УДК 517.98

В. И. ЧИЛИН

# АБСТРАКТНАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ НЕКОММУТАТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВ ОРЛИЧА

Развитие теории некоммутативного интегрирования привело к необходимости изучения различных классов банаховых пространств измеримых операторов, присоединенных к алгебрам фон Неймана [1—5]. Эти пространства являются некоммутативными аналогами известных классических функциональных пространств, составляющих важный подкласс банаховых решеток. Хорошо известны условия, позволяющие выделить среди банаховых решеток те, которые изоморфны пространствам $L_p$ (см., напр., [6]) или пространствам Орлича [7]. В настоящей работе дается абстрактная характеристика некоммутативных пространств Орлича, при этом существенно используется введенное в [8, 9] понятие банахового упорядоченного $*$-алгеброида. Аналогичная характеризация для некоммутативных $L_p$-пространств получена в [8]. Основной результат работы анонсирован в [9].

1. **Некоммутативные пространства Орлича.** Пусть $M$ — конечная алгебра фон Неймана, $\mathbf{1}$ — единица в $M$, $\mu$ — точный нормальный конечный след на $M$, $S(M)$—кольцо всех измеримых операторов, присоединенных к $M$, и $(L_1(M, \mu), \|\cdot\|_1)$ — банахово пространство всех интегрируемых по $\mu$ операторов из $S(M)$ [1]. Рассмотрим отрезок $[0, \mu(\mathbf{1})]$ с мерой Лебега $m$ и кольцо $S([0, \mu(\mathbf{1})])$ всех действительных $m$-измеримых функций на $[0, \mu(\mathbf{1})]$ (равные mod 0 функции отождествляются).

Обозначим через $\Phi$ функцию Орлича на $[0, +\infty)$, т. е. выпуклую неотрицательную функцию, для которой $\Phi(0)=0$ и $\Phi(t)>0$ при $t>0$. Будем считать, что $\Phi$ удовлетворяет $(\delta_2, \Delta_2)$-условию, т. е. $\Phi(2t)\leqslant c\Phi(t)$ при всех $t\geqslant 0$ и некоторой константе $c>0$.

Положим

$$L_\Phi([0, \mu(\mathbf{1})], m)=\{f\in S([0, \mu(\mathbf{1})]) \mid \Phi(|f|)\in L_1([0, \mu(\mathbf{1})], m)\},$$

$$L_\Phi(M, \mu)=\{T\in S(M) \mid \Phi(|T|)\in L_1(M, \mu)\},$$

где $|T|=\sqrt{T^*T}$ — модуль оператора $T$, Так как $\Phi$ удовлетворяет $(\delta_2, \Delta_2)$-условию, то $L_\Phi([0, \mu(\mathbf{1})], m)$ — идеальное пространство в $S([0, \mu(\mathbf{1})])$ (см., напр., [10]). Обозначим через $\widetilde{T}(t)$ невозрастающую перестановку для $T\in S(M, \mu)$, т. е.

$$\widetilde{T}(t)=\inf\{\lambda\geqslant 0 \mid \mu(\mathbf{1}-E(\lambda))\leqslant t\},$$

где $\{E(\lambda)\}$—спектральное семейство проекторов для оператора $|T|$.

Известно, что $T\in L_1(M, \mu)$ в том и только в том случае, когда $\int_0^{\mu(\mathbf{1})}\widetilde{T}(t)\,dt<\infty$; при этом $\|T\|_1=\int_0^{\mu(\mathbf{1})}\widetilde{T}(t)\,dt$ (см [3]). Так как $\Phi(\widetilde{|T|})=\Phi(\widetilde{T})$ (см. [15]), то

$$T\in L_\Phi(M, \mu) \Longleftrightarrow \widetilde{T}\in L_\Phi([0, \mu(\mathbf{1})], m).$$

