \sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{x_1^n}}$$

Вычислим x^{n+2} – $\mathcal{D}$ -проекцию точки x^{n+1} на A_1.

Легко видеть, что $x_1^{n+2} = x_1^{n+1}$, $x_2^{n+2} = 0$

Таким образом $\mathcal{D}(x^{n+2}, x^{n+1}) = (x_2^{n+1})^2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}\sqrt{x_1^n}}$

и $\mathcal{D}(x^{n+2}, x^{n+1}) + \mathcal{D}(x^{n+1}, x^n) = \frac{6 - \sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{2}\sqrt{x_1^n}}$

т.к. $\frac{1}{\sqrt{x_1^{n+1}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_1^n}}$ (формула (9.1)), то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x_1^n}}$ сходится. Следовательно, сходится и

ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} D(x^{n+1}, x^n)$. В то же время

$R = A_1 \cap A_2 \subset S$ - пустое множество.

В некоторых случаях теорему можно доказать без условия компактности множества $\{x^n\}$.

Пусть $A_1, A_2, \ldots A_m$ - полупространства.

$$A_i = \{x \in E^p \mid \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j \geq b_i\}$$

Пусть $R = \bigcap\limits_{i=1}^{m} A_i$ - пусто

Будем искать общую точку этих множеств релаксационным методом с функцией релаксации $D(x,y) = \sum\limits_{j=1}^{p} (x_j - y_j)^2$

Выберем третье управление релаксацией, в качестве i_n будем выбирать индекс, для которого достигается $\max\limits_i (b_i - (A_{i\cdot}, x^n))$.

Возьмем точку Z , которая минимизирует функцию $\max\limits_i (b_i - (A_{i\cdot}, Z))$. Так как $\max\limits_i (b_i - (A_{i\cdot}, Z)) > 0$ (ввиду того, что R пусто), то такая точка существует.

Как уже отмечалось

$$x^{n+1} = x^n + A_{i_n\cdot} \frac{b_{i_n} - (A_{i_n\cdot}, x^n)}{\| A_{i_n\cdot} \|^2}$$

$$D(x^{n+1}, x^n) = \| x^{n+1} - x^n \|^2 = \frac{(b_{i_n} - (A_{i_n\cdot}, x^n))^2}{\| A_{i_n\cdot} \|^2}$$

Если $\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}(x^{n+1}, x^n) < \infty$, то $\mathcal{D}(x^{n+1}, x^n) \to 0$

и, следовательно, $(b_{i_n} - (A_{i_n \cdot}, x^n))^2 \to 0$, но

$$(b_{i_n} - (A_{i_n \cdot}, x^n))^2 > (\max_i (b_i - (A_{i \cdot}, z)))^2 > 0$$

Следовательно, $\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}(x^{n+1}, x^n) = \infty$.

Литература

I. Брэгман Л.М. "Нахождение общей точки выпуклых множеств методом последовательного проектирования" ДАН I62 № 3 (I965).

2. Брэгман Л.М. "Релаксационный метод нахождения общей точки выпуклых множеств и его применение для решения задач оптимизации". ДАН

3. Брэгман Л.М. "Релаксационный метод нахождения общей точки выпуклых множеств и его применение для решения задач выпуклого программирования". Ж. вычисл.матем. и матем.физ. (В печати).

4. Брэгман Л.М. "Доказательство сходимости метода Г.В.Шелейховского для задачи с транспортными ограничениями". Ж.выч. матем.и мат.физ. 6 № 6 (I966).

5. Булавский В.А. "Итеративный метод решения общей задачи линейного программирования". Сиб.мат.ж. № 3 (I962).

6. Бурбаки Н. Топологические векторные пространства. Физматгиз I959.

7. Гейл Д. Теория линейных экономических моделей. ИЛ I963.

8. Германов М.А., Спиридонов В.С. "Об одном релаксационном методе решения систем нелинейных неравенств". Ж.вычисл.мат. и мат.физ. 6 № 2 (I966).

9. Гольштейн Е.Г. "Методы блочного программирования". Экон. и матем.методы 2- № I (I966).

I0. Данциг Дж.Б., Вулф Ф. "Принцип разложения для линейной программы". Математика 8 № I (I964).

II. Даффин Дж.Р. Бесконечные программы. Сб.Линейные неравенства и смежные вопросы. ИЛ I959.

I2. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. "К задаче о минимизации гладкого функционала при выпуклых ограничениях". ДАН,I60 № I (I965).

I3. Деннис Дж.Б. Математическое программирование и электрические цепи. ИЛ I96I.

I4. Дынкин А.Г., Мовчан Э.Г. "Методология расчёта перспективных пассажиропотоков". Сб. Применение математических методов и ЭВМ в градостроительстве. Будивельник,Киев I966.

I5. Ерёмин И.И. "Обобщение релаксационного метода Моцкина-Эгмона". УМН 20 вып.2 (I965).

I6. Ерёмин И.И. "Релаксационный метод решения систем неравенств с выпуклыми ограничениями в левых частях". ДАН I60 № 5 (I965).

I7. Зайтендейк Г. Методы возможных направлений. ИЛ I963

I8. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз I959.

I9. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. "Мир" I964.

20. Кюнци Г.П., Крелле В. Нелинейное программирование. "Советское радио" I965.

21. Мазуров В.Д. "Об экспоненциальном методе решения системы выпуклых неравенств". Ж.выч.мат.и матем.физ. 6 № 2 (1966)

22. Мерзляков Ю.И. "Об одном релаксационном методе решения систем линейных неравенств". Ж. выч. мат.и матем.физ. 2 № 3 (1962).

23. Поляк Б.Т. "Градиентные методы минимизации функционала". Ж.выч.мат. и матем.физ. 4 № 6 (1964).

24. Удзава Х. "Теорема Куна-Таккера о вогнутом программировании". Сб. Исследования по линейному и нелинейному программированию. ИЛ 1962.

25. Удзава Х. "Итеративные методы вогнутого программирования" Сб. Исследования по линейному и нелинейному программированию. ИЛ 1962.

26. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. Физматгиз 1963.

27. Agmon S. „The relaxation method for linear inequalities", Canad. J. Math., 6, № 3 (1954)

28. Cheney W., Goldstein A.A. „Proximity maps in Hilbert space", Proc. Amer. Math. Soc., № 10 (1959)

29. Dorn W.D. „A duality theorem for convex programms", IBM, J. Res. and Develop., 4, № 4 (1960)

30. D'Esopo D.A., Lefkowitz B. „An algorithm for computing intersonal

transfers using the gravity model",
Oper. Res., 11, nr 6, (1963)

31. Duffin R. J., Karlovitz L.A. „An infinite linear program with a duality gap".
Manag. Sci., 12, nr 1 (1965)

32. Motzkin T.S., Schoenberg I. J. „The relaxation method for linear inequalities".
Canad. J. Math., 6, nr 3 (1954).

33. Parisot G.R. Résolution numérique approchée du problème de programmation linéaire par application de la programmation logarithmique, Theses, Univ. de Lill, 1961.

34. Pietrzykowski T. „An iteration method of linear programming", Zaklad Aparatow Matem. PAN, Prace A, nr 5 (1960)

35. Sinkhorn R. „A relationship between arbitrary positive matrices and doubly stochasic matrises", Ann. Math. Statistics, 35, nr 2 (1964)

36. Wolfe P. „A duality theorem for nonlinear programming". Quart. Appl. Math., 19, nr 3, (1961).

СОДЕРЖАНИЕ