Согласно свойствам перестановок [3], отсюда $L_\Phi(M, \mu)$ — линейное подпространство в $L_1(M, \mu)$. Для каждого $f\in L_\Phi([0, \mu(\mathbf{1})], m)$ и $T\in L_\Phi(M, \mu)$ положим

$$\rho_\Phi(f)=\inf\left\{\lambda>0 \,\middle|\, \int_0^{\mu(\mathbf{1})}\Phi\left(\frac{|f|}{\lambda}\right)dm\leqslant 1\right\},$$

$$\rho_\Phi(T)=\inf\left\{\lambda>0 \,\middle|\, \left\|\Phi\left(\frac{|T|}{\lambda}\right)\right\|_1\leqslant 1\right\}.$$

Ясно, что $\rho_\Phi(T)=\rho_\Phi(\widetilde{T})=\rho_\Phi(\widetilde{T^*})=\rho_\Phi(T^*)$ для всех $T\in L_\Phi(M, \mu)$.

Так же, как и в [10, гл. IV, §3], показывается, что норма $\rho_\Phi(f)$ на $L_\Phi([0, \mu(\mathbf{1})], m)$ порядково непрерывна и монотонно полна, в частности, пространство $(L_\Phi([0, \mu(\mathbf{1})], m)$ банахово. Это пространство является примером функционального пространства Орлича, построенного по функции Орлича $\Phi$. Из [4] следует, что $\rho_\Phi(T)$ также является нормой на $L_\Phi(M, \mu)$, при этом $\rho_\Phi(ATB)\leqslant\|A\|_\infty\|B\|_\infty\rho_\Phi(T)$, где $A, B\in M$; $T\in L_\Phi(M, \mu)$; $\|\cdot\|_\infty$ — $C^*$-норма в $M$. Это означает, что $(L_\Phi(M, \mu), \rho_\Phi)$ есть нормированное идеальное пространство на алгебре фон Неймана $M$ (см. [5]). Покажем, что оно банахово. Для этого достаточно установить (см. [5]), что норма $\rho_\Phi(T)$ монотонно полна, т. е. для любой возрастающей последовательности $\{T_n\}$ положительных операторов из $L_\Phi(M, \mu)$, у которой $\sup\rho_\Phi(T_n)<\infty$, существует такое $T\in L_\Phi(M, \mu)$, что $T_n\uparrow T$. Так как $L_\Phi([0, \mu(\mathbf{1})], m)$ непрерывно вложено в $L_1([0, \mu(\mathbf{1})], m)$ [11], то

$$\sup \|T_n\|_1 = \sup \left\|\widetilde{T}_n\right\|_1 \leqslant c \sup \rho_\Phi\left(\widetilde{T}_n\right) = c \sup \rho_\Phi\left(T_n\right) < \infty$$

для некоторой константы $c>0$, и потому найдется такое $T \in L_1(M, \mu)$, что $T_n \uparrow T$ (см. [1]).

Пусть $N$ — максимальная коммутативная $*$-подалгебра в $M$, содержащая все спектральные проекторы оператора $T$, и $E$ — условное математическое ожидание из $L_1(M, \mu)$ на $L_1(N, \mu)$. В силу [4] $E\left(L_\Phi(M, \mu)\right) \subset L_\Phi(N, \mu)$ и, более того, $E\left(L_\Phi(M, \mu)\right) = L_\Phi(N, \mu)$, при этом $\|E\| = 1$. Последовательность $\{E(T_n)\}$ является возрастающей последовательностью положительных элементов из $L_\Phi(N, \mu)$ и $\sup \rho_\Phi\left(E\left(T_n\right)\right) \leqslant \sup \rho_\Phi\left(T_n\right) < \infty$. Так как $L_\Phi(N, \mu)$ можно отождествить с некоторым функциональным пространством Орлича, норма которого монотонно полна, то существует такое $S \in L_\Phi(N, \mu)$, что $E(T_n) \uparrow S$. С другой стороны, $E(T_n) \uparrow E(T)$ и $E(T) = T$. Следовательно, $T = S$ и $T \in L_\Phi(M, \mu)$. Таким образом, получена следующая

**Теорема 1.** $\left(L_\Phi(M, \mu), \rho_\Phi\right)$ является банаховым идеальным пространством на алгебре фон Неймана $M$.

Пространство $\left(L_\Phi(M, \mu), \rho_\Phi\right)$ есть некоммутативный аналог функционального пространства Орлича (ср. с [5]).

*Замечание 1.* Норма $\rho_\Phi$ порядково непрерывна, т. е. $\rho_\Phi(T_n) \to 0$ для любой последовательности $T_n \downarrow 0$.

В самом деле, если $T_n \downarrow 0$, то $\widetilde{T}_n(t) \downarrow 0$ и $\int\limits_0^{\mu(1)} \Phi\left(\varepsilon^{-1}\widetilde{T}_n(t)\,dt \to 0\right.$ при всех $\varepsilon > 0$. Следовательно, $\rho_\Phi\left(T_n\right) \leqslant \varepsilon$ для $n \geqslant N(\varepsilon)$, т. е. $\rho_\Phi\left(T_n\right) \to 0$.

**2. Банаховы упорядоченные *-алгеброиды.** Пусть $E$ — векторное пространство над полем комплексных чисел; $*: E \to E$ — инволюция в $E$, $E_h = \{x \in E \mid x = x^*\}$ — действительное пространство всех самосопряженных элементов из $E$ и $K$ — собственный воспроизводящий конус в $E_h$. Элемент $e$ из $K$ называется слабой единицей, если для любого ненулевого $y \in K$ существует такое ненулевое $x \in K$, что $x \leqslant y$, $x \leqslant e$ (здесь и далее частичный порядок в $E_h$ определяется конусом $K$; $x \leqslant y \Longleftrightarrow (y-x) \in K$).

Обозначим через $M$ подпространство всех ограниченных элементов из $E$ относительно слабой единицы $e$, т. е. множество всех таких $a + ib \in E$, $a, b \in E_h$, для которых существует число $\lambda > 0$, что $-\lambda e \leqslant a \leqslant \lambda e$, $-\lambda e \leqslant b \leqslant \lambda e$. Будем говорить, что $E$ допускает частичное умножение, согласованное с порядком, и называть $(E, e)$ упорядоченным $*$-алгеброидом, если на $M$ можно определить операцию умножения так, чтобы $M$ стало $*$-алгеброй с единицей $e$ относительно инволюции, индуцированной из $E$, и частичный порядок, индуцированный на $M_h$, обладал следующими свойствами:

1. $a^*xa \geqslant 0$ для любых $a, x \in M$, $x \geqslant 0$;
2. $x^2 \leqslant e$, если $-e \leqslant x \leqslant e$.

**Определение 1.** Пусть $\rho$ — банахова норма на упорядоченном $*$-алгеброиде $(E, e)$ и конус $K$ монотонно замкнут, т. е. предел любой монотонной сходящейся по норме последовательности из $K$ принадлежит $K$. Пара $(E, \rho)$ называется банаховым упорядоченным $*$-алгеброидом, если

1. $\rho(x^*) = \rho(x)$ для всех $x \in E$;
2. $\rho(x) \leqslant \rho(y)$ при $0 \leqslant x \leqslant y$;
3. $\rho(ax) \leqslant \rho(x)$, если $a, x \in M$, $a^*a \leqslant e$.

Примерами банаховых упорядоченных $*$-алгеброидов служат пространства $L_p$ [1, 3], Орлича, симметричные пространства [2, 4] измеримых операторов, присоединенных к конечным алгебрам фон Неймана. На $*$-алгебре $M$ ограниченных элементов банахова $*$-алгеброида всегда существует норма $\|\cdot\|_\infty$, относительно которой $M$ является $C^*$-алгеброй [8, 9], в частности, $\{x \in M \mid x \geqslant 0\} = \{x^*x \mid x \in M\}$; кроме того, $\rho(axb) \leqslant \|a\|_\infty \|b\|_\infty \rho(x)$ для любых $a, b, x \in M$.

Будем говорить, что банаховы упорядоченные $*$-алгеброиды $(E, e)$ и $(F, f)$ геометрически и порядково $*$-изоморфны, если существует такая изометрия $U: E \to F$, что $U(e)=f$, $U(x^*)=U(x)^*$ и $U(x) \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $x \geqslant 0$. Заметим, что в этом случае сужение $U$ на $C^*$-алгебру ограниченных элементов из $E$ является йордановым $*$-изоморфизмом на $C^*$-алгебру ограниченных элементов из $F$.

Пусть $(E, e)$ — упорядоченный $*$-алгеброид и $M$—$C^*$-алгебра ограниченных элементов из $E$. Неотрицательную функцию $\Psi$ на $E$ назовем модуляром Орлича (ср. [7]), если:

1. $\Psi(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;

2. $\Psi(x^*) = \Psi(x)$ для всех $x \in E$;

3. $\Psi(x) \leqslant \Psi(y)$ при $0 \leqslant x \leqslant y$, $x, y \in E$;

4. $\Psi(ax) \leqslant \Psi(x)$, если $a, x \in M$, $\|a\|_\infty \leqslant 1$;

5. $\Psi_x(t) = \Psi(tx)$ — выпуклая функция на $[0, +\infty)$ для всех $x \in E$ и $\Psi(\gamma x + (1-\gamma)y) \leqslant 1$, если $\Psi(x) \leqslant 1$, $\Psi(y) \leqslant 1$, $\gamma \in [0, 1]$;

6. $\Psi(x+y) = \Psi(x) + \Psi(y)$ для $x, y \in M$, $xy = 0$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$;

7. $\Psi(2x) \leqslant c\Psi(x)$ для всех $x \in E$ и некоторой константы $c > 0$.

Если $(L_\Phi, \rho_\Phi)$ — некоммутативное пространство Орлича, то $\Psi(T) = \|\Phi(|T|)\|_1$ является модуляром Орлича на $L_\Phi$.

Пусть $\Psi$ — модуляр Орлича на $E$. Для каждого $x \in E$ положим $\rho_\Psi(x) = \inf\left\{\lambda > 0 \,\middle|\, \Psi\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leqslant 1\right\}$. Очевидно, что $\rho_\Psi$ — норма на $E$, удовлетворяющая условиям 1 — 3 из определения 1. Если норма $\rho_\Psi$ банахова и конус $K$ монотонно замкнут, то банахов упорядоченный $*$-лгеброид $(E, \rho_\Psi)$ назовем $*$-алгеброидом Орлича (ср.[7]).

**Теорема 2.** $C^*$-алгебра $M$ ограниченных элементов из $*$-алгеброида Орлича $(E, \rho_\Psi)$ является алгеброй фон Неймана счетного типа.

Доказательство. Пусть $N$ — максимальная коммутативная $*$-подалгебра в $M$. Множество $N_h$ всех самосопряженных элементов из $N$ является нормированной векторной решеткой относительно частичного порядка и нормы, индуцированных из $(E, \rho_\Psi)$. Если $\{x_n\} \subset N_h$, $x_n \geqslant 0$, $x_n x_m = 0$, $n \neq m$, $x_n \leqslant z \in N_h$, то $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ возрастает и $0 \leqslant S_n \leqslant z$, $n = 1, 2, \ldots$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} \Psi(x_i) = \Psi(S_n) \leqslant \Psi(z)$$

при всех $n = 1, 2, \ldots$, в частности, $\Psi(x_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

В силу свойства 7 модуляра $\Psi$ получим, что $\Psi(\varepsilon^{-1} x_n) \to 0$ для всех $\varepsilon > 0$. Это означает, что $\rho_\Psi(x_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Из [7, теорема 3. 6] вытекает, что любая возрастающая ограниченная сверху последовательность $\{y_n\} \subset N_h$ является $\rho_\Psi$-фундаментальной. Поэтому существует такое $y \in E_h$, что $\rho_\Psi(y_n - y) \to 0$ при $n \to \infty$. В силу монотонной замкнутости конуса $K$, $y=\sup y_n$, а так как $\{y_n\}$ ограничена в $N_h$, то $y\in M$. Если $a\in N$, то

$$\rho_\Psi(ay-ya)\leqslant\rho_\Psi(ay-ay_n)+\rho_\Psi(y_n a-ya)\leqslant 2\|a\|_\infty\,\rho_\Psi(y-y_n)\to 0.$$

Следовательно, $ay=ya$ и, в силу максимальности $N$, $y\in N_h$. Таким образом, $y$ есть точная верхняя грань в $N_h$ для последовательности $\{y_n\}$. Это означает, что $N_h$ является условно $\sigma$-полной векторной решеткой; причем если $x_n$, $x\in N_h$ и $x_n\uparrow x$, то $\rho_\Psi(x_n-x)\to 0$ при $n\to\infty$. Из свойства 6 модуляра $\Psi$ вытекает, что $N_h$ имеет счетный тип и поэтому $N_h$ — условно полная векторная решетка. Кроме того, любое семейство $\{g\}$ попарно ортогональных проекторов из $M$ (оно не более чем счетно) имеет точную верхнюю грань во множестве всех проекторов из $M$. Следовательно, $M$ есть $AW^*$-алгебра [12]. Покажем, что на $M$ существует разделяющее семейство вполне аддитивных состояний. Тогда из [13] будет следовать, что $M$ — алгебра фон Неймана. Так как

$$\sup g_i=\rho_\Psi-\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}g_i$$

для любой последовательности $\{g_i\}$ попарно ортогональных проекторов из $M$, то каждый непрерывный линейный функционал на $(E,\rho_\Psi)$ является вполне аддитивным на $M$. Осталось использовать теорему Хана—Банаха и замкнутость конуса $K\cap M$ в $(M,\rho_\Psi)$, устанавливаемую в следующей лемме.

**Лемма.** Конус $K\cap M$ замкнут в $(M,\rho_\Psi)$.

Доказательство. Так как $\rho_\Psi(x)=\rho_\Psi(x^*)$ для всех $x\in M$, то достататочно показать, что $K\cap M_h$ замкнуто в $M_h$. Пусть $x_n\in K\cap M_h$, $x\in M_h$ и $\rho_\Psi(x_n-x)\to 0$ при $n\to\infty$. Если $x\overline{\in}K$, то найдутся такие $\varepsilon>0$ и проектор $g\neq 0$, что $xg=gx\leqslant-2\varepsilon g$ [12]. Обозначим через $g_n$ спектральный проектор для $(x_n-x)$, соответствующий числу $\varepsilon$, т. е. $(x_n-x)g_n\leqslant\varepsilon g_n$, $(x_n-x)(e-g_n)\geqslant\varepsilon(e-g_n)$. Имеем $\rho_\Psi(e-g_n)\leqslant\varepsilon^{-1}\rho_\Psi(x_n-x)\to 0$ при $n\to\infty$. Если $g\wedge g_n=0$, то в силу [12]

$$g=g-g\wedge g_n\sim g\vee g_n-g_n\leqslant e-g_n$$

и поэтому $\rho_\Psi(g)\leqslant g_\Psi(e-g_n)$. Так как $\rho_\Psi(g)\neq 0$, то найдется такое $n_0$, что $f=g\wedge g_{n_0}\neq 0$. Тогда

$$0\leqslant fx_{n_0}f=f(x_{n_0}-x)f+fxf\leqslant\varepsilon f-2\varepsilon f=-\varepsilon f,$$

что невозможно. Следовательно, $x\in K$.

3. **Абстрактная характеризация некоммутативных пространств Орлича.** Пусть $((E,e),\rho_\Psi)$ — $*$-алгеброид Орлича. Для каждого $x\in E$ $x\neq 0$, положим $\varphi_x(t)=\frac{\Psi(tx)}{\Psi(x)}$, $t\geqslant 0$. Если $\varphi_x=\varphi_y$ для всех $x$, $y\in E$, то $\varphi_x(t)=\varphi_y(t)=t^p$ для каждого $p\in[1,+\infty)$ (см. [7]) и поэтому $\Psi(tx)=t^p\Psi(x)$, $t\geqslant 0$. Полагая $t=\rho_\Psi^{-1}(x)$, получаем $\Psi(x)=\rho_\Psi^p(x)$. Таким образом, в этом случае норма $\rho_\Psi$ обладает свойством $p$-аддитивности:

$$\rho_\Psi^p(x+y)=\rho_\Psi^p(x)+\rho_\Psi^p(y),\ x,y\in M,\ xy=0,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0$$

и поэтому в силу [8] $(E,\rho_\Psi)$ изометрически и порядково $*$-изоморфно некоммутативному $L_p$-пространству. $*$-Алгеброид Орлича назовем проекторно инвариантным относительно модуляра $\Psi$, если $\varphi_g = \varphi_e$ для всех проекторов $g \in E$. Ясно, что каждое некоммутативное пространство Орлича $(L_\Phi, \rho_\Phi)$ является $*$-алгеброидом Орлича, проекторно инвариантным относительно модуляра $\Psi(T) = \|\Phi(|T|)\|_1$.

**Теорема**. 3 Пусть $((E, e), \rho_\Psi)$ — $*$-алгеброид Орлича, проекторно инвариантный относительно модуляра $\Psi$. Тогда существуют конечная алгебра фон Неймана $M$ и точный нормальный конечный след $\mu$ на $M$ такие, что $(E, \rho_\Psi)$ изометрически и порядково $*$-изоморфно $(L_\Phi(M, \mu), \rho_\Phi)$, где $\Phi(t) = \Psi(te)$, $t \geqslant 0$.

Доказательство. В силу теоремы 2 $C^*$-алгебра $M$ ограниченных элементов из $E$ является алгеброй фон Неймана. Из свойств модуляра $\Psi$ вытекает, что $\mu(g) = \frac{\Psi(g)}{\Psi(e)}$ есть конечная вполне аддитивная унитарно инвариантная мера на логике всех проекторов из $M$, в частности, $M$-конечная алгебра фон Неймана. Следовательно( см. [1]), $\mu$ продолжается до точного нормального конечного следа на $M$ (продолжение также обозначим через $\mu$).

Пусть $(L_\Phi(M, \mu), \rho_\Phi)$ — некоммутативное пространство Орлича, построенное на $(M, \mu)$ по функции Орлича $\Phi(t)$. Покажем, что $(E, \rho_\Phi)$ изометрически и порядково $*$-изоморфно $(L_\Phi(M, \mu), \rho_\Phi)$. Если $x$ — положительный простой элемент из $M$, т. е. имеет вид $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$, где $\lambda_i > 0$, $\{g_i\}$ — попарно ортогональные проекторы из $M$, то

$$\Psi(x) = \sum_{i=1}^{n} \Psi(\lambda_i g_i) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{g_i}(\lambda_i)\Psi(g_i) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_e(\lambda_i)\Psi(e)\mu(g_i) =$$

$$= \mu\left(\sum_{i=1}^{n} \Psi(\lambda_i e) g_i\right) = \mu\left(\sum_{i=1}^{n} \Phi(\lambda_i) g_i\right) = \mu(\Phi(x)).$$

Поэтому

$$\rho_\Psi(x) = \inf\left\{\lambda > 0 \,\middle|\, \Psi\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leqslant 1\right\} = \inf\left\{\lambda > 0 \,\middle|\, \left\|\Phi\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right\|_1 \leqslant 1\right\} = \rho_\Phi(x).$$

Используя равномерную аппроксимацию положительных элементов из $M$ простыми положительными элементами и полярное разложение элементов из $M$, получаем, что $\rho_\Psi(x) = \rho_\Phi(x)$ для всех $x \in M$.

Покажем, что $M$ плотно в $(E, \rho_\Psi)$. Пусть $x$ — произвольный положительный элемент из $E$. Рассмотрим семейство $\mathcal{P}$ всевозможных наборов $\{y_i\}_{i \in I}$ из $K \cap M$, обладающих следующим свойством: $\sum_{i \in \alpha} y_i \leqslant x$ для любого $\alpha = (i_1, \dots, i_n) \subset I$. Обозначим через $A = \{y_i\}_{j \in J}$ максимальный набор в $\mathcal{P}$ и положим $z_\alpha = \sum_{j \in \alpha} y_j$ для $\alpha = (j_1, \dots, j_n) \subset J$.

Сеть $\{z_\alpha\}$ возрастает, $z_\alpha \in K \cap M$, $z_\alpha \leqslant x$, в частности,

$$\sup \rho_\Phi(z_\alpha) = \sup \rho_\Psi(z_\alpha) \leqslant \rho_\Psi(x).$$

В силу порядковой непрерывности и монотонной полноты нормы $\rho_\Phi$ (см. замечание 1 и доказательство теоремы 1) сеть $\{z_\alpha\}$ сходится в $L_\Phi(M, \mu)$. Следовательно, $\{z_\alpha\}$ фундаментальна в $(E, \rho_\Psi)$ и поэтому существует такое $z \in E_h$, что $\rho_\Psi(z - z_\alpha) \to 0$.

Так как конус $K$ монотонно замкнут, то $z=\sup z_\alpha$. Если $x-z\neq 0$, то найдется такой ненулевой элемент $z_0\in K$, что $z_0\leqslant x-z$, $z_0\leqslant e$. Тогда $A\cup\{z_0\}\in\mathcal{P}$, что противоречит максимальности набора $A$. Таким образом, $z=x$ и поэтому $K\cap M$ плотно в $K$. Так как $K-K=E_h$ и $E=E_h+iE_h$, то $M$ плотно в $(E, \rho_\Psi)$. Аналогично устанавливается, что $M$ плотно в $(L_\Phi(M, \mu), \rho_\Phi)$.

Следовательно, тождественное отображение из $(M, \rho_\Psi)$ в $(M, \rho_\Phi)$ продолжается до изометрии из $(E, \rho_\Psi)$ на $(L_\Phi(M, \mu), \rho_\Phi)$, которая, очевидно, будет изометрическим и порядковым $*$-изоморфизмом $(E, \rho_\Psi)$ на $(L_\Phi(M, \mu), \rho_\Phi)$.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Segal I. A non commutative extension of abstract integration. Ann. Math., 1953, v. 57, p. 401—457. 2. Овчинников В. И. Симметричные пространства измеримых операторов.— Докл. АН СССР, 1970, т. 191, № 4, с. 769—771. 3. Yeadon F. J. Non-commutative $L_p$-spaces. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 1975, v. 77, p. 91—102. 4. Yeadon F. J. Ergodic theorems for semifinite von Neumann algebras: II. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 1980, v. 88, p. 135—147. 5. Муратов М. А. Идеальные подпространства в кольце измеримых операторов.— Дис. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук, Ташкент, 1979. 133 с. 6. Lacey H. E. The isometric theory of classical Banach spaces. Springer Verlag, 1974. 264 p. 7. Glaas W. J., Zaanen A. C,. Orlicz lattices. Comm. math., 1979, v. 1, p. 77—93. 8. Чилин В. И. Порядковая характеризация некоммутативных $L$-пространств.— Труды Всес. конф. по теории функций, Кемерово, 1985, с. 19—23. 9. Чилин В. И. Упорядоченные $*$-алгеброиды.— Докл. АН СССР, 1985, т. 281, № 5, с 1063—1067. 10. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ.—М.: Наука, 1977. 742 с. 11. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов.— М.: Наука, 1978. 400 с. 12. Kaplansry I. Projections in Banach algebras.— Ann. Math,. 1951, v. 53, p. 235—249. 13. Pedersen G. K. Operator algebras with weakly closed abelian subalgebras.— Bull. London Math. Soc., 1972, v. 4, p. 171—175.

Ташкентский
ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет
имени В. И. Ленина

Дата поступления
14. 06. 1985 г